Laboratoire de Mathématiques
Université du Luxembourg

Prof. Dr. Raymond Mortini

année académique 2009-2010

Analyse fonctionnelle, S6

Exercice 1

Soient A un anneau commutatif unitaire, I un idéal propre de A et M une partie multiplicativement clos de A (i.e. $f, g \in M \Longrightarrow f \cdot g \in M$) telle que $M \cap I = \emptyset$. Montrer avec l'aide du lemme de Zorn qu'il existe un idéal premier P de A tel que $I \subseteq P$ et $P \cap M = \emptyset$.

Exercice 2

Soit $n(x, y) = |\arctan x - \arctan y|$. Montrer que $n(\cdot, \cdot)$ est une distance sur $\mathbb{R}$. Est-ce que $(\mathbb{R}, n)$ est un espace métrique complet? Est-ce que $n(x, y)$ définie une norme $||\cdot||$ sur $\mathbb{R}$ telle que $||x - y|| = n(x, y)$?

Exercice 3

a) Soit E l'espace $C_{\mathbb{R}}([0, 1])$ des fonctions continues à valeures réelles sur $[0, 1]$. Montrer que $||f||_1 = \int_0^1 |f(x)|dx$ définit une norme non-complète sur E. Est-ce que $||\cdot||_1$ est équivalente à la norme $||\cdot||_\infty$?

b) Soit (M, d) un espace métrique, $x_0 \in M$ et

$$E = \{f : M \to \mathbb{R} \mid \exists C \geq 0 : |f(x) - f(y)| \leq C\, d(x, y)\ \forall x, y \in M\}$$

l'ensemble des fonctions lipschitziennes sur M. Posons

$$L(f) = \sup \left\{ \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x, y)} : x, y, \in M, x \neq y \right\}$$

et $||f|| = L(f) + |f(x_0)|$. Montrer que $(E, ||\cdot||)$ est une espace de Banach.

Exercice 4

(a) Montrer que sur chaque espace vectoriel $E \neq \{0\}$ il existe une norme non triviale.
(b) Soit $(E, ||\cdot||)$ un espace de Banach de dimension infinie. Montrer qu'il existe une infinité de normes $||\cdot||_n$ complètes sur E qui ne sont pas équivalentes deux à deux .

Indication: Si B est une base algébrique de E et $\varphi : B \to]0, \infty[$, on considère $\|x\|_\varphi := \|T_\varphi x\|, x \in E$, où $T_\varphi : E \to E$ est l'endomorphisme définie par: $T_\varphi b = \varphi(b)b, \forall b \in B$.

Exercice 5

Soit $(E, ||\cdot||)$ un espace normé et $F \subseteq E$ un sous-espace vectoriel de E. Soient $x, y \in E$. On dit que x est équivalent à y si $y - x \in F$ (notation: $x \sim y$).
Monter que $\sim$ est une relation d'équivalence sur E.
Les classes d'équivalences pour $\sim$ seront notées par $[x] := \tilde{x} := x + F$ et $E/_F$ est l'espace quotient associé à $\sim$. Montrer que

i) $||x||_Q := ||\tilde{x}|| := \inf\{||y|| : y \sim x\}$ est une sémi-norme sur E/F.
ii) $||\tilde{x}|| = \mathrm{dist}\,(x, F)$;
iii) $||\cdot||_Q$ est une norme sur $E/_F$ si et seulement si F est fermé. (On appelle $||\cdot||_Q$ la norme quotient).

Maintenant soit F fermé. Montrer que:
iv) L'homomorphisme canonique $\pi : E \to E/_F$ définie par $\pi(x) = [x]$ est continue, surjectif et ouvert. On a $||\pi||_{op} = 1$ si $F \neq E$.
v) $(E/_F, ||\cdot||_Q)$ est une espace de Banach si et seulement si E est complet.

Exercice 6

a) Montrer que si F est un sous espace fermé et G un sous espace de dimension finie de l'espace vectoriel normé E, alors $F+G$ est un sous espace fermé de E.

b) Montrer qu'un hyperplan d'un espace normé est soit fermé soit partout dense.

Exercice 7

Soient E un espace normé sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $x_1, \cdots, x_n \in E$ des vecteurs linéairement indépendants et $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{K}$. Montrer qu'il existe une application linéaire continue $f : E \to \mathbb{K}$ telle que $f(x_k) = a_k$ pour tout $k \in \{1, \cdots, n\}$.

Exercice 8

Soit ℓ^∞ l'espace des suites $a = (a_n)$ réelles ou complexes bornées muni avec la norme du supremum $||a||_\infty = \sup_n |a_n|$ et soit ℓ^p l'espace des suites $a = (a_n)$ telles que $||a||_p = (\sum_n |a_n|^p)^{1/p} < \infty$, $1 \leq p < \infty$.
Soit c (respectivement c_0) le sous espace vectoriel normé de l^∞ formé par les suites réelles convergentes (respectivement de limite 0). Montrer que:
(a) l^∞ est un espace de Banach non séparable.
(b) c est un espace de Banach séparable et c_0 un hyperplan fermé de c.
(c) l^1 est un espace de Banach séparable et un sous espace vectoriel, mais pas un sous espace normé, de l^∞.
(d) l^2 est isomorphe isométrique à l'un de ses hyperplans fermés.
(e) Déterminer explicitement la norme-quotient dans l'espace ℓ^∞/c_0.

Exercice 9

Montrer que:
(a) le dual topologique de l^1 est isomorphe isométrique l^∞.
(b) le dual topologique de c_0 est isomorphe isométrique l^1.

Exercice 10

Soit E un espace normé et E^* son dual topologique. Montrer que la séparabilité de E^* entraine celle de E mais que la réciproque n'est plus vraie.

Exercice 11

Démontrer que sur $\ell^\infty_{\mathbb{R}}$ il existe une forme linéaire continue L telle que pour tout élément $x = (\xi_k) \in \ell^\infty_{\mathbb{R}}$ on a $\liminf \xi_k \leq L(x) \leq \limsup \xi_k$ et que L est invariante par translation; i.e. $L(\xi_1, \xi_2, \ldots) = L(\xi_2, \xi_3, \ldots)$.
Indication On considère le sous espace

$$F = \{x = (\xi_k) \in \ell^\infty_{\mathbb{R}} \mid f(x) := \lim_n \tfrac{1}{n}(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n) \text{ existe } \}$$

et la forme linéaire $x \mapsto f(x)$ définie sur F.

Exercice 12

Montrer que chaque norme complète sur $C([0,1])$ pour laquelle les ensembles $\{f \in C([0,1]) : f(x_0) = 0\}$, $x_0 \in [0,1]$, sont fermés, est équivalente à la norme du supremum.

Exercice 13

Rappelons qu'un ensemble E est dit dénombrable, s'il existe une injection de E dans $\mathbb{N}$. Montrer qu'une base algébrique d'un espace de Banach est ou bien finie ou bien non-dénombrable.

Exercice 14

Soit $(E, \cdot)$ un espace normé, $f \in E^*$ non nulle, $\alpha \in \mathbb{K}$, et $H = \{x \in E : f(x) = \alpha\}$ un hyperplan (affine). Montrer que pour tout $x \in E$

$$d(x, H) = \frac{|f(x) - \alpha|}{||f||_{op}}$$

(formule de distance de Hesse.)

Exercice 15

Soit $A : l^\infty \to l^\infty$ l'application linéaire définie par $A(x_1, x_2, \cdots) = (x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \cdots)$, où $(x_n) \in l^\infty$. Montrer que:

(a) A est injective et continue avec $\|A\| = 1$, mais A n'est pas surjective.
(b) L'inverse $A^{-1} : A(l^\infty) \to l^\infty$ n'est pas continue.

Exercice 16

Soit $D : C^1([0,1]) \to C([0,1])$ l'opérateur différentiel défini par $Df = f'$.
(a) Montrer que $C^1([0,1])$, muni avec la norme $\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$, est un espace de Banach.
(b) Montrer que $D : \big(C^1([0,1], \|\cdot\|\big) \to \big(C([0,1], \|\cdot\|_\infty\big)$ est une application linéaire bornée, donc continue. Cependant, si on regarde $C^1([0,1])$ comme sous espace normé de $C([0,1])$, alors D n'est pas continue.

Exercice 17

Utiliser le théorème de Baire pour montrer l'existence de fonctions $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ qui ne sont différentiables dans aucun point de $[0,1]$.
Indication: Consider les ensembles

$$F_n = \{g \in C[0,1] : \exists t_0 \in [0,1] : \left|\frac{g(t_0+h) - g(t_0)}{h}\right| \leq n \ \forall h \text{ avec } 0 < t_0 + h < 1\}.$$

Exercice 18

Soient $||\cdot||_1$ et $||\cdot||_2$ deux normes sur un espace vectoriel E. Supposons qu'une forme linéaire f sur E est continue par rapport à $||\cdot||_1$ si et seulement si elle est continue par rapport à $||\cdot||_2$.
i) Montrer, en utilisant le théorème du graphe fermé, que l'identité $I : (E, ||\cdot||_1)^* \to (E, ||\cdot||_2)^*$ est une application linéaire continue.
ii) Déduire de i) que $||\cdot||_1$ est dominé par $||\cdot||_2$.
iii) Montrer finalement que les normes $||\cdot||_1$ et $||\cdot||_2$ sont équivalentes.