Laboratoire de Mathématiques
Université du Luxembourg

Prof. Dr. Raymond Mortini

année académique 2008-2009

Analyse fonctionnelle, S6

Exercice 15

Soit E un ensemble métrique compact. Montrer que E est séparable. En déduire que l'image d'un opérateur linéaire compact entre deux espaces normés est séparable.

Exercice 16

Soit $k(s,t)$ une fonction continue sur $[0,1] \times [0,1]$. Posons $E = (C[0,1], ||\cdot||_\infty)$. Montrer que l'opérateur de Fredholm $T : E \to E$ défini par

$$(Tf)(s) := \int_0^1 k(s,t) f(t)\, dt$$

est un opérateur linéaire compact.

Exercice 17

a) Soit $x = (x_n) \in \ell^p$, $1 \leq p < \infty$, et soit $a = (a_n) \in c_0$. Montrer que l'opérateur $T : \ell^p \to \ell^p$ définie par $Tx = a \cdot x := (a_j x_j)_j$ est un opérateur linéaire compact. Déterminer la norme de T et les spectres $\sigma_p(T)$ et $\sigma(T)$ de T.

b) Soit $a = (a_n) \in \ell^\infty$ une suite bornée de nombres complexes. On considère l'application $T_a : \ell^2 \to \ell^2$ définie par $T_a(x) = a \cdot x$, où pour $x = (x_n) \in \ell^2$ on a $a \cdot x = (a_n x_n)$.

c) Montrer que T_a est une application linéaire continue et déterminer sa norme $||T_a||_{op}$.
d) Chercher toutes les valeurs propres de T_a et déterminer le spectre de T_a.
e) Donner un exemple d'un vecteur $a \in \ell^\infty$, tel que T_a ne soit pas compact.
f) Montrer que chaque partie compacte K de $\mathbb{C}$ est le spectre d'un opérateur T sur ℓ^2.

Exercice 18

Soit E un espace de Banach et $T \in L(E)$. Soit $\sigma(T)$ le spectre de T,
$\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{K} : T - \lambda I \text{ non injective}\}$
$\sigma_c(T) = \{\lambda \in \mathbb{K} : T - \lambda I \text{ injective, non surjective, } \overline{R(T - \lambda I)} = E\}$
$\sigma_r(T) = \{\lambda \in \mathbb{K} : T - \lambda I \text{ injective, } \overline{R(T - \lambda I)} \neq E\}$.
$\sigma_{ap}(T) = \{\lambda \in \mathbb{K} : \exists (x_n) \in E^{\mathbb{N}} : ||x_n|| = 1, ||(T - \lambda I)x_n|| \to 0\}$.

a) Montrer que $\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T)$.
Quelles relations y a t'il entre $\sigma_{ap}(T)$ et les autres spectres ci-dessus?

b) Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes:

i) $\lambda \notin \sigma_{ap}(T)$,
ii) $\exists c > 0, \forall x \in E : ||(T - \lambda I)(x)|| \geq c||x||$,
iii) $\text{Ker}(T - \lambda I) = \{0\}$ et $R(T - \lambda I)$ fermé.

c) Montrer que $\partial\sigma(T) \subseteq \sigma_{ap}(T)$.

Exercice 19

a) Soit $E = C([0,1])$ et $T : E \to E$ l'opérateur de Volterra défini par

$$(Tf)(x) = \int_0^x f(t)\, dt, \quad f \in E, x \in [0,1].$$

Montrer que T est un opérateur linéaire compact. Déterminer $\sigma_p(T)$ et montrer que $\sigma(T) = \sigma_r(T) = \{0\}$. Calculer $\sigma_c(T)$ et $\sigma_{ap}(T)$.

b) Si $S = \{f \in C([0,1]) : f(0) = 0\}$, alors $\sigma(T|_S) = \sigma_c(T|_S) = \{0\}$. Déterminer aussi $\sigma_p(T|_S)$, $\sigma_r(T|_S)$ et $\sigma_{ap}(T|_S)$.

c) Soit

$$X = \{f : [0,1] \to \mathbb{K} : f \text{ borné}, f \text{ continue en } 0 \text{ et } 1, f(0) = 0\}.$$

Montrer que l'opérateur $T : X \to X$ défini par $(Tf)(x) = xf(x)$ est continue, que $\sigma_p(T) =]0,1[, \sigma_c(T) = \{0\}$ et $\sigma_r(T) = \{1\}$. Déterminer $\sigma(T)$ et $\sigma_{ap}(T)$.

Exercice 20

Soit $1 \leq p < \infty$. On définit le shift $S_p : \ell^p \to \ell^p$ par $S_p(x_1, x_2, \cdots) = (0, x_1, x_2, \cdots)$.

a) Montrer que $S_p \in L(\ell^p)$ et déterminer l'opérateur dual $T_q := (S_p)^*$ de S_p ainsi que $||T_q||_{op}$.
b) Montrer que $\sigma_p(S_p) = \emptyset$.
c) Déterminer les spectres $\sigma_p(T_q), \sigma_c(T_q), \sigma_r(T_q)$ et $\sigma(T_q)$. En déduire que $\sigma(S_p) = \overline{\mathbb{D}}$. Calculer $\sigma_r(S_p)$ et $\sigma_c(S_p)$.
c) Montrer que si $|\lambda| < 1$, alors $R(S_p - \lambda I)$ est fermé et $\operatorname{codim}(S_p - \lambda I) = 1$.
d) Montrer que $\sigma_{ap}(S_p) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.
e) Est-ce que $(S_p)^*$ est compact?
f) Soit $M(x_1, x_2, \cdots) = (x_1, x_2/2, x_3/3, \cdots)$. Est-ce que dans ℓ^p, $T = MS_p$ est compact? Calculer $\sigma_p(T)$ et $\sigma(T)$.

Exercice 21

Soit $h \in C(\mathbb{R})$ borné. Est-ce que l'opérateur $T : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ défini par $Tf = h \cdot f$ est continu respectivement compact? Quelle est la norme de T?

Exercice 22

Soit $X = L^2([0, 2\pi])$ et

$$(Tf)(s) = \int_0^{2\pi} \cos(s-t) f(t)\, dt, \quad f \in X.$$

a) Montrer que $(Tf)(s) = \int_0^{2\pi} f(s-t) \cos t \, dt$.
b) Montrer que T est continue et déterminer le rang (=dim $R(T)$) de T.
c) Est-ce que T est compact?
d) Déterminer les spectres $\sigma_p(T)$ et $\sigma(T)$. Chercher explicitement des vecteurs propres de T.

Exercice 23

Soit $E = C([0,1])$ et $T : E \to E$ défini par

$$Tf(x) = \int_0^{1-x} f(t)\, dt.$$

Montrer que T est compact et déterminer le spectre ainsi que les valeurs propres λ de T. Chercher les vecteurs propres associés à λ. Quelle est la dimension des sous-espaces propres de T?
Soit $E = (C([0,1]), ||\cdot||_\infty)$. Pour $f \in E$ et $x \in [0,1]$ on définit

$$T(f)(x) = \int_0^1 \min\{x, y\} f(y) dy.$$

a) Montrer que T est un opérateur linéaire compact et estimer sa norme.
b) Déterminer les valeurs propres λ_n de T et chercher des vecteurs propres associés à λ_n.
c) Déterminer le spectre $\sigma(T)$ de T.