

Laboratoire de Mathématiques
Université du Luxembourg

Prof. Dr. Raymond Mortini

année académique 2008-2009

Analyse fonctionnelle, S6

Exercice 1

Soient A un anneau commutatif unitaire, I un idéal propre de A et M une partie multiplicativement clos de A (i.e. $f, g \in M \implies f \cdot g \in M$) telle que $M \cap I = \emptyset$. Montrer avec l'aide du lemme de Zorn qu'il existe un idéal premier P de A tel que $I \subseteq P$ et $P \cap M = \emptyset$.

Exercice 2

Soit $n(x, y) = |\arctan x - \arctan y|$. Montrer que $n(\cdot, \cdot)$ est une distance sur \mathbb{R} . Est-ce que (\mathbb{R}, n) est un espace métrique complet? Est-ce que $n(x, y)$ définit une norme $\|\cdot\|$ sur \mathbb{R} telle que $\|x - y\| = n(x, y)$?

Exercice 3

Soit E l'espace $C_{\mathbb{R}}([0, 1])$ des fonctions continues à valeurs réelles sur $[0, 1]$. Montrer que $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| dx$ définit une norme non-complète sur E . Est-ce que $\|\cdot\|_1$ est équivalente à la norme $\|\cdot\|_{\infty}$?

Exercice 4

- (a) Montrer que sur chaque espace vectoriel $E \neq \{0\}$ il existe une norme non triviale.
- (b) Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach de dimension infinie. Montrer qu'il existe une infinité de normes $\|\cdot\|_n$ complètes sur E qui ne sont pas équivalentes deux à deux.

Indication: Si B est une base algébrique de E et $\varphi : B \rightarrow]0, \infty[$, on considère $\|x\|_{\varphi} := \|T_{\varphi}x\|$, $x \in E$, où $T_{\varphi} : E \rightarrow E$ est l'endomorphisme définie par: $T_{\varphi}b = \varphi(b)b, \forall b \in B$.

Exercice 5

- a) Montrer que si F est un sous espace fermé et G un sous espace de dimension finie de l'espace vectoriel normé E , alors $F + G$ est un sous espace fermé de E .
- b) Montrer qu'un hyperplan d'un espace normé est soit fermé soit partout dense.

Exercice 6

Soient E un espace normé sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , $x_1, \dots, x_n \in E$ des vecteurs linéairement indépendants et $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$. Montrer qu'il existe une application linéaire continue $f : E \rightarrow \mathbb{K}$ telle que $f(x_k) = a_k$ pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$.

Exercice 7

Soit ℓ^{∞} l'espace des suites $a = (a_n)$ réelles ou complexes bornées muni avec la norme du supremum $\|a\|_{\infty} = \sup_n |a_n|$ et soit ℓ^p l'espace des suites $a = (a_n)$ telles que $\|a\|_p = (\sum_n |a_n|^p)^{1/p} < \infty$, $1 \leq p < \infty$.

Soit c (respectivement c_0) le sous espace vectoriel normé de ℓ^{∞} formé par les suites réelles convergentes (respectivement de limite 0). Montrer que:

- (a) ℓ^{∞} est un espace de Banach non séparable.

- (b) c est un espace de Banach séparable et c_0 un hyperplan fermé de c .
 (c) l^1 est un espace de Banach séparable et un sous espace vectoriel, mais pas un sous espace normé, de l^∞ .
 (d) l^2 est isomorphe isométrique à l'un de ses hyperplans fermés.
 (e) Déterminer explicitement la norme-quotient dans l'espace l^∞/c_0 .

Exercice 8

Montrer que:

- (a) le dual topologique de l^1 est isomorphe isométrique l^∞ .
 (b) le dual topologique de c_0 est isomorphe isométrique l^1 .

Exercice 9

Soit E un espace normé et E^* son dual topologique. Montrer que la séparabilité de E^* entraîne celle de E mais que la réciproque n'est plus vraie.

Exercice 10

Démontrer que sur $\ell_{\mathbb{R}}^\infty$ il existe une forme linéaire continue L telle que pour tout élément $x = (\xi_k) \in \ell_{\mathbb{R}}^\infty$ on a $\liminf \xi_k \leq L(x) \leq \limsup \xi_k$ et que L est invariante par translation; i.e. $L(\xi_1, \xi_2, \dots) = L(\xi_2, \xi_3, \dots)$.

Indication On considère le sous espace

$$F = \{x = (\xi_k) \in \ell_{\mathbb{R}}^\infty \mid f(x) := \lim_n \frac{1}{n}(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n) \text{ existe} \}$$

et la forme linéaire $x \mapsto f(x)$ définie sur F .

Exercice 11

Montrer que chaque norme complète sur $C([0, 1])$ pour laquelle les ensembles $\{f \in C([0, 1]) : f(x_0) = 0\}$, $x_0 \in [0, 1]$, sont fermés, est équivalente à la norme du supremum.

Exercice 12

Rappelons qu'un ensemble E est dit dénombrable, s'il existe une injection de E dans \mathbb{N} . Montrer qu'une base algébrique d'un espace de Banach est ou bien finie ou bien non-dénombrable.

Exercice 13

Soit $A : l^\infty \rightarrow l^\infty$ l'application linéaire définie par $A(x_1, x_2, \dots) = (x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \dots)$, où $(x_n) \in l^\infty$. Montrer que:

- (a) A est injective et continue avec $\|A\| = 1$, mais A n'est pas surjective.
 (b) L'inverse $A^{-1} : A(l^\infty) \rightarrow l^\infty$ n'est pas continue.

Exercice 14

Soit $D : C^1([0, 1]) \rightarrow C([0, 1])$ l'opérateur différentiel défini par $Df = f'$.

- (a) Montrer que $C^1([0, 1])$, muni avec la norme $\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$, est un espace de Banach.
 (b) Montrer que $D : (C^1([0, 1]), \|\cdot\|) \rightarrow (C([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$ est une application linéaire bornée, donc continue. Cependant, si on regarde $C^1([0, 1])$ comme sous espace normé de $C([0, 1])$, alors D n'est pas continue.