Laboratoire de Mathématiques

Université du Luxembourg

.

Prof. Dr. Raymond Mortini

Examen d'analyse fonctionnelle, S6, 29.01.2010

Cours A (6) (les réponses sont à justifier)

Soit $E \neq \{0\}$ un espace normé sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $x_0 \in E$, $x_0 \neq 0$, $E' = \ell(E, \mathbb{K})$ le dual algébrique de E et E^* le dual topologique de E. Lesquelles des assertions suivantes sont correctes:

1. Il existe toujours une forme linéaire continue non nulle sur E,
2. Toutes les formes linéaires sur E sont continues,
3. Il existe toujours une forme linéaire discontinue en x_0,
4. Il existe une forme linéaire discontinue en x_0 mais continue en 0,
5. L'assertion $E^* \neq \emptyset$ dépend de ce que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$,
6. L'assertion $E^* \neq \{0\}$ dépend de ce que E est complet ou non.
7. Pour tout E on a que $E^* \subset E'$ et l'inclusion est stricte.
8. $f \in E'$ est continue s'il existe $C > 0$ tel que $|f(x)| \leq C$ pour tout $x \in E$.
9. Il existe $f \in E^*$ et des constantes $c, C > 0$ tel que $c||x|| \leq |f(x)| \leq C||x||$ pour tout $x \in E$.
10. Il existe $f \in E'$ tel que le noyau de f n'est pas fermé.
11. E^* est toujours un espace vectoriel de dimension finie.
12. ℓ^2 admet une base algébrique dénombrable.

Cours B (2)

Soit X un espace normé et $x \in X$. Déterminer

$$\sup\{|\langle x, x^* \rangle| \ : x^* \in E^*, ||x^*||_{\text{op}} = 1\}.$$

Exercice C (4)

Soient $||\cdot||_1$ et $||\cdot||_2$ deux normes sur un espace vectoriel E. Supposons qu'une forme linéaire f sur E est continue par rapport à $||\cdot||_1$ si et seulement si elle est continue par rapport à $||\cdot||_2$.
i) Montrer, en utilisant le théorème du graphe fermé, que l'identité $I : (E, ||\cdot||_1)^* \to (E, ||\cdot||_2)^*$ est une application linéaire continue.
ii) En utilisant la réponse à la question B, déduire de i) que $||\cdot||_1$ est dominé par $||\cdot||_2$.
iii) Montrer finalement que les normes $||\cdot||_1$ et $||\cdot||_2$ sont équivalentes.

Exercice D (3)

Soient E et F deux sous-espaces fermés d'un espace normé X. Montrer que $E \cap F = {}^{\perp}(E^{\perp} + F^{\perp})$.

Exercice E (7)

Soit X l'espace vectoriel des fonctions continues et 2π-périodiques sur $\mathbb{R}$.

1) Est-ce que X muni avec la norme $||f|| = \max_{0 \leq x \leq 2\pi} |f(x)|$ est une espace de Banach?
2) Soit

$$(Tf)(s) = \int_0^{2\pi} \cos(s - t) f(t) \, dt, \quad f \in X.$$

a) Montrer que $(Tf)(s) = \int_0^{2\pi} f(s - t) \cos t \, dt$.
b) Est-ce que T est continue?
c) Déterminer le rang (=dim $R(T)$) de T.
d) Est-ce que T est compact?
e) Déterminer les spectres $\sigma_p(T)$ et $\sigma(T)$. Chercher explicitement des vecteurs propres de T.