Laboratoire de Mathématiques

Université du Luxembourg

.

Prof. Dr. Raymond Mortini

Examen d'Analyse fonctionnelle, S6, 10.06.2009

Cours A (5)

Soit T un opérateur compact sur un espace de Banach E.
1) Sous quelles conditions $0 \in \sigma(T)$, où $\sigma(T)$ est le spectre de T?
2) Déterminer $\sigma(I)$, où I est l'identité sur E.
3) Est-ce que $T(E)$ est fermé? Quelle est la dimension de $T(E)$?
4) Mêmes questions pour $T - \lambda I$, où $\lambda \in \mathbb{C}$.

Cours B (5)

5) Soit X un espace normé. Déterminer $\sup\{|\langle x, x^* \rangle| \ : x^* \in E^*, ||x^*||_{op} = 1\}$.
6) Enoncer le théorème de l'image ouverte.
7) Enoncer et démontrer le théorème du graphe fermé.

Exercice C (5)

Soit B un espace de Banach. Montrer que dim$B$ est fini, si B possède une base algébrique dénombrable. Est-ce que ce résultat est vrai si B est un espace normé non complet?

Exercice D (5)

Soit $E = (C([0,1]), ||\cdot||_\infty)$. Pour $f \in E$ et $x \in [0,1]$ on définit

$$T(f)(x) = \int_0^1 \min\{x, y\} f(y) dy.$$

8) Montrer que T est un opérateur linéaire compact et estimer sa norme.
9) Déterminer les valeurs propres λ_n de T et chercher des vecteurs propres associés à λ_n.
10) Déterminer le spectre $\sigma(T)$ de T.

Exercice E (10)

Soit $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ et $\ell^2 = \{x = (x_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : ||x||^2 = \sum_{n=1}^\infty |x_n|^2 < \infty\}$.
11) Montrer que ℓ^2 est complet et séparable.
12) Soit $e_n = (0, \dots, 0, 1_n, 0 \dots)$. Est-ce que $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ est une base algébrique de ℓ^2?
13) Montrer que le dual topologique $(\ell^2)^*$ de ℓ^2 est isomorphe isométrique à ℓ^2.
14) Soit S un opérateur linéaire continu sur ℓ^2 tel que $S(e_n) = e_{n+1}, n \in \mathbb{N}$. ("forward shift"). Déterminer l'action de S sur $(a_n) \in \ell^2$ ainsi que l'opérateur dual S^* ("backward shift").
15) Montrer que S est une isométrie et déterminer la codimension de l'image $S(\ell^2)$. Calculer les normes $||S||_{op}$ et $||S^*||_{op}$. Est-ce que S^* est compact?
16) Déterminer les valeurs propres ainsi que les spectres de S et de S^*.