Laboratoire de Mathématiques
Université du Luxembourg

Prof. Dr. Raymond Mortini

année académique 2007-2008

Examen d'Analyse fonctionnelle, S6

Cours (1+3+4=8)

1) Donner l'énoncé de votre version favorite des théorèmes de Hahn-Banach.
2) Enoncer et démontrer le théorème du graphe fermé.
3) Enoncer le théorème de Riesz-Schauder et donner les définitions de tous les termes principales qui y apparaissent. Donner des exemples d'opérateurs linéaires compacts respectivement non compacts.

Exercice 1 (1+2+5=8)

Soit $(c_0, ||\cdot||_\infty)$ l'espace normé des suites $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ qui tendent vers 0 et soit $(\ell^1, ||\cdot||_1)$ l'espace de Banach des suites sommables dans $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

(a) Montrer que c_0 est fermé dans ℓ^∞. En déduire que c_0 est un espace de Banach.

(b) Soit $e_j = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{j^{\text{me}}-\text{terme}}, 0, \dots)$. Montrer que l'espace vectoriel engendré par les $e_j, j = 1, 2, \cdots$ est dense dans c_0. Est-ce que c_0 est séparable?

(c) Montrer que le dual topologique de c_0 est isomorphe isométrique à ℓ^1.

Exercice 2 (4)

Soit $E = (C([0,1]), ||\cdot||_\infty)$. Pour $f \in E$ et $x \in [0,1]$ on définit

$$T(f)(x) = \int_0^1 \min\{x, y\} f(y) dy.$$

a) Montrer que T est un opérateur linéaire compact et estimer sa norme.
b) Déterminer les valeurs propres λ_n de T et chercher des vecteurs propres associés à λ_n.
c) Déterminer le spectre $\sigma(T)$ de T.