Laboratoire de Mathématiques
Université du Luxembourg

Prof. Dr. Raymond Mortini

année académique 2008-2009, session janvier

Examen d'Analyse fonctionnelle, S6, 16.02.2009

Cours (5)

a) Enoncer et démontrer le théorème de Baire.
b) Enoncer un des théorèmes de Banach-Steinhaus.

Exercice 1 (5)

Soit $F = \{(x_j) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : x_j = 0 \text{ pour presque tous les } j\}$ l'espace normé des suites finies muni avec la norme du supremum.

a) Est ce que F est complet?

b) Montrer que l'opérateur A définie par

$$A(x_1, x_2, \cdots, x_n, 0, \cdots) := (x_1, 2x_2, \cdots, nx_n, 0, \cdots),\ n \in \mathbb{N}$$

est limite simple d'une suite d'applications linéaires continues, mais que A est discontinue en chaque point.

c) Pourquoi cet exemple n'est pas en contradiction avec la 2me version du théorème de Banach-Steinhaus?

Exercice 2 (5)

Soit $a = (a_n) \in \ell^\infty$ une suite bornée de nombres complexes. On considère l'application $T_a : \ell^2 \to \ell^2$ définie par $T_a(x) = a \cdot x$, où pour $x = (x_n) \in \ell^2$ on a $a \cdot x = (a_n x_n)$.

a) Montrer que T_a est une application linéaire continue et déterminer sa norme $||T_a||_{op}$.
b) Chercher toutes les valeurs propres de T_a et déterminer le spectre de T_a.
c) Donner un exemple d'un vecteur $a \in \ell^\infty$, tel que T_a ne soit pas compact.
d) Montrer que chaque partie compacte K de $\mathbb{C}$ est le spectre d'un opérateur T sur ℓ^2.

Exercice 3 (5)

Soit $E = C([0, 1])$ et $T : E \to E$ défini par

$$Tf(x) = \int_0^{1-x} f(t)\, dt.$$

Montrer que T est compact et déterminer le spectre ainsi que les valeurs propres λ de T. Chercher les vecteurs propres associés à λ. Quelle est la dimension des sous-espaces propres de T?