Université de Lorraine, Metz
Département de Mathématiques
Prof. Raymond Mortini

Année Universitaire 2015/2016
mercredi, le 29 juin, 12.45-15.45 h

(22= $\boxed{1+3}$ + $\boxed{1+1}$ + $\boxed{1+1}$ + $\boxed{2+2}$ + $\boxed{1+3}$ + $\boxed{2+4}$)

Examen d'Analyse complexe, 2^{me} session L3

1) Quel est le rayon de convergence de $f(z)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\Big(1-\frac{e}{n^2}\Big)^n e^{-n^2}\ z^{n^3}$

0	1	∞	e^{-1}	e	rien de cela

2) Soit $f(z)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\big(n(n-1)+e^{-n}\big)z^n$. Quel est le rayon de convergence de cette série?

0	1	∞	e^{-1}	e	rien de cela

Quel est la valeur de la série?

$z+\frac{e}{e-z}$	$\frac{z}{(1-z)^2}-\frac{e}{e-z}$	$\frac{z}{(1-z)^2}$	$\frac{2z^2}{(1-z)^2}+\frac{e}{e-z}$	$\frac{2z^2}{(1-z)^3}+\frac{e}{e-z}$	$\frac{2z^3}{(1-z)^2}+\frac{e}{e-z}$	rien de cela

3) Déterminer **des** points pour lesquels la fonction $f(z)=z-\overline{z}\ \mathrm{Re}\ z$ est $\mathbb{C}$-différentiable.

$\{0\}$	$\{1\}$	$\{-1,1\}$	$\{i,0\}$	droite réelle	droite imaginaire

4) Cherchez **des** solutions de $z^3+\overline{z}=0$.

0	-1	-1 et 1	$\frac{1}{\sqrt{2}}(1\pm i)$	$\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})$	rien de cela

5) Soit $q(z)=(z-3)(z-2)$. Quelle est la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{\exp q(z)}{q(z)}\,dz$?

$2\pi i$	0	$-2\pi i$	$2\pi ie$	$6\pi i$	1	rien de cela

6) Soit $f(z)=e^{-1/z^2}$. Quelle est la valeur de l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} z^2\ \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz?$$

0	1	-1	2	3	n'existe pas	rien de cela

7)Quelle est la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\cos x}{3+\sin x}\,dx$?

π^2	$\pi^2-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}\,\pi$	4	-1	rien de cela

8) Soit $P(z)=z^7-5z+2$. Alors le nombre de zéros de P dans la couronne $\{z\in\mathbb{C}: 1<|z|<2\}$ est:

0	2	3	5	6	7	rien de cela

9) Déterminer le domaine d'holomorphie de $f(z) = \exp\left(-\frac{1}{\sin \pi/z}\right)$ et indiquer la nature des singularités isolées.

10) Soit $f(z) = z(z-1)\frac{e^{\sin z}}{\sin \pi z}$.

Cochez les domaines où f est développable en série de Laurent, respectivement série de Maclaurin/série entière et esquisser ces domaines:

	Laurent	MacLaurin
$\{z \in \mathbb{C} : \lvert z\rvert < 1\}$		
$\{z \in \mathbb{C} : 1 < \lvert z\rvert < 3/2\}$		
$\{z \in \mathbb{C} : 0 < \lvert z+1\rvert < 1\}$		
$\{z \in \mathbb{C} : \lvert z-1\rvert < 1\}$		
$\{z \in \mathbb{C} : \lvert z-i\rvert < 4/3\}$		

11) Quel est l'image de $\{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Im}\, z| < \pi/2\}$ respectivement $\{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Im}\, z| < \pi \text{ et } \mathrm{Re}\, z < 0\}$ par l'application e^z? Esquisser ces domaines.

12) Trouver une application conforme de $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ sur le domaine

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Re}\, z| < 1\} \cap \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\, z > -1\}.$$

Esquisser ces domaines.