Université de Lorraine, Metz
Département de Mathématiques
Prof. Raymond Mortini

Année Universitaire 2015/2016
mercredi, le 29 juin, 12.45-15.45 h
(22= $\boxed{1+3}$ + $\boxed{1+1}$ + $\boxed{1+1}$ + $\boxed{2+2}$ + $\boxed{1+3}$ + $\boxed{2+4}$)

Examen d'Analyse complexe, 2^{me} session L3

1) Quel est le rayon de convergence de $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{e}{n^2}\right)^n e^{-n^2} \, z^{n^3}$

0	1	∞	e^{-1}	e	rien de cela

$$\left[\left(1 - \frac{e}{n^2}\right)^n e^{-n^2}\right]^{1/n^3} = \left(1 - \frac{e}{n^2}\right)^{1/n^2} e^{-1/n} \to 1$$

2) Soit $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(n(n-1) + e^{-n}\right) z^n$. Quel est le rayon de convergence de cette série?

0	1	∞	e^{-1}	e	rien de cela

$$n(n-1) + e^{-n} \sim n^2 \Longrightarrow R = 1$$

Quel est la valeur de la série?

$z + \frac{e}{e-z}$	$\frac{z}{(1-z)^2} - \frac{e}{e-z}$	$\frac{z}{(1-z)^2}$	$\frac{2z^2}{(1-z)^2} + \frac{e}{e-z}$	$\frac{2z^2}{(1-z)^3} + \frac{e}{e-z}$	$\frac{2z^3}{(1-z)^2} + \frac{e}{e-z}$	rien de cela

Pour $|z| < 1 \leq e$ on a:

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n} z^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{e}\right)^n = \frac{z}{e} \frac{1}{1 - \frac{z}{e}} = \frac{z}{e - z}$$

Pour $|z| < 1$ on a aussi:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)z^n = z^2 \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)z^{n-2} = z^2 \sum_{n=1}^{\infty} (z^n)'' = z^2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} z^n\right)'' = z^2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)''$$

$$= z^2 \left(\frac{1}{1-z}\right)'' = z^2 \frac{2}{(1-z)^3}$$

3) Déterminer **des** points pour lesquels la fonction $f(z) = z - \overline{z} \,\mathrm{Re}\, z$ est $\mathbb{C}$-différentiable.

$\{0\}$	$\{1\}$	$\{-1, 1\}$	$\{i, 0\}$	droite réelle	droite imaginaire

$$f(z) = z - \overline{z}\left(\frac{z + \overline{z}}{2}\right) = z - \frac{1}{2} z\overline{z} - \frac{1}{2}\overline{z}^2$$

$$\overline{\partial} f(z) = f_{\overline{z}}(z) = -\frac{z}{2} - \overline{z} = -(\frac{x}{2} + x) - i\frac{y}{2} + iy \stackrel{!}{=} 0 \Longleftrightarrow x = y = 0 \Longleftrightarrow z = 0.$$

ou

$$f(z) = x + iy - (x - iy)x = x - x^2 + i(y + xy) = u + iv$$

$$u_x = 1-2x \quad u_y = 0 \quad v_x = y \quad v_y = 1+x \quad CR: u_x = v_y \quad u_y = -u_x$$
$$1-2x = 1+x \iff x = 0 \text{ et } 0 = y \iff x = y = 0$$

4) Cherchez **des** solutions de $z^3 + \overline{z} = 0$.

voir TD; là on avait déterminé toutes les solutions.

0	-1	-1 et 1	$\frac{1}{\sqrt{2}}(1 \pm i)$	$\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})$	rien de cela

5) Soit $q(z) = (z-3)(z-2)$. Quelle est la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{\exp q(z)}{q(z)}\, dz$?

$2\pi i$	0	$-2\pi i$	$2\pi i e$	$6\pi i$	1	rien de cela

Soit $f(z) = e^{q(z)}/q(z)$. Deux pôles simples: 2 et 3; f est donc holomorphe dans le disque de rayon 1.5 (p.ex). Ainsi, d'après Cauchy: $\int_{|z|=1} f(z)dz = 0$

6) Soit $f(z) = e^{-1/z^2}$. Quelle est la valeur de l'intégrale

$$I := \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} z^2 \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz?$$

0	1	-1	2	3	n'existe pas	rien de cela

$$\left(e^{-1/z^2}\right)' = e^{-1/z^2} 2z^{-3} \Longrightarrow I = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} z^2 \frac{2}{z^3} dz = 2.$$

7)Quelle est la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos x}{3+\sin x}\, dx$?

π^2	$\pi^2 - \sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}\,\pi$	4	-1	rien de cela

Comme $\cos x = (3+\sin x)'$ on a $\int_0^{2\pi} \frac{\cos x}{3+\sin x}\, dx = \log(3+\sin x)\Big|_0^{2\pi} = 0.$

8) Soit $P(z) = z^7 - 5z + 2$. Alors le nombre de zéros de P dans

la couronne $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$ est:

Voir TD

0	2	3	5	6	7	rien de cela

9) Déterminer le domaine d'holomorphie D de $f(z) = \exp\left(-\frac{1}{\sin \pi/z}\right)$ et indiquer la nature des singularités isolées.

$D = \mathbb{C} \setminus \{0, 1/k : k \in \mathbb{Z}^*\}$. On a des singularités isolées essentielles en chaque $1/k$, $k \in \mathbb{Z}^*$. Le point 0 n'est pas une singularité isolée; c'est un point d'accumulation de singularités isolées.

10) Soit $f(z) = z(z-1)\dfrac{e^{\sin z}}{\sin \pi z}$.

pôles simples en k, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0,1\}$. Singularité isolée artificielle en 0 et 1.

Cochez les domaines où f est développable en série de Laurent, respectivement série de Maclaurin/série entière et esquisser ces domaines:

	Laurent	MacLaurin
$\{z \in \mathbb{C} : \|z\| < 1\}$	×	×
$\{z \in \mathbb{C} : 1 < \|z\| < 3/2\}$	×	
$\{z \in \mathbb{C} : 0 < \|z+1\| < 1\}$	×	
$\{z \in \mathbb{C} : \|z-1\| < 1\}$	×	×
$\{z \in \mathbb{C} : \|z-i\| < 4/3\}$	×	×

Du à un manque du temps, les questions suivantes n'ont pas été traitées cette année 2017.

11) Quel est l'image de $\{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Im}\, z| < \pi/2\}$ respectivement $\{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Im}\, z| < \pi \text{ et } \mathrm{Re}\, z < 0\}$ par l'application e^z? Esquisser ces domaines.

12) Trouver une application conforme de $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ sur le domaine

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Re}\, z| < 1\} \cap \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\, z > -1\}.$$

Esquisser ces domaines.