Université de Lorraine, Metz
Département de Mathématiques

Prof. Raymond Mortini

Année Universitaire 2015/2016
mardi, le 31 mai, 8.30-11.30 h

(30=3+2+4+2+2+2+4+3+2+2+2+2)

Examen d'Analyse complexe L3

1) Calculer le rayon de convergence de $f(z) = \sum_{n=2}^{\infty} (n^2 - \frac{1}{n!}) z^{n+1}$ et déterminer explicitement f.

---

2) Déterminer tous les points pour lesquels la fonction $f(z) = \overline{z} - z \,\mathrm{Im}\, z$ est $\mathbb{C}$-différentiable.

---

3) Résoudre les équations $\overline{z}z^2 + 1 = 0$ et $z^2 - z - i + 1 = 0$.

---

4) Développer la fonction $H(z) = \sinh z - \sin z$ en série de MacLaurin.

---

5) Soit $q(z) = z(z-1)(z-2)$. Calculer l'intégrale $\int_{|z|=r} \frac{\exp q(z)}{q(z)}\, dz,\ 0 < r < \frac{3}{2}, r \neq 1.$

---

6) Soit $f(z) = \frac{(\sin(\pi z))^2}{z^2(z-1)^9}$. Calculer l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=3/2} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz.$$

---

7) Calculer les intégrales suivantes, où $\Gamma(R)$ est le bord du demi-disque

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R, \mathrm{Im}\, z \geq 0\},\ \ R > 1$$

$$\text{i)} \int_{\Gamma(R)} \frac{z^2+1}{z^4+1} dz \quad \text{et} \quad \text{ii)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1} dx.$$

---

8) Soit $p(z) = \frac{1}{2}z^6 + 9z^3 + 13z - 1$. Déterminer le nombre de zéros de p dans la couronne $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$ et dans l'extérieur du disque de centre 0 et de rayon 2.

---

9) Déterminer le domaine d'holomorphie de $f(z) = \frac{z}{\sin(\pi/z)}$ et indiquer la nature des singularités isolées. Calculer les résidus $\mathrm{Res}(f, 1)$ et $\mathrm{Res}(f, 3)$.

---

10) Est-ce qu'il existe une fonction holomorphe $f \in H(\mathbb{C})$, resp. $f \in H(\mathbb{C} \setminus \{0\})$, telle que $f(n) = f(2/n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$?

---

11) Soit $A = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-2| < 1\}$. Développer la fonction $f(z) = (z-1)^{-1}$ en série de Laurent dans A. Est-ce que f est développable en série de Maclaurin dans le disque $B := \{z \in \mathbb{C} : |z-2| < 1\}$? Dans $B' = \{z \in \mathbb{C} : |z-2| < 2\}$?

---

12) Trouver une application conforme de $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ sur

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, \pi/4 < \arg z < 9\pi/4\}.$$

Esquisser ces domaines.
