Ex 0 Hypothèse $I \cap M = \emptyset$ AF-S6-UL

Considérons $\mathcal{S} = \{ J \subseteq A ; J$ idéal, $I \subseteq J$, $J \cap M = \emptyset \}$

$\mathcal{S} \neq \emptyset$ car $I \in \mathcal{S}$. Mq $\mathcal{S}$ admet un élt maximal pour "$\subseteq$" :

Soit $\mathcal{K}$ une chaîne dans $\mathcal{S}$; alors $\left(\bigcup_{K \in \mathcal{K}} K\right) \cap M = \emptyset$ (car $K \cap M = \emptyset$ $\forall k \in \mathcal{K}$) ; en plus $I \subseteq \bigcup_{k \in \mathcal{K}} k$.

Finalement, $\bigcup_{k \in \mathcal{K}} K$ est un idéal :

. $x, y \in \bigcup_{k \in \mathcal{K}} K \Rightarrow \exists k_x$ tq $x \in K_x$ et $\exists k_y$ tq $y \in k_y$; $\mathcal{K}$ totalement ordonné $\Rightarrow K_x \subseteq k_y$ ou $k_y \subseteq k_x$; s.p.g $K_x \subseteq k_y$; Alors $x, y \in k_y$, k_y idéal $\Rightarrow x + y \in k_y$.

. $x \in \bigcup_{K \in \mathcal{K}} K$ et $p \in A \Rightarrow p.x \in K_x \subseteq \bigcup_{k \in \mathcal{K}} k$

Zorn : $\mathcal{S}$ admet élt maximal $\mathcal{P}$.

Donc en particulier, $\mathcal{P}$ est un idéal dans A tq $\mathcal{P} \cap M = \emptyset$. Mq $\mathcal{P}$ est premier :

$g_1, g_2 \in A$, $g_1 g_2 \in \mathcal{P}$. Supposons que ni g_1, ni g_2 est dans $\mathcal{P}$; alors l'idéal engendré par $\mathcal{P}$ et g_1 coupe M, de même pour $(\mathcal{P}, g_2)$.

Donc : $\exists m_j \in M$ tq $p_j + h_j g_j = m_j$ pour certains $p_j \in \mathcal{P}$ et $h_j \in A$ $(j = 1, 2)$

Ainsi $\overbrace{m_1 m_2}^{\in M} = (p_1 + h_1 g_1)(p_2 + h_2 g_2)$

$= \underbrace{p_1 p_2}_{\in \mathcal{P}} + \underbrace{p_2 h_1 g_1}_{\in \mathcal{P}} + \underbrace{h_2 g_2 p_1}_{\in \mathcal{P}} + \underbrace{h_1 h_2 g_1 g_2}_{\in \mathcal{P}} \in \mathcal{P}$

$\Rightarrow \mathcal{P} \cap M \neq \emptyset$ ↯.

Ex 1 . $\|f\|_1$ est une norme car $\|f\|_1 \geq 0$,

$\|f\|_1 = 0 \Rightarrow \int_0^1 |f(t)|\,dt = 0 \Rightarrow f \equiv 0$

f continue

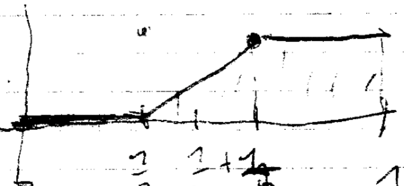
Sinon : $\exists$ intervalle $I \subset [0,1]$ tq $|f| \geq \delta$ sur I

$\Rightarrow \|f\|_1 \geq \int_I |f(x)|\,dx \geq \delta |I| > 0$

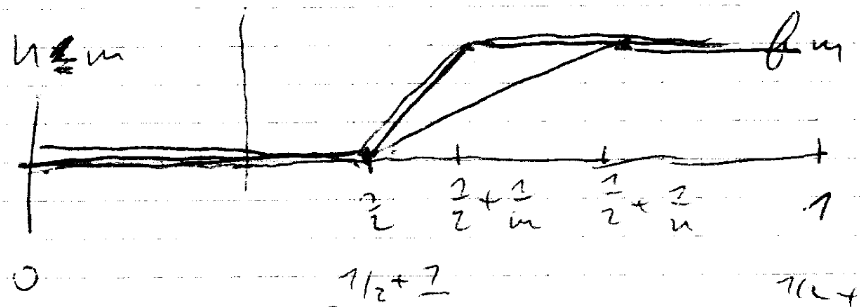
$\|f+g\|_1 = \int |f+g| \leq \int |f| + \int |g| = \|f\|_1 + \|g\|_1$.

$\|f\|_1$ n'est pas une norme complète :

Soit f_n :



$= \begin{cases} 0 \text{ sur } [0, \frac{1}{2}] \\ 1 \text{ sur } [\frac{1}{2}+\frac{1}{n}, 1] \\ \text{linéaire affine sur } [\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+\frac{1}{n}] \end{cases}$



$\int |f_n - f_m| = \int_{\frac{1}{2}}^{1/2+\frac{1}{n}} |f_n - f_m| \leq \int_{\frac{1}{2}}^{1/2+\frac{1}{n}} (1+1)\,dt = \frac{2}{n} \to 0$

$\Rightarrow (f_n)$ Cauchy dans E

Mais (f_n) ne converge pas vers une fct continue en norme $\|\cdot\|_1$; en effet supp $\exists f \in E$

tq : $\|f - f_n\|_1 \to 0 \Rightarrow \int_0^1 |f - f_n| \to 0$

$\Rightarrow \int_0^{1/2} |f - 0|\,dt \underset{\equiv 0}{\cancel{\quad}}$ et $\int_{1/2+1/n}^1 |f - 1| \to 0$

$\Rightarrow f \equiv 0$ on $[0, \frac{1}{2}[$ et $f \equiv 1$ on $]\frac{1}{2}+\frac{1}{n}, 1]$ $\forall n$

$\Rightarrow \lim_{t \to 1/2^-} f(t) = 0$ et $\lim_{t \to 1/2^+} f(t) = 1$ $\Rightarrow f$ discont.