Aufgabe Q68, EMS Newsletter 25 (1997), 27.

Q.68 *A function f satisfies the equation $f(x+1)+f(x-1)=\sqrt{2}\cdot f(x)$ for all real x. Prove that this function is periodic.*

First Solution (Raymond Mortini, Luxembourg, Université de Metz, Département de Mathématiques)

–Ed. *It is the first time that I received a submission in German language, and astoundingly it came to me from France. The overtures of friendship between Germans and Frenchmen aforementioned appear to work. So, it is fortunate that Mathematics can amplify such advances; hence this solution is presented true to the original.*

Behauptung. Es sei f eine Funktion auf $\mathbb{R}$ welche der Bedeinung genügt:

$$f(x+1)+f(x-1)=\sqrt{2}f(x)$$

Dann hat f die Periode 8.

Beweis. Es sei $x\in\mathbb{R}$ beliebig aber fest gewählt. Dan ergeben sich aus der Voraussetzung die folgenden Gleichungen:

$$f(x+8)=\sqrt{2}f(x+7)-f(x+6)=\sqrt{2}[-f(x+5)+\sqrt{2}f(x+6)]-f(x+6)=-\sqrt{2}f(x+5)+f(x+6)=-f(x+4).$$

Damit ergibt sich sofort die Behauptung $f(x+8)=-f(x+4)=-(-f(x))=f(x)$.

Bemerkung. Alle Lösungen der obigen Funktionalgleichung haben die Form

$$f(x+n)=r(x)\cdot sin(\theta(x)+n\cdot\tfrac{\pi}{4})\text{ für }x\in[0,1[,\quad n\in\mathbb{Z},$$

wobei $r(x)>0$ und $\theta(x)$ beliebige Funktionen sind. ■

Also solved by Dr. J N Lillington.