Aufgabe 901. Die Funktion $f:\{z\in\mathbf{C};|z|=1\}\to\{z\in\mathbf{C};|z|\le 1\}$ sei holomorph und es sei $f(0)=0$. Dann trifft genau eine der beiden folgenden Aussagen zu:

$$\left|\int_{-1}^{1} f(x)\,dx\right| < 2/3. \tag{1}$$

Es gibt eine Konstante $\alpha\in\mathbf{C}$ mit $|\alpha|=1$ derart, dass

$$f(z)=\alpha z^2. \tag{2}$$

Dies ist zu zeigen.

P. von Siebenthal, Zürich

Weitere Lösungen sandten P. Bundschuh (Köln, BRD), L. Cseh (Odorheiu-Secuiesc, Rumänien), W. Hensgen (München), Kee-wai Lau (Hongkong), I. Merényi (Cluj-Napoca, Rumänien), Chr. A. Meyer (Berlin). Eine Beweisskizze sandte Hj. Stocker (Wädenswil).

Lösung: Es sei $\mathbf{D}$ die offene Einheitskreisscheibe, also $\mathbf{D} = \{z \in \mathbf{C}: |z| < 1\}$. Zunächst zerlegen wir die Funktion f in den geraden Anteil w und den ungeraden Anteil v, also

$$f(z) = w(z) + v(z), \tag{3}$$

mit

$$w(z) = \frac{1}{2}\left(f(z) + f(-z)\right) \quad \text{und} \quad v(z) = \frac{1}{2}\left(f(z) - f(-z)\right).$$

Aus den Voraussetzungen über f folgt, dass w die Form

$$w(z) = z^2 g(z)$$

hat, wobei die Funktion g holomorph in $\mathbf{D}$ und $|g(z)| \leqslant 1$ für jedes $z \in \mathbf{D}$ ist.

1. Fall. $|g(z)| < 1$ für jedes $z \in \mathbf{D}$.
Da die Funktion v ungerade ist, ist das Integral $\int_{-1}^{+1} v(x)\,dx = 0$. Daher ergibt sich sofort die gewünschte Ungleichung:

$$\left|\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx\right| = \left|\int_{-1}^{+1} w(x)\,dx\right| \leqslant \int_{-1}^{+1} |x^2 g(x)|\,dx < \int_{-1}^{+1} x^2\,dx = \frac{2}{3}.$$

2. Fall. $|g(z_0)| = 1$ für ein $z_0 \in \mathbf{D}$.
Nach dem Maximumprinzip ist demnach $|g(z)| = 1$ für jedes $z \in \mathbf{D}$, also $g(z) \equiv \text{const} = \alpha$ mit $|\alpha| = 1$.
Die Funktion f lässt sich daher nach (3) in der Form

$$f(z) = \alpha z^2 + v(z)$$

darstellen.
Beachtet man, dass v ungerade ist, so gilt für jedes $z \in \mathbf{D}$.

$$|\alpha z^2 + v(z)| = |f(z)| \leqslant 1$$
$$|\alpha z^2 - v(z)| = |f(-z)| \leqslant 1.$$

Quadrieren und Addition ergibt wegen $|\alpha| = 1$:

$$|z|^4 + |v(z)|^2 \leqslant 1 \qquad (z \in \mathbf{D}). \tag{4}$$

Die Ungleichung (4) impliziert jedoch, dass $v(z)$ gleichmässig gegen Null geht, falls z gegen den Rand von $\mathbf{D}$ strebt. Nach dem Maximumprinzip ist also v identisch Null. Somit hat f die Gestalt

$$f(z) = \alpha z^2,$$

mit $|\alpha| = 1$.

R. Mortini, Karlsruhe, BRD