

# Laboratoire de Mathématiques

## Université du Luxembourg

Prof. Dr. Raymond Mortini

année académique 2007-2008

### Analyse fonctionnelle, S6

#### Exercice 14

Soit  $E$  un ensemble métrique compact. Montrer que  $E$  est séparable. En déduire que l'image d'un opérateur linéaire compact entre deux espaces normés est séparable.

#### Exercice 15

Soit  $k(s, t)$  une fonction continue sur  $[0, 1] \times [0, 1]$ . Posons  $E = (C[0, 1], \|\cdot\|_\infty)$ . Montrer que l'opérateur de Fredholm  $T : E \rightarrow E$  défini par

$$(Tf)(s) := \int_0^1 k(s, t)f(t) dt$$

est un opérateur linéaire compact.

#### Exercice 16

a) Soit  $x = (x_n) \in \ell^p$ ,  $1 \leq p < \infty$ , et soit  $a = (a_n) \in c_0$ . Montrer que l'opérateur  $T : \ell^p \rightarrow \ell^p$  définie par  $Tx = a \cdot x := (a_j x_j)_j$  est un opérateur linéaire compact. Déterminer la norme de  $T$  et les spectres  $\sigma_p(T)$  et  $\sigma(T)$  de  $T$ .

b) Soit  $h \in C(\mathbb{R})$  borné. Est-ce que l'opérateur  $T : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$  défini par  $Tf = h \cdot f$  est continu respectivement compact? Quelle est la norme de  $T$ ?

#### Exercice 17

Soit  $E$  un espace de Banach et  $T \in L(E)$ . Soit  $\sigma(T)$  le spectre de  $T$ ,

$$\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{K} : T - \lambda I \text{ non injective}\}$$

$$\sigma_c(T) = \{\lambda \in \mathbb{K} : T - \lambda I \text{ injective, non surjective, } \overline{R(T - \lambda I)} = E\}$$

$$\sigma_r(T) = \{\lambda \in \mathbb{K} : T - \lambda I \text{ injective, } R(T - \lambda I) \neq E\}.$$

$$\sigma_{ap}(T) = \{\lambda \in \mathbb{K} : \wedge (x_n) \in E^{\mathbb{N}} : \|x_n\| = 1, \|(T - \lambda I)x_n\| \rightarrow 0\}.$$

a) Montrer que  $\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T)$ .

Quelles relations y a-t'il entre  $\sigma_{ap}(T)$  et les autres spectres ci-dessus?

b) Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes:

i)  $\lambda \notin \sigma_{ap}(T)$ ,

ii)  $\wedge c > 0, \forall x \in E : \|(T - \lambda I)(x)\| \geq c\|x\|$ ,

iii)  $\text{Ker}(T - \lambda I) = \{0\}$  et  $R(T - \lambda I)$  fermé.

c) Montrer que  $\partial\sigma(T) \subseteq \sigma_{ap}(T)$ .

**Exercice 18**

a) Soit  $E = C([0, 1])$  et  $T : E \rightarrow E$  l'opérateur de Volterra défini par

$$(Tf)(x) = \int_0^x f(t) dt, \quad f \in E, x \in [0, 1].$$

Montrer que  $T$  est un opérateur linéaire compact. Déterminer  $\sigma_p(T)$  et montrer que  $\sigma(T) = \sigma_r(T) = \{0\}$ . Calculer  $\sigma_c(T)$  et  $\sigma_{ap}(T)$ .

b) Si  $S = \{f \in C([0, 1]) : f(0) = 0\}$ , alors  $\sigma(T|_S) = \sigma_c(T|_S) = \{0\}$ . Déterminer aussi  $\sigma_p(T|_S)$ ,  $\sigma_r(T|_S)$  et  $\sigma_{ap}(T|_S)$ .

c) Soit

$$X = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{K} : f \text{ borné, } f \text{ continue en } 0 \text{ et } 1, f(0) = 0\}.$$

Montrer que l'opérateur  $T : X \rightarrow X$  défini par  $(Tf)(x) = xf(x)$  est continue, que  $\sigma_p(T) = ]0, 1[$ ,  $\sigma_c(T) = \{0\}$  et  $\sigma_r(T) = \{1\}$ . Déterminer  $\sigma(T)$  et  $\sigma_{ap}(T)$ .

**Exercice 19**

Soit  $1 \leq p < \infty$ . On définit le shift  $S_p : \ell^p \rightarrow \ell^p$  par  $S_p(x_1, x_2, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots)$ .

a) Montrer que  $S_p \in L(\ell^p)$  et déterminer l'opérateur dual  $T_q := (S_p)^*$  de  $S_p$  ainsi que  $\|T_q\|_{op}$ .

b) Montrer que  $\sigma_p(S_p) = \emptyset$ .

c) Déterminer les spectres  $\sigma_p(T_q)$ ,  $\sigma_c(T_q)$ ,  $\sigma_r(T_q)$  et  $\sigma(T_q)$ . En déduire que  $\sigma(S_p) = \overline{\mathbb{D}}$ . Calculer  $\sigma_r(S_p)$  et  $\sigma_c(S_p)$ .

c) Montrer que si  $|\lambda| < 1$ , alors  $R(S_p - \lambda I)$  est fermé et  $\text{codim}(S_p - \lambda I) = 1$ .

d) Montrer que  $\sigma_{ap}(S_p) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ .

e) Est-ce que  $(S_p)^*$  est compact?

f) Soit  $M(x_1, x_2, \dots) = (x_1, x_2/2, x_3/3, \dots)$ . Est-ce que dans  $\ell^p$ ,  $T = MS_p$  est compact? Calculer  $\sigma_p(T)$  et  $\sigma(T)$ .

**Exercice 20**

Soit  $X = L^2([0, 2\pi])$  et

$$(Tf)(s) = \int_0^{2\pi} \cos(s-t)f(t) dt, \quad f \in X.$$

a) Montrer que  $(Tf)(s) = \int_0^{2\pi} f(s-t) \cos t dt$ .

b) Montrer que  $T$  est continue et déterminer le rang ( $= \dim R(T)$ ) de  $T$ .

c) Est-ce que  $T$  est compact?

d) Déterminer les spectres  $\sigma_p(T)$  et  $\sigma(T)$ . Chercher explicitement des vecteurs propres de  $T$ .

**Exercice 21**

Soit  $E = C([0, 1])$  et  $T : E \rightarrow E$  défini par

$$Tf(x) = \int_0^{1-x} f(t) dt.$$

Montrer que  $T$  est compact et déterminer le spectre ainsi que les valeurs propres  $\lambda$  de  $T$ . Chercher les vecteurs propres associés à  $\lambda$ . Quelle est la dimension des sous-espaces propres de  $T$ ?