

Prof. Raymond Mortini

Examen 1 **analyse complexe**

Documents autorisés: 2 pages de notes de cours

Cours (6=1+1+2+2)

- 1) Énoncer le théorème du maximum.
- 2) Est-ce qu'il existe un voisinage U de 0 dans \mathbb{C} et une fonction f holomorphe dans U telle que $\inf_U |f| = |f(0)| = 1$ et $\sup_U |f| = 2$?
- 3) Énoncer le théorème de Cauchy (version globale).
- 4) Est-ce que la fonction $1/z$ admet une primitive sur \mathbb{C}^* respectivement le demi-plan supérieur?

Exercice A (7=2+2+3)

- 6) Déterminer toutes les fonctions f holomorphes dans \mathbb{C} tel que $\operatorname{Re} f - 2 \operatorname{Im} f = 3$.
- 7) Déterminer tous les nombres $a \in \mathbb{C}$ pour lesquels la fonction $f_a(x, y) = 1 + x^2 + axy - y^2$ est holomorphe dans \mathbb{C} . Représenter dans ce cas f_a sous la forme $F(z)$.
- 8) Montrer que la fonction $u(x, y) = e^x(x \cos y - y \sin y)$ est harmonique dans \mathbb{R}^2 et déterminer $f \in H(\mathbb{C})$ sous la forme $f(z)$ tel que $\operatorname{Re} f = u$ et $f(0) = 0$.

Exercice B (5=2+1+2)

- 9) Déterminer tous les points $z \in \mathbb{C}$ tels que $\left| \frac{z-i}{z-1} \right| \leq r$, où $r \in \{1, 2\}$.
- 10) Soit $(a_1, \dots, a_4) = (0, 1, i, -1)$ et $(b_1, \dots, b_4) = (\infty, 2, 1 - i, 0)$.
Est-ce qu'il existe une transformation de Möbius f telle que $f(a_j) = b_j$, ($j = 1, \dots, 4$)?
Même question pour $(a_1, \dots, a_4) = (0, 1, -1, \infty)$ et $(b_1, \dots, b_4) = (-1, \infty, 0, 2)$.
- 11) Déterminer l'image du cercle unité et de la droite $\operatorname{Re} z = 1$ par rapport à la transformation de Möbius $M(z) = (z + 1)^{-1}$.

Exercice C (4)

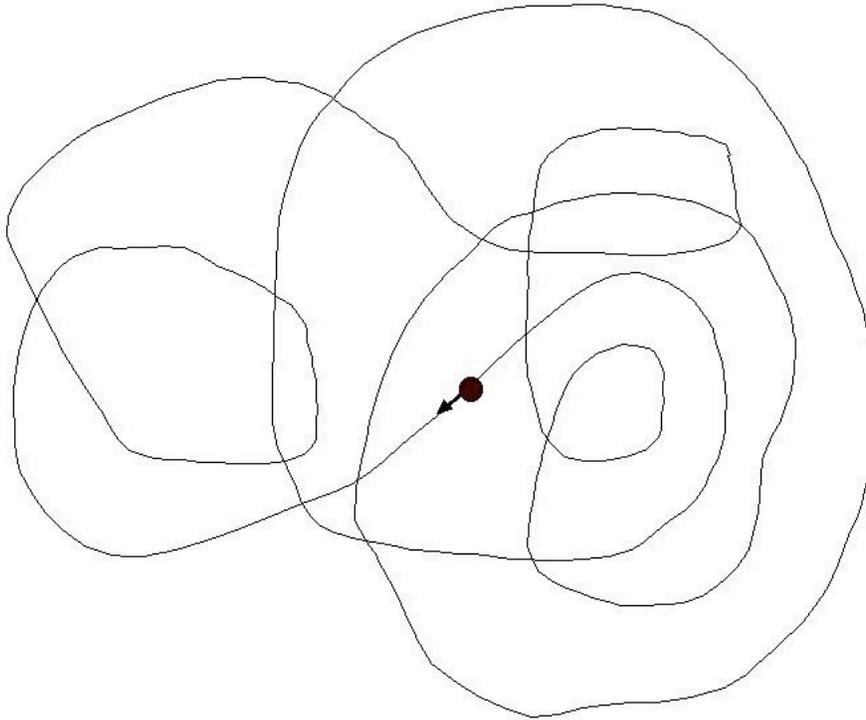
Déterminer $|\cos z|$ et mettre sous forme de $\sqrt{u(x)^2 + v(y)^2}$, $z = x + iy$, et résoudre l'équation $\cos z = i$.

Exercice D (5)

Déterminer le rayon de convergence des séries $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{7}{n}\right)^{n^2} z^{7n}$, et $\sum_{n=1}^{\infty} 7^n \frac{n!}{n^n} z^n$.

Exercice E (2)

Déterminer pour la courbe ci-dessus les indices $n(\Gamma, z)$.

**Exercice F** (1)

De qui s'agit-il?



Source: <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/history/BiogIndex.html>