Luxemburger Wort
Dienstag, den 26. August 2008

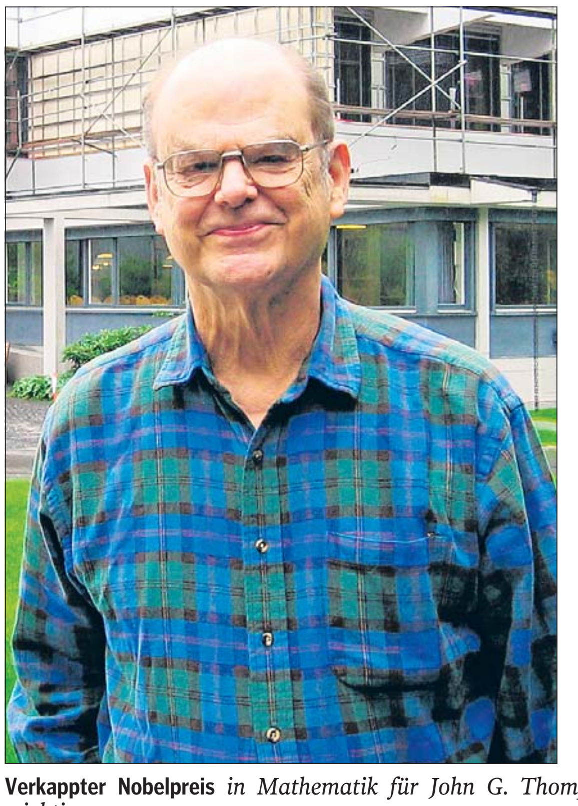
Monstergruppe und Rubiks Zauberwürfel

Bahnbrechende Leistungen

„Nobelpreis in Mathematik“: Abelpreis an Thompson und Tits

VON RAYMOND MORTINI UND MARTIN SCHLICHENMAIER *

Ende Mai wurde in Oslo durch König Harald von Norwegen in einer offiziellen Zeremonie der internationale Abelpreis an die Mathematiker John G. Thompson und Jacques Tits überreicht. Seit 2003 wird der Abelpreis jährlich von der Norwegischen Akademie der Wissenschaften für bahnbrechende Leistungen in der Mathematik verliehen. Er ist benannt nach dem genialen norwegischen Mathematiker Niels Hendrik Abel (1802-1829), der trotz seines frühen Todes die Entwicklung der Mathematik sehr beeinflusst hat. Der Preis ist mit 6 Millionen Norwegischen Kronen dotiert (rund 750 000 Euro) und wird als der „Nobelpreis in Mathematik“ angesehen.



Verkappter Nobelpreis *in Mathematik für John G. Thompson und Jacques Tits ... Der Abel-Preis wird immer wichtiger.* *(PHOTOS: RENATE SCHMID/OBERWOLFACH PHOTO COLLECTION/JEAN-FRANÇOIS DARS/CNRS IMAGES)*

Die Schaffung dieses Preises im Jahre 2002 ist ein Zeichen dafür, dass die grundlegende Bedeutung der Mathematik für unsere heutige hochkomplexe Welt immer mehr erkannt wird. Die Lösung dringender Probleme und das Aufnehmen komplexer Herausforderungen ist nur möglich durch eine Förderung der Mathematik als Grundlagen- und Anwendungswissenschaft.

Die diesjährigen Preisträger wurden ausgezeichnet für „ihre grundlegenden Errungenschaften in der Algebra und insbesondere für das Formen der modernen Gruppentheorie, so die Würdigung der Verleihungskommission. John Griggs Thompson (* 13. 10. 1932) ist US-Bürger. Er hatte Professuren an der Harvard-Universität und an der Universität Chicago inne, bevor er 1970 auf eine Professur an der Universtät Cambridge wechselte. Nach 23 Jahren kehrte er zurück in die USA und übernahm eine Professur an der Universität von Florida, Gainesville, die er bis heute bekleidet. Gleichzeitig ist er weiterhin emeritierter Professor in Cambridge. Jacques Tits (* 12. 8. 1930) stammt aus Belgien. Nachdem er Professuren in Brüssel und Bonn innehatte, nahm er 1973 einen Lehrstuhl in Mathematik am renommierten Collège de France, Paris, an. Seit 2000 ist er emeritierter Professor am Collège de France. Aufgrund ihrer Leistungen haben beide unzählige Ehrungen und Anerkennungen auf ihrem wissenschaftlichen Lebensweg erhalten.

Das Arbeitsgebiet der Preisträger ist die Mathematische Gruppentheorie. Diese beschäftigt sich mit Symmetrien. Auch Nichtmathematiker haben ein intuitives Verständnis für Symmetrien. Die wenigsten Menschen können sich der Ästhetik von Kristallen und Edelsteinen entziehen. Die äußere Gestalt eines Kristalls wird durch seinen inneren Aufbau, das Kristallgitter, bestimmt. Diese Kristallgitter sind aber nicht beliebig, man kann sie nach ihrer Symmetrie unterteilen. Ausgehend von den physikalischen Postulaten des Kristallaufbaus, zeigt die mathematische Gruppentheorie, dass es genau 230 „Kristallgruppen“ gibt. Sie bringt somit Ordnung in die physikalische Welt.

Mathematische Ordnung in der physikalischen Welt

Die Rolle der Gruppentheorie kann nicht überschätzt werden. Sie ist überall, sowohl innermathematisch als auch in den Anwendungen, von immenser Bedeutung. Die Suche nach den Grundlagen unserer materiellen Welt, so wie sie die Physiker betreiben, wird im Wesentlichen von postulierten Symmetrien der elementaren Kräfte geleitet. Die angestrebte Vereinheitlichung aller Kräfte bei sehr hohen Energien, so wie sie etwa in der Frühzeit unseres Universums, d.h. gleich nach dem Big Bang, vorlagen, besteht darin, eine Symmetriegruppe zu finden, die alle anderen enthält und die reale Welt beschreibt. Welche Elementarteilchen mit welchen Eigenschaften auftreten, wird durch die interne mathematische Struktur dieser Symmetriegruppe bestimmt. Anwendungen der Mathematischen Gruppentheorie finden sich jedoch in allen Wissenschaften. Nur einige Beispiele sind die folgenden. Die chemischen Eigenschaften von Molekülen werden wesentlich von deren Symmetrien bestimmt. Dasselbe trifft zu auf Viren. Die sichere Codierung von Daten baut darauf auf.

Die Symmetrie eines Musters (sogar eines Tapetenmusters), einer Struktur, eines Kristalls, bestimmter Pflanzenarten ... kann beschrieben werden durch die „Operationen“, die man ausführen kann, ohne dass das Muster dabei als Ganzes verändert wird. Was eine „Operation“ ist, hängt von der konkreten Situation ab. Betrachtet man z.B. ein Quadrat in der Ebene, so sind die Operationen die geometrischen Bewegungen, die das Quadrat als Form festhalten. Das sind z.B. die Spiegelungen an den Diagonalen, aber auch Drehungen um Vielfache von 90 Grad um den Mittelpunkt des Quadrats. Wichtig ist, dass das Hintereinanderausführen zweier Operationen selbst wieder eine zulässige Operation ergibt. Am Beispiel des Quadrats: Eine Rotation um 90 Grad und danach eine weitere Rotation um 90 Grad kann natürlich als eine einzige Rotation um 180 Grad beschrieben werden. Des Weiteren gibt es zu jeder Operation eine umgekehrte Operation, die sie wieder zurücknimmt. So ist die umgekehrte Rotation zu 90 Grad offensichtlich die Rotation um 90 Grad in die umgekehrte Richtung. Nimmt man nun noch eine Bedingung hinzu, die die Mathematiker Assoziativität nennen, dann ist damit schon erklärt, was eine Gruppe ausmacht. Assoziativität ist nichts anderes als die Tatsache, dass man beim Hintereinanderausführen sich nicht um die Klammerung kümmern muss. Das allen wohlbekannte Beispiel ist die Tatsache, dass wenn wir etwa die drei Zahlen 3, 4 und 5 addieren, dann $(3 + 4) + 5 = 3 + (4 + 5)$ gilt.

Man sieht also, dass die grundlegenden Gesetze für eine Gruppe sehr einfach sind. Um so erstaunlicher ist es, dass bereits diese genügen, um Ordnung zu erzeugen. Gruppen mit einer endlichen Anzahl von Elementen können aus Grundbausteinen (Atomen) aufgebaut werden, die selbst Gruppen sind, aber nicht mehr weiter zerlegt werden können. Ein wichtiger Schritt zum Verständnis aller möglichen Gruppenstrukturen ist es, diese Grundbausteine zu kennen. Diese werden einfache Gruppen genannt. Einfach bedeutet aber nicht, dass ihre Struktur einfach ist – das Gegenteil ist der Fall –, sondern dass man sie nicht mehr weiter zerlegen kann.

Fußball und Rubik-Würfel als Symmetriegruppe

Ein „sehr aktuelles“ Beispiel für eine einfache Gruppe ist die Symmetriegruppe des klassischen Fußballs. Die Oberfläche des Fußballs besteht aus 12 regelmäßigen Fünfecken und 20 regelmäßigen Sechsecken. Die Symmetriegruppe besteht aus genau den 60 Rotationen des Raums, die den Fußball in seiner Form erhalten.

Allen bekannt, insbesondere unseren Kindern, dürfte auch Rubiks Zauberwürfel sein. Angewandte Gruppentheorie: Kennern der Invariantentheorie innerhalb der Symmetriegruppen gelingt es spielend, die Originalstruktur des Würfels wiederherzustellen.

Das mathematische Forschungsprogramm der Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen wurde um 1920 begonnen und erst 1982 abgeschlossen. Drei unendliche Serien von einfachen Gruppen, wobei die dritte wiederum in 16 Teilserien zerfällt, sind wohlbekannt. In harter mathematischer Arbeit wurde bewiesen, dass es lediglich 26 weitere Einzelfälle gibt. Diese zusätzlichen Gruppen heißen sporadische Gruppen. Die größte davon trägt den Namen „Monster group“. Beide Preisträger haben durch ihre Forschungen in entscheidender Weise Resultate und Techniken zur Verfügung gestellt, ohne die die Klassifikation nicht erreichbar gewesen wäre.

Entscheidend für den Durchbruch war das im Jahr 1962 von John C. Thompson zusammen mit dem verstorbenen Mathematiker Walter Feith erzielte Resultat: Eine einfache Gruppe gehört entweder zur ersten wohlbekannten Serie oder sie besitzt notwendigerweise eine gerade Anzahl von Elementen. Die Tiefe und Komplexität dieses Resultats kann dadurch ermessen werden, dass die exakte Aussage bereits von einem Studenten der Mathematik im ersten Studienjahr verstanden werden kann, der Beweis aber 255 Seiten hochkondensierte Mathematik umfasst. Das Resultat war insbesondere deshalb nützlich, da für Gruppen mit einer geraden Anzahl von Elementen bereits gewisse Techniken existierten, wie man weitergehen konnte.

Die wichtige Technik die Jacques Tits ins Spiel brachte, war die Theorie und Konstruktion der sogenannten Tits-Gebäude. Linearen Gruppen (dies ist eine wichtige Klasse von Gruppen) ordnete er geometrische Objekte mit einer internen geometrischen und kombinatorischen Struktur zu. Diese Objekte nennt man heute Tits-Gebäude. Sie bringen einen geometrischen Aspekt in die Gruppentheorie. Wie in echten Gebäuden gibt es Wohnungen und Zimmer. Die algebraische Struktur der Gruppe korrespondiert zu der geometrischen und kombinatorischen Struktur des Gebäudes. Dieser geometrische Zugang war wesentlich zum Studium und zur Realisierung der sporadischen Gruppen, einschließlich des Monsters. Allerdings ist die Geometrie der Tits-Gebäude nicht nur von Bedeutung für die Klassifikation endlicher Gruppen. Sie wird auch für Gruppen mit unendlich vielen Elementen eingesetzt, speziell auch für diejenigen, die von Bedeutung in der Theoretischen Physik sind. Des Weiteren sind sie in der kombinatorischen Geometrie nützlich, die in der Informatik benutzt wird. Natürlich haben die Preisträger eine Vielzahl weiterer mathematischer Resultate erzielt, die hier nicht behandelt werden können.

Die Vorarbeit kurzlebiger Pioniere

Das Gebiet der Gruppentheorie ist auch mit Abel, dem Namensgeber des Preises, verbunden. In der Tat kann man ihn zusammen mit Evariste Galois als die Begründer der Theorie ansehen. Die Lösungen algebraischer Gleichungen zu finden, ist ein altes und wichtiges Problem. Aus der Schule bekannt ist, dass man die Lösungen quadratischer Gleichungen durch Formeln ausdrücken kann, in denen Wurzeln auftreten. Abel hat gezeigt, dass für Gleichungen vom Grad 5 solche allgemeingültigen Formeln nicht mehr existieren können. Für den Beweis hat er Gruppentheorie benutzt. Die verwendete Gruppe, heute Galois-Gruppe genannt, besteht aus den möglichen Vertauschungen der verschiedenen Lösungen der algebraischen Gleichung. Evariste Galois, ein Franzose und ebenfalls ein mathematisches Genie, hat die volle mathematische Beziehung zwischen dem Lösen einer algebraischen Gleichung und der Gruppe der Gleichung entwickelt.

Abel starb 1929 im jungen Alter von 27 Jahren an Lungentuberkulose. Das Leben von Galois endete ebenfalls tragisch. Er starb 1832 mit 20 Jahren an den Verletzungen durch ein Duell. Die Hintergründe des Duells liegen auch heute noch im Dunkeln. Waren es revolutionäre Gründe (er war ein leidenschaftlicher Republikaner) oder waren es doch amouröse Verwicklungen?

* Raymond Mortini ist Professor für Mathematik an der Universität Paul Verlaine in Metz.
Martin Schlichenmaier ist Professor für Mathematik an der Universität Luxemburg.