Zur Idealstruktur von Unterringen der Nevanlinna-Klasse N

Raymond Mortini

Mathematisches Institut I
Universität Karlsruhe
Englerstr. 2
D-7500 Karlsruhe

Es sei R ein H^∞ umfassender Ring vom Nevanlinna-Smirnow-Typus. In dieser Arbeit charakterisieren wir diejenigen Ideale in H^∞, welche sich als Spur eines Ideals in R darstellen lassen. Ferner untersuchen wir endlich erzeugte Ideale und zeigen, daß jeder Ring vom Nevanlinna-Smirnow-Typus kohärent ist.

AMS classification number: 30 H 05, 30 D 50, 46 H 10, 46 E 25

Eingereicht am 21.10.1986

Ein wichtiges Problem in der Idealtheorie ist die Herstellung von Beziehungen zwischen den Idealen in einem Ring R und seinen Unterringen. Diesem Problemkreis für Ringe vom Nevanlinna-Smirnow-Typus wollen wir uns nun zuwenden. Dazu sei H^∞, versehen mit den üblichen punktweisen Operationen der Addition und der Multiplikation, der Ring der beschränkten holomorphen Funktionen in der offenen Einheitskreisscheibe $\mathbf{D}$. Ferner sei N die Nevanlinna-Klasse, also der Ring aller in $\mathbf{D}$ holomorphen Funktionen, welche von beschränkter Charakteristik sind, d.h. welche der Wachstumsbedingung

$$\sup_{0<r<1} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{it})|\, dt < \infty$$

genügen; dabei sei wie üblich $\log^+ x = \max(\log x, 0)$ für $x > 0$.

Bekanntlich gehört nach dem Faktorisierungssatz von Nevanlinna [1, § 2] eine in $\mathbf{D}$ holomorphe Funktion f genau dann zu N, wenn sie sich als Quotient $f = \frac{g}{h}$ zweier Funktionen aus H^∞ darstellen läßt, wobei h in $\mathbf{D}$ nullstellenfrei ist. Hieraus folgt, daß eine Funktion $f \in \mathbf{N}$ genau dann in N invertierbar ist, also $f \in N^{-1}$, wenn f nullstellenfrei in $\mathbf{D}$ ist. Insbesondere gibt es zu jeder Funktion $f \in N$ ein Element $h \in N^{-1} \cap H^\infty$ mit $fh \in H^\infty$. Dies führt zu folgender

Definition. Es sei R ein H^∞ umfassender Unterring von N. Dann heißt R vom Nevanlinna-Smirnow-Typus, wenn es zu jedem $f \in R$ eine in R invertierbare Funktion $h \in H^\infty$ gibt mit $fh \in H^\infty$.

Wir bemerken, daß unsere Namensgebung von den folgenden Beispielen herrührt:

1. Beispiel. Nach den obigen Bemerkungen ist die Nevalinna-Klasse ein solcher Ring.

2. Beispiel. Es sei N^+ die Smirnow-Klasse, welche wie folgt definiert wird:

$$N^+ = \left\{ f \in N : \lim_{r \to 1^-} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{it})|\, dt = \int_0^{2\pi} \log^+ |f(e^{it})|\, dt \right\},$$

wobei $f(e^{it})$ die (f.ü. existierende) nichttangentiale Randfunktion der Funktion $f \in N$ ist (siehe [1, § 2]). Eine genaue Untersuchung der Struktur der Funktionen aus N^+ zeigt, daß eine in $\mathbf{D}$ holomorphe Funktion f genau dann zu N^+ gehört, wenn sie sich als Quotient einer Funktiong $g \in H^\infty$ und einer äußeren Funktion $H \in H^\infty$ darstellen läßt [1, § 2]. Daraus folgt, daß auch N^+ ein Ring vom Nevanlinna-Smirnow-Typus ist.

3. Beispiel. Es sei F^+ die Yanagihara-Klasse, also die Menge aller in $\mathbf{D}$ holomorphen Funktionen f, welche der Wachstumsbedingung

$$\lim_{r \to 1} (1-r) \log M(r,f) = 0$$

genügen, wobei $M(r,f) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$ ist. Nach Stoll [6] gilt

$$N \cap F^+ \;=\; \{f = g/S_\mu : g \in N^+,\ S_\mu \text{ eine singuläre innere Funktion mit stetigem Borelmaß } \mu\}.$$

Aufgrund dieser Darstellung erkennt man nun leicht, daß auch $N \cap F^+$ ein Ring vom Nevanlinna-Smirnow-Typus ist.

Da wir uns im folgenden wesentlich mit Teilereigenschaften beschäftigen, bemerken wir, daß sämtliche Ringe R vom Nevanlinna-Smirnow-Typus Pseudobezout-Ringe sind, d.h. daß R ein nullteilerfreier, kommutativer Ring mit der Eigenschaft ist, daß je zwei Elemente aus R stets einen größten gemeinsamen Teiler (ggt) haben. Dies folgt aus dem entsprechenden Resultat für H^∞ [5].

§ 1 Spuren von Idealen in H^∞

Satz 1 *Es sei R ein Ring vom Nevanlinna-Smirnow-Typus. Ein Ideal I in H^∞ ist genau dann die Spur eines Ideals in R, d.h. läßt sich in der Form $I = J \cap H^\infty$ für ein Ideal $J \subseteq R$ darstellen, wenn I der folgenden Bedingung $(\star)$ genügt:*

$(\star)$ *Ist $f \in I$, $q \in R^{-1}$ und $fq \in H^\infty$, so folgt $fq \in I$.*

Dabei bezeichne R^{-1} die Menge der in R invertierbaren Elemente.

Beweis. Zunächst zeigen wir die Notwendigkeit der Bedingung $(\star)$. Es sei J ein Ideal in R mit $I = J \cap H^\infty$, $f \in I$ und $q \in R^{-1}$ mit $fq \in H^\infty$. Dann gilt $fq \in J \cap H^\infty = I$. Sei nun umgekehrt I ein Ideal in H^∞, welches der Bedingung $(\star)$ genügt. Wir bilden das von I in R erzeugte Ideal $J = IR$ und behaupten, daß $IR \cap H^\infty = I$ ist. Trivialerweise gilt $I \subset IR \cap H^\infty$. Es sei also $f \in IR \cap H^\infty$; d.h. es gibt Funktionen $q_i \in R$ und $f_i \in I$ $(i = 1, \ldots, n)$ mit $f = \sum_{i=1}^n q_i f_i$. Da R vom Nevanlinna-Smirnow-Typus ist, gibt es Funktionen $g_i \in H^\infty$ und $h_i \in R^{-1} \cap H^\infty$ mit $q_i = g_i/h_i$. Es sei $h = \prod_{i=1}^n h_i$. Dann ist $h \in R^{-1}$ und

$$hf = \sum_{i=1}^n f_i \left(g_i \prod_{\substack{j \neq i \\ j=1}}^n h_j \right) \in I.$$

Da $(fh)h^{-1} = f \in H^\infty$ ist, impliziert die Voraussetzung $(\star)$, angewandt auf die Funktion fh, daß $f \in I$ ist. □

Korollar 1 *Ein Ideal I in H^∞ ist genau dann die Spur eines Ideals aus N, wenn mit $f \in I$ auch der zu f gehörige Blaschke-Anteil zu I gehört.*

Korollar 2 *Ein Ideal I in H^∞ ist genau dann die Spur eines Ideals aus N^+, wenn mit $f \in I$ auch der innere Anteil von f zu I gehört.*

Der nächste Satz zeigt uns nun, daß die Ideale in H^∞, welche der Bedingung $(\star)$ genügen, in eineindeutiger Beziehung zu den Idealen in R stehen.

Satz 2 *Es sei R ein Ring vom Nevanlinna-Smirnow-Typus. Ist I ein Ideal in H^∞, welches der Bedingung $(\star)$ aus Satz 1 genügt, so gibt es genau ein Ideal J in R mit $I = J \cap H^\infty$. In diesem Fall ist $J = IR$.*

Beweis. Es seien J_1 und J_2 Ideale in R mit $J_1 \cap H^\infty = J_2 \cap H^\infty$ und $f \in J_1$. Weiterhin sei $q \in R^{-1} \cap H^\infty$ mit $qf \in H^\infty$. Folglich ist $qf \in J_1 \cap H^\infty = J_2 \cap H^\infty$. Da q in R invertierbar ist, folgt $f \in J_2$. Analog gilt $J_2 \subseteq J_1$. Nach dem Beweis von Satz 1 hat $J = IR$ die gewünschten Eigenschaften. □

Untersucht man nun Primideale, so zeigt sich, daß man die Bedingung $(\star)$ abschwächen kann.

Satz 3 *Es sei R ein Ring vom Nevanlinna-Smirnow-Typus. Ein Primideal P in H^∞ ist genau dann die Spur eines Primideals Q aus R, wenn P keine in R invertierbaren Funktionen enthält. In diesem Fall ist $Q = PR$.*

Beweis. Da Primideale echte Ideale sind, ist die Bedingung trivialerweise notwendig. Zum Beweis der Umkehrung zeigen wir, daß P tatsächlich der Bedingung aus Satz 1 genügt. Es sei dazu $f \in P$, $q \in R^{-1}$ und $fq = h \in H^\infty$. Weil q sich in der Form $q = h_1/h_2$ mit $h_i \in R^{-1} \cap H^\infty$ darstellen läßt, folgt:

$$hh_2 = fh_1 \in P.$$

Da h_2 in R invertierbar ist, gehört h_2 nach Voraussetzung nicht zu P. P prim impliziert nun, daß $h \in P$, d.h. $fq \in P$ ist. Satz 1 garantiert jetzt, daß $PR \cap H^\infty = P$ ist. Der Eindeutigkeitssatz 2 gewährleistet zudem, daß PR selbst prim ist. Denn sei $S = H^\infty \setminus P$ und $I = PR$. Offenbar ist S eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge von R mit $I \cap S = \emptyset$. Nach dem Lemma von Zorn gibt es ein Ideal $Q \supseteq I$, $Q \subsetneq R$, welches maximal bezüglich $Q \cap S = \emptyset$ ist. Das Lemma von Krull impliziert, daß Q prim ist. Weiterhin gilt $P \subseteq Q \cap H^\infty \subseteq P$. Satz 2 impliziert nun, daß $Q = I = PR$ ist. □

Bemerkung. Es ist klar, daß diese Ergebnisse in einem viel allgemeineren Rahmen gültig sind (siehe [3, § 1.4]). Wir interessieren uns jedoch hauptsächlich nur für die Verhältnisse in N, N^+ und H^∞. Die eigentlich neuen Ergebnisse bringen wir jetzt in § 2.

§ 2 Endlich erzeugte Ideale

Ein weiteres wichtiges Problem in der Idealtheorie eines Ringes holomorpher Funktionen ist die Angabe von Bedingungen, welche gewährleisten, daß ein vorgegebenes endlich erzeugtes Ideal mit dem gesamten Ring übereinstimmt. Eine vollständige Lösung dieses Problems für H^∞ liefert das berühmte Corona-Theorem von Carleson [2, S. 324].

Corona-Theorem *Das von den Funktionen $f_1, \ldots, f_N$ in H^∞ erzeugte Ideal $I = (f_1, \ldots, f_N)$ stimmt genau dann mit H^∞ überein, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so daß für jedes $z \in \mathbf{D}$ die Bedingung*

$$\sum_{i=1}^{N} |f_i(z)| \geq \varepsilon > 0$$

erfüllt ist.

Im folgenden werden wir nun das entsprechende Problem für Ringe vom Nevanlinna-Smirnow-Typus untersuchen. Als direktes Korollar aus dem verallgemeinerten Corona-Theorem von Wolff [2, S. 329] erhalten wir den folgenden Satz.

Satz 4 *Die Funktionen $f_1, \ldots, f_N$ eines Ringes R vom Nevanlinna-Smirnow-Typus erzeugen genau dann ganz R, wenn es eine in R invertierbare Funktion f gibt mit*

$$|f| \leq \sum_{i=1}^{N} |f_i| \quad in \quad \mathbf{D}.$$

Diese Bedingung wird i.a. bei vorgegebenen Funktionen $f_1, \ldots, f_N$ nur sehr schwer nachzuprüfen sein. Die folgenden Sätze liefern uns nun für den Spezialfall der Smirnow-Klasse N^+ wesentlich konkretere Bedingungen. Es zeigt sich, daß um $(f_1, \ldots, f_N) = N^+$ zu gewährleisten, die Funktionen $f_1, \ldots, f_N$ nicht allzu rasch auf einer gemeinsamen Folge gegen Null streben dürfen.

Definition. Eine Interpolationsfolge $\{z_n\}$ in H^∞ ist eine Folge in $\mathbf{D}$ mit der Eigenschaft, daß es zu jeder beschränkten Folge (w_n) komplexer Zahlen eine Funktion $f \in H^\infty$ gibt mit $f(z_n) = w_n$ für jedes $n \in N$. Endliche Folgen seien zugelassen. Ist B ein Blaschkeprodukt, dessen Nullstellenfolge eine Interpolationsfolge ist, so bezeichnen wir B als ein Interpolations-Blaschekprodukt.

Es sei weiterhin $H^1 = \left\{ f \in N : \sup_{0<r<1} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|\, dt < \infty \right\}$ der klassische Hardy-Raum.

Bemerkung. Da der äußere Anteil einer Funktion aus N^+ in N^+ invertierbar ist, können wir als Erzeuger von Idealen in N^+ ohne Beschränkung der Allgemeinheit innere Funktionen wählen.

Satz 5 *Enthält das von den Funktionen $f_1, \ldots, f_N$ in H^∞ erzeugte Ideal I eine äußere Funktion F mit $\log F \in H^1$, so konvergiert für jede Interpolationsfolge $\{z_k\}$ die Reihe*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 - |z_k|^2) |\log(|f_1(z_k)| + \cdots + |f_N(z_k)|. \tag{1}$$

Beweis. Gemäß der Voraussetzung gibt es Funktionen $g_1, \ldots, g_N$ aus H^∞ mit $F = \sum_{n=1}^{N} g_n f_n$. Insbesondere existiert also eine Konstante $C > 0$ derart, daß für jedes $z \in \mathbf{D}$ gilt

$$|F(z)| \leq C \sum_{n=1}^{N} |f_n(z)|.$$

Es sei $S(z) = \sum_{n=1}^{N} |f_n(z)|$. Beachtet man, daß die Interpolationsfolge $\{z_k\}$ insbesondere eine Blaschkefolge ist, d.h. daß $\sum_{k=1}^{\infty} (1 - |z_k|)$ konvergent ist, so erhalten wir mit Hilfe des Interpolationssatzes von Shapiro und Shields [1, S. 149] folgende Abschätzungen:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|^2)|\log S(z_k)| &= \sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|^2)\left[\log^+ S(z_k)+\log^+\frac{1}{S(z_k)}\right]\\
&\le C_1\sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|^2)+\sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|^2)\log^+\frac{C}{|F(z_k)|}\\
&\le C_2+\sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|^2)\left[\log^+\frac{C}{|F(z_k|)}+\log^+\frac{|F(z_k|}{C}\right]\\
&= C_2+\sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|^2)\left|\log\frac{|F(z_k)|}{C}\right|\\
&\le C_2+\sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|^2)\left|\log\frac{F(z_k)}{C}\right|<\infty.
\end{aligned}$$

□

Daß die Konvergenz der Reihe (1) in gewissen Fällen auch *hinreichend* dafür ist, daß $(f_1,\ldots,f_N)=N^+$ ist, bildet den Inhalt des nächsten Satzes.

Satz 6 *Es seien $\varphi_1,\ldots,\varphi_N$ innere Funktionen und $I=(\varphi_1,\ldots,\varphi_N)$ ein endlich erzeugtes Ideal N^+, welches das Interpolations-Blaschkeprodukt B mit den Nullstellen z_k enthält. Dann folgt aus der Konvergenz der Reihe*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|^2)|\log(|\varphi_1(z_k)|+\cdots+|\varphi_N(z_k)|)|,$$

daß $I=N^+$ ist.

Beweis. Wir setzen $c_k := \sum_{n=1}^{N}|\varphi_n(z_k)|^2$. Unter Beachtung von $\sum_{k=1}^{\infty}1-|z_k|^2<\infty$ sowie der Voraussetzung ergibt eine leichte Rechnung (Cauchy-Schwarsche Ungleichung), daß die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|^2)|\log c_k|<\infty$$

ist. Nach dem oben genannten Interpolationssatz von Shapiro und Shields gibt es eine Funktion $g\in H^1$ mit $g(z_k)=\log c_k$. Damit ist die äußere Funktion $F=\exp g\in N^+$, und es gilt $F(z_k)=c_k$.

Als nächstes lösen wir ein Interpolationsproblem in H^∞. Da $\{z_k\}$ eine Interpolationsfolge ist, gibt es Funktionen $f_n\in H^\infty$ $(n=1,\ldots,N)$ mit

$$f_n(z_k)=\overline{\varphi_n(z_k)}\quad (k=1,2,\ldots).$$

Damit ist die Funktion $F-\sum_{n=1}^{N}f_n\varphi_n\in N^+$, und es gilt

$$F(z_k)=\sum_{n=1}^{N}(f_n\varphi_n)(z_k)=c_k-\sum_{n=1}^{N}|\varphi_n(z_k)|^2=0.$$

Nach dem Rieszschen Faktorisierungssatz gibt es also eine Funktion $h\in N^+$ mit

$$F-\sum_{n=1}^{N}f_n\varphi_n=Bh.$$

Folglich ist $F\in(\varphi_1,\ldots,\varphi_n,B)\subseteq I$. Weil äußere Funktionen in N^+ invertierbar sind, folgt schließlich die Behauptung

$$I=(\varphi_1,\ldots,\varphi_N)=N^+.$$

□

§ 3 Kohärenz der Ringe vom Nevanlinna-Smirnow-Typus

In [4] konnten McVoy und Rubel zeigen, daß der Ring H^∞ kohärent ist, d.h. daß der Durchschnitt von zwei endlich erzeugten Idealen wieder endlich erzeugt ist. Dies ist in anderen Ringen holomorpher Funktionen nicht unbedingt der Fall, wie die Disk-Algebra

$$A(\mathbf{D})=\{f\in H^\infty : f \text{ läßt sich stetig auf } \overline{\mathbf{D}} \text{ fortsetzen}\}$$

zeigt (siehe [4]).

Mit Hilfe des Ergebnisses von McVoy und Rubel können wir nun das entsprechende Problem für Ringe des Nevanlinna-Smirnow-Typus vollständig lösen.

Satz 7 *Jeder Ring R vom Nevanlinna-Smirnow-Typus ist kohärent.*

Beweis. Es seien $I_1 = (f_1, \dots, f_n)$ und $I_2 = (g_1, \dots, g_n)$ zwei endlich erzeugte Ideale in R. Die Voraussetzung an R impliziert, daß wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen können, daß die Erzeuger f_i und g_j aus H^∞ sind. Wir betrachten jetzt die Spuren $S_i = I_i \cap H^\infty$ $(i = 1,2)$ der Ideale I_1 und I_2 in H^∞. Offensichtlich gilt

$$S_i = \{f \in H^\infty : fq \in J_i \text{ für ein } q \in R^{-1} \cap H^\infty\}, \quad (i = 1,2),$$

wobei J_1 das von den Funktionen $f_1, \dots, f_n$ und J_2 das von $g_1, \dots, g_m$ erzeugte Ideal in H^∞ ist. Als nächstes zeigen wir die Beziehung

$$S_1 \cap S_2 = \{f \in H^\infty : fq \in J_1 \cap J_2 \text{ für ein } q \in R^{-1} \cap H^\infty\} := S.$$

Es sei dazu $f \in S_1 \cap S_2$. Dann gibt es ein $q_i \in R^{-1} \cap H^\infty$ $(i = 1,2)$ mit $fq_i \in J_i$ $(i = 1,2)$. Folglich ist $fq_1q_2 \in J_1 \cap J_2$. Da $q_1q_2 \in R^{-1} \cap H^\infty$ ist, folgt $f \in S$. Die Inklusion $S \subseteq S_1 \cap S_2$ ist trivial.

Da H^∞ kohärent ist, ist $J := J_1 \cap J_2$ wieder endlich erzeugt, und es gilt $S = RJ \cap H^\infty$. Wegen $(I_1 \cap I_2) \cap H^\infty = S_1 \cap S_2 = S$ und des Eindeutigkeissatzes 2 folgt schließlich $RJ = I_1 \cap I_2$. Insbesondere ist damit $I_1 \cap I_2$ endlich erzeugt. □

Literaturverzeichnis

1. Duren, P.L.: *Theory of H^p Spaces.* New York: Academic Press, 1970.
2. Garnett, J.B.: *Bounded Analytic Functions.* New York: Academic Press, 1981.
3. Kaplansky, I.: *Commutative Rings.* Allyn and Bacon, Inc. 1970.
4. McVoy, W.S., Rubel, L.A.: *Coherence of some rings of functions.* J. Funct. Anal. **21** (1976), 76–87.
5. v. Renteln, M.: *Hauptideale und äußere Funktionen im Ring H^∞.* Archiv Math. **28** (1977), 519–524.
6. Stoll, N.: *A characterization of $F^+ \cap N$.* Proc. Amer. Math. Soc. **57** (1976), 97–98.

Raymond Mortini
Mathematisches Institut I
Universität Karlsruhe
Englerstr. 2

D-7500 Karlsruhe