§4 Das Banach-Hausdorff-Tarski Paradoxon

Bemerkungen:

① Problem in der Maßtheorie:

Gibt es ein σ-endliches Maß μ auf $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, $\mu: \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0,\infty]$ mit

1) $\mu([0,1]^n) = 1$

2) σ-additiv

3) invariant bezüglich Bewegungen (bzw. sogar schwächer: Translationen) im $\mathbb{R}^n$.

Antwort nein! z.B. aufgrund der Vitalimenge im §3. Natürlich existiert ein Maß mit (2) auf $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, jedoch nicht 1) 2) 3) gleichzeitig!

② Frage: Existiert $\mu: \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0,\infty]$ mit

1) $\mu([0,1]^n) = 1$

2) μ additiv (d.h. nur Inhalt)

3) μ translationsinvariant

3') μ bewegungsinvariant.

Antwort: 1) 2) 3) sind (für alle Dimensionen) gleichzeitig erfüllbar!

1) 2) 3') sind nicht erfüllbar für $n \geq 3$, aber erfüllbar für $n = 1,2$

Im Falle $n = 1,2$ ist μ sogar als additive Fortsetzung des Lebesguemaßes wählbar (Eindeutigkeit?)

Definition 1 "G operiert auf X".

$(G,\cdot)$ sei Gruppe mit Einselement 1, $X \neq \emptyset$.

Die Gruppe G operiert auf X, falls es eine äußere Verknüpfung gibt $\circ \begin{cases} G \times X \to X \\ (g,x) \mapsto g\circ x =: gx =: g(x) \end{cases}$ mit $h\circ(g\circ x) = (hg)\circ x$ und $1\circ x = x$

(für alle $x \in X$, $g,h \in G$).

Beispiel:

- $X = \mathbb{R}^n$, $G = OG_n$: Gruppe der orthogonalen Transformationen (Isometrie
- $X = G$: G operiert auf sich selbst durch Linkstranslation.

Definition 2

Es operiere die Gruppe G auf X.
$E \subseteq X$ heißt "paradoxal bzgl G" oder auch G-paradoxal, falls gilt:
Es ex. paarweise disjunkte Teilmengen $A_1, \dots, A_n, B_1, \dots B_m$ von E
und es exist $g_1, \dots, g_n, h_1, \dots, h_m \in G$ mit
$$E = \bigcup_{i=1}^{n} g_i A_i = \bigcup_{j=1}^{m} h_j B_j$$

Theorem (Banach-Hausdorff-Tarski)
Jede Kugel im $\mathbb{R}^3$ ist paradoxal bzgl der Gruppe der Isometrien im $\mathbb{R}^n$ (es genügen sogar die Bewegungen!)

Strebe im Folgenden äquivalente Formulierungen an!

Definition 3

G operiere auf X. $A, B \subseteq X$ heißen "G equidecomposable" (G-kongruent), wenn sich A und B in die gleiche Anzahl von "kongruenten" Teilen zerlegen lassen, dh es existieren $B_j \subseteq B$, $A_j \subseteq A$ (gleiche Anzahl! $j = 1..n$) mit $A_i \cap A_j = \emptyset$ $(i \neq j)$ und $B_i \cap B_j = \emptyset$ $(i \neq j)$, $A = \sum A_j$, $B = \sum B_j$, und es exist. $g_j \in G$ $(j = 1..n)$ mit $A_j = g_j B_j$ $(j = 1..n)$

Schreibweise $A \underset{G}{\sim} B$, $\underset{G}{\sim}$ ist Äquivalenzrelation auf X.

Bemerkung: zur Transitivität beachte: $A \underset{G}{\sim} B$, $B \underset{G}{\sim} C \Rightarrow A \sim C$ mit $n \cdot m$

Lemma 4.1 (Charakterisierung der Paradoxalität mithilfe der ÄRel).

G operiere auf X, $E \subseteq X$

E ist G-paradoxal $\Leftrightarrow \exists A, B \subseteq E$, $A \cap B = \emptyset$, $A \underset{G}{\sim} E \underset{G}{\sim} B$.

Beweis

"$\Leftarrow$" $A \underset{G}{\sim} E \Rightarrow E = \sum_{i=1}^{n} g_i A_i$, $g_i \in G$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ $(i \neq j)$, $A = \sum_{i=1}^{n} A_i$

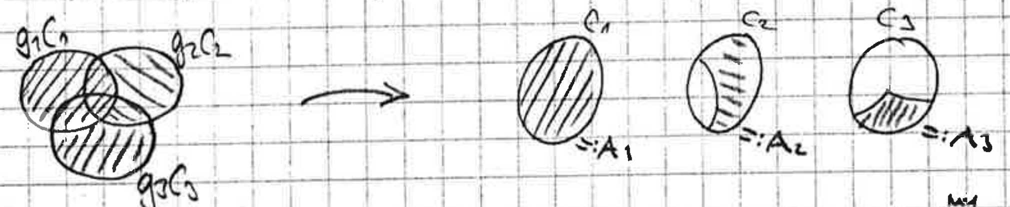
$B \underset{G}{\sim} E \Rightarrow E = \sum_{j=1}^{m} h_j B_j$, $h_j \in G$, $B_j \cap B_i = \emptyset$ $(i \neq j)$, $B = \sum_{1}^{m} B_j$

$\Rightarrow$ da $A \cap B = \emptyset$, $E = \sum_{i=1}^{n} g_i A_i = \sum_{j=1}^{m} h_j A_j$ folgt: E ist G-paradoxal.

"$\Rightarrow$" Sei E G-paradoxal $\Rightarrow \exists\, C_j \subseteq E$ $j = 1..n$, $D_i \subseteq E$ $i = 1..m$ paarweise disjunkt mit $E = \bigcup_{j=1}^{n} g_j C_j = \bigcup_{i=1}^{m} h_i D_i$, $g_j, h_i \in G$

Z.z.: $\exists A, B \subseteq E$, $A \cap B = \emptyset$, $A \sim E \sim B$.

Skizze:



Setze $A_1 = C_1$, $A_2 = g_2^{-1}(g_2C_2 \setminus g_1C_1)$, ... $A_n := g_n^{-1}\left(g_nC_n \setminus \bigcup_{j=1}^{n-1} g_jC_j\right)$

$\Rightarrow A_j$ sind paarweise disjunkt, ebenso die g_jA_j.

$E = \sum_{j=1}^{n} g_jA_j$, $A := \sum_{j=1}^{n} A_j \Rightarrow E \sim A$.

Analog mit den D_j $\rightsquigarrow$ diese liefern B mit $E \sim B$.

$A \cap B = \emptyset$, da C_j und D_i disjunkt. $\square$

Satz 4.2

G operiere auf X. $E, E' \subseteq X$. Dann gilt: Ist $E \underset{G}{\sim} E'$, so ist:

E G-paradoxal $\Leftrightarrow$ E' ist G-paradoxal.

Beweis Sei $E \sim E'$ und E G-paradoxal $\overset{4.1}{\Longrightarrow}$ es exist $A, B \subseteq E$

$A \cap B = \emptyset$ mit $A \sim E \sim B \sim E'$.

Ziel: Anwendung von Lemma 4.1. Es ist aber noch <u>nicht</u> $A, B \subseteq E'$.

Deshalb folgende Konstruktion:

$E \sim E'$ $E = \sum_{j=1} E_j$ $E' = \sum_{j=1}^{n} g_j E_j$ $g_j \in G$

Setze $A_j' = A \cap E_j \subseteq E_j$, $B_j' := B \cap E_j \subseteq E_j$

$\Rightarrow A_j'$ paarweise disjunkt, B_j' paarweise disjunkt, $A = \sum_{j=1}^{m} A_j'$

$A' := \sum_{j=1}^{m} g_j A_j' \Rightarrow A \sim A'$ und $A' \subseteq E'$

$B = \sum_{j=1}^{m} B_j'$ und $B' := \sum_{j=1}^{m} g_j B_j' \Rightarrow B' \subseteq E'$ und $B \sim B'$.

Frage: $A' \cap B' = \emptyset$?

$A \cap B = \emptyset \Rightarrow A_j' \cap B_j' = \emptyset \Rightarrow g_j A_j' \cap g_j B_j' = \emptyset$ (bea: Gleiche Bewegg g_j!)

für $i \neq j$: $g_j A_j' \subseteq g_j E_j$, $g_i B_i' \subseteq g_i E_i$, $g_j E_j \cap g_i E_i = \emptyset$

Also $g_j A_j' \cap g_i B_i' = \emptyset \; \forall i, j$.

Aus Lemma 4.1 und $A' \sim E' \sim B'$ folgt: E' G-paradoxal. $\square$

4.3 Satz von Banach-Schröder-Bernstein.

G operiere auf X, $A, B \subseteq X$.

Ist $A \sim B_1 \subseteq B$ und $B \sim A_1 \subseteq A$ (Schreibweise $A \preccurlyeq B$, $B \preccurlyeq A$),

so gilt $A \sim B$.

Beweis Die Äquivalenzrelation $\sim$ erfüllt:

a) $A \sim B \Rightarrow$ es ex Bijektion $g: A \to B$ mit $\forall C \subseteq A$: $C \sim g(C)$

(denn: $A \sim B \Rightarrow A = \sum_{i=1}^{m} A_i$, $B = \sum_{i=1}^{m} g_i A_i$, definiere $g: A \to B$ bij. durch $A_j \mapsto g_j A_j$ $(j = 1..m)$, dh. $a \in A_j \Rightarrow g(a) := g_j(a)$.)

b) Ist $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ und $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, $A_1 \sim B_1$, $A_2 \sim B_2 \Rightarrow A_1 \cup A_2 \sim B_1 \cup B_2$.

Mit a) und b) zeige nun 4.3:

Sei $A \sim B_1 \subseteq B \overset{a)}{\Rightarrow} \exists f: A \to B_1$ bij

Sei $A \supseteq A_1 \sim B \overset{a)}{\Rightarrow} \exists g: A_1 \to B$ bij

Sei $C_0 = A \setminus A_1$, definiere induktiv $C_{n+1} = g^{-1}(f(C_n))$

$C := \bigcup_0^\infty C_n \overset{!}{\Rightarrow} g(A \setminus C) = B \setminus f(C)$

Nach Wahl von g und a) folgt: $A \setminus C \sim B \setminus f(C)$

Nach Wahl von f und a)/b) folgt: $A = (A \setminus C) \cup C \sim (B \setminus f(C)) \cup f(C) = B$

Also $A \sim B$

Satz 4.4

G operiere auf X, $E \subseteq X$. Dann gilt:

E ist G - paradoxal $\Leftrightarrow \exists A, B \subseteq E$, $A \cup B = E$, $A \cap B = \emptyset$ mit $A \sim E \sim B$.

Beweis „$\Leftarrow$" bewiesen!

„$\Rightarrow$" Nach 4.1: ex $C, D \subseteq E$, $C \cap D = \emptyset$, $C \sim E \sim D$

$\Rightarrow$ Nach dem Banach-Schröder-Bernstein-Theorem $E \preceq A$, $D \preceq B$,

$E \sim D \subseteq E \setminus C \subseteq E$ $\Rightarrow$ Nach 4.3: $E \sim E \setminus C$. Setze $\tilde{A} = C$, $\tilde{B} = E \setminus C \Rightarrow$ Beh. ∎

$G = G_n =$ Gruppe der Bewegungen im $\mathbb{R}^n$ = affine Isometrien im $\mathbb{R}^n$

Im $\mathbb{R}^2$ konstruiere nun paradoxale Mengen:

Satz 4.5 (Sierpinski - Mazurkiewicz - Paradoxon:)

Beh: Im $\mathbb{R}^2$ existiert eine G_2- paradoxale Menge

Beweis Sei $\tau(z) := z+1$ Translation und

$\varrho(z) = e^{i\theta} z$ Rotation um den Winkel θ und zwar mit θ so gewählt,

daß $e^{i\theta}$ transzendent (zB $\theta = 1$), dh $e^{i\theta}$ nicht Nst von Polynom mit

Koeff in $\mathbb{Z}$. Konstruiere nun die Menge E iterativ.

$E := \{0\} \cup \{\sigma_1^{m_1} \circ \sigma_2^{m_2} \circ \ldots \circ \sigma_N^{m_N}(0)$, $m_j \in \mathbb{N}$, $N \in \mathbb{N}$, $\sigma_j \in \{\tau, \varrho\}$ und $\sigma_{j+1} \neq \sigma_j$

E ist also abzählbar und unbeschränkt!

Setze $A := \tau(E)$ und $B := \varrho(E)$

Beh: $A \sim E \sim B$ (klar) bleibt für die Paradoxalität von E zz: $A \cap B \overset{!}{=} \emptyset$, $A \cup B =$

Beweis: $p \in E \overset{!}{\Leftrightarrow} p$ läßt sich als Polynom in $e^{i\theta}$ darstellen, dh $p = \sum_{j=0}^{n} n_j e^{i\theta j}$
mit $n_j \in \mathbb{N}_0$

Sei $p \in E$. Fall 1: $n_0 > 0 \overset{!}{\Leftrightarrow} p \in A$

Fall 2: $n_0 = 0 \Leftrightarrow p \in B$

Sei $q \in A \cap B \Rightarrow q = \underbrace{\sum_{j=0}^{N} n_j e^{i\theta j}}_{\text{Darst in } A} = \underbrace{\sum_{j=1}^{M} m_j e^{i\theta j}}_{\text{Darst in } B}$

$\sum_{j=0}^{\max(N,M)} (n_j - m_j) e^{i\theta j} = 0$ $(m_j = 0$ für $j = 0)$

$\Rightarrow 0 = n_0 +$ Polynom in $e^{i\theta}$ $\Rightarrow e^{i\theta}$ ist Nst von Poly mit Koeff $\in \mathbb{Z} \Rightarrow$ ↯ zur

Wahl von $e^{i\theta}$ $\Rightarrow A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = E$

D.h. im $\mathbb{R}^2$ ex. eine Menge E_1 die zu einer echten Teilmenge von sich selbst kongruent ist. Dies liegt im $\mathbb{R}^2$ an der Unbeschränktheit von E_1 denn:

Bem 1: Im $\mathbb{R}^2$ gibt es keine G_2-paradoxale beschränkte Menge mit nichtleerem Innern.

Bem 2: Offen ist, ob es solche mit leerem Innern gibt

Bem 3: Im $\mathbb{R}^1$ gibt es keine G_1-paradoxalen Mengen (außer $\emptyset$)

Im Folgenden werden nun Vorbereitungen dazu getroffen, die Einheitskugel im $\mathbb{R}^3$ als paradoxal nachzuweisen (Abstraktion der obigen Beweisidee.)

Definition

Sei G eine (mult.) Gruppe, $G^* = G \setminus \{1\}$. Eine Teilmenge $S \subseteq G^*$ heißt freies erzeugendes System von G, falls gilt:

Jedes $g \in G^*$ läßt sich in eindeutiger Weise in der Form darstellen:

$$g = x_1^{m_1} \cdots x_N^{m_N} \quad m_j \in \mathbb{Z}, \; N \in \mathbb{N}, \; x_j \neq x_{j+1} \quad x_j \in S$$

Diese Darstellung von g heißt Wort in reduzierter Darstellung

Falls $|S| = N$, heißt G freie Gruppe vom Rang N.

Bem. zur Definition

i) $m_j \in \mathbb{Z}$, da auch Inverse zu beachten sind (G hier Gruppe!)

ii) $x_j \neq x_{j+1}$ ist für die Eindeutigkeit wesentlich.

iii) G ist im allg. nicht abelsch, also Anordnung beachten!

iv) Bsp $G = \mathbb{Z}$ (additiv!), $S = \{1\}$ $\Rightarrow$ $\mathbb{Z}$ frei vom Rang 1.

v) Zur Konstruktion der paradoxalen Menge im $\mathbb{R}^3$ benötigen wir eine freie Gruppe vom Rang 2.

Bem: Es sei G eine freie Gruppe mit dem Erzeugendensystem $S=\{\sigma,\tau\}$ (d.h. der Rang der freien Gruppe sei $=2$)

Beh: dann läßt sich jedes $g\in G^*$ eindeutig in der Form

(*) $g = x_1^{m_1}\cdots x_N^{m_N}$, $m_j\in\mathbb{N}$, $x_j, x_j^{-1}\neq x_{j+1}$, $x_j\in\{\sigma,\tau,\sigma^{-1},\tau^{-1}\}$

darstellen.

Satz 4.6 Jede freie Gruppe G vom Rang 2 ist paradoxal über sich selbst (durch Linkstranslation)

Beweis Sei $\{\sigma,\tau\}$ erzeugendes System. Zu $\varrho\in\{\sigma,\sigma^{-1},\tau,\tau^{-1}\}$ bilde die Mengen

$W(\varrho)$:= Menge aller Wörter, welche links mit ϱ beginnen in der Darstellg (*) von obiger Bem.

Es gilt:

- $G=\{1\}\cup W(\sigma)\cup W(\sigma^{-1})\cup W(\tau)\cup W(\tau^{-1})$
- (1) $W(\sigma)\cup \sigma W(\sigma^{-1}) = G$

  (2) $W(\tau)\cup\tau W(\tau^{-1}) = G$
- $W(\sigma)\cap\sigma W(\sigma^{-1})=\emptyset$
- $W(\tau)\cap\tau W(\tau^{-1})=\emptyset$

keine Kürzung

Bew, (1) $\omega\in G^*$, $\omega\notin W(\sigma) \Rightarrow \sigma^{-1}\omega\in W(\sigma^{-1}) \Rightarrow \omega=\sigma\sigma^{-1}\omega\in\sigma W(\sigma^{-1})$ ■

(2) analog

Definition

Die Gruppe G operiere auf X. $x_0\in X$ heißt Fixpunkt der Operation, falls existiert $g\in G\setminus\{1\}$: $gx_0=x_0$.

Sonst heißt die Operation fixpunktfrei

Satz 4.7

Die Gruppe G operiere fixpunktfrei auf X. Weiterhin sei G paradoxal über sich selbst durch Linkstranslation. Dann ist X G-paradoxal.

Beweis

Seien $A_1, \dots, A_n \subseteq G$, $B_1, \dots, B_m \subseteq G$, paarweise disj, $g_1, \dots, g_n$, $h_1, \dots, h_m \in G$

$\bigcup_{j=1}^{n} g_j A_j = G$, $\bigcup_{i=1}^{m} h_i B_i = G$ (ex, da G als Menge durch Linkstranslation über sich selbst paradoxal ist).

Sei $x \in X$ und $O(x) := \{gx : g \in G\}$ das Orbit von x.

Die Menge der Orbits bilden eine Zerlegung von X (*)

($x \sim y :\Leftrightarrow \exists g \in G : y = gx$ ist Äquivalenzrel mit Klassen = Orbits)

Wähle gemäß Auswahlaxiom (!) aus jedem Orbit genau ein m.

Sei M die Menge dieser Vertreter.

Dann gilt: $\{g(M) : g \in G\}$ ist Zerlegung von X

(hierzu benötigt man die Fixpunktfreiheit der Operation! Sonst erhält man mit dieser Konstruktion keine Zerlegung!).

Beweis $X = \bigcup_{g \in G} g(M)$ klar

Ann ex $g, h \in G$: $g(M) \cap h(M) = \emptyset$

$\Rightarrow$ ex $y_1, y_2 \in M$: $g(y_1) = h(y_2) \Rightarrow y_2 = h^{-1} g(y_1) \Rightarrow y_1 \sim y_2$ ↯ zu M Vertretersyst!

$\Rightarrow y_1 = y_2 = m \in M \Rightarrow g(m) = h(m) \Rightarrow (h^{-1}g)(m) = m \Rightarrow$ Fixpunktfreiheit $\Rightarrow h^{-1}g = 1$

$\Rightarrow g = h$ ↯ zur Ann $\square$

Setze $A_i^* := \bigcup_{g \in A_i} gM$ $\quad B_j^* := \bigcup_{g \in B_j} gM$ $\quad j = 1..m$, $i = 1..n$

$\Rightarrow A_i^* \cap B_j^* = \emptyset$, da $\{g(M), g \in G\}$ Partition von X und A_i, B_j disj!

und Beh: $X = \bigcup_{i=1}^{n} g_i A_i^* = \bigcup_{j=1}^{m}$

Bew: $x \in X \Rightarrow \exists m \in M$ = Vertretersystem, $\exists g \in G : x = g(m)$ (da $x \in O(x) = O(m)$)

Wegen $G = \bigcup^{n} g_i A_i$ ex i_0: $g \in g_{i_0} A_{i_0} \Rightarrow g = g_{i_0} \tilde{g}_{i_0}$ ($\tilde{g}_{i_0} \in A_{i_0}$)

 $\Rightarrow x = (g_{i_0} \tilde{g}_{i_0})(m) = g_{i_0}(\tilde{g}_{i_0}(m)) \in g_{i_0} A_{i_0}^* \Rightarrow$ Beh

Ziel wird sein, im $\mathbb{R}^3$ eine frei erzeugte Untergruppe der Bewegungen anzugeben

(Wäre G vom Rg 2, so automatisch paradoxal über sich selbst, also reicht nach Satz 4.7 noch Fixpunktfreiheit ⇒ Beh. Problem: Im $\mathbb{R}^3$ findet man keine frei erzeugte Untergruppe der Bewegungsgruppe, die fixpunktfrei operiert).

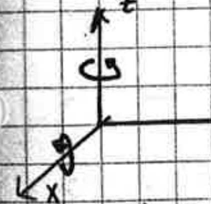
Keine Fixpunktfreiheit → Ausweg nach Hausdorff.

SO_3 = Gruppe der Rotationen der Einheitskugel um 0 mit det = 1.

(≙ orthogonale 3x3 Matrizen).

Beh: SO_3 enthält eine freie Gruppe vom Rang 2.

Beweis:



Wähle als Erzeugendes System die Rotation φ um die z-Achse mit Winkel $\arccos 1/3$ und Rotation ρ um die x-Achse mit Winkel $\arccos 1/3$ (jeweils im pos. Sinn) $\varphi = \varphi^+$, $\rho = \rho^+$

$$\varphi^{\pm} = \begin{pmatrix} 1/3 & \mp\frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ \pm\frac{2\sqrt{2}}{3} & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \varphi^- = (\varphi^+)^{-1} \qquad \rho^{\pm} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & \mp\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & \pm\frac{2\sqrt{2}}{3} & 1/3 \end{pmatrix} \quad \rho^- = (\rho^+)^{-1}$$

Beh: φ, ρ erzeugen eine freie Gruppe:

z.z.: Kein reduziertes Wort mit Symbolen aus $\{\varphi, \rho\}$ ist die Ident. $\begin{pmatrix} 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1 \end{pmatrix}$

Bew: Sei W reduziertes Wort.

Betrachte die von W erzeugte Matrix und wende diese auf $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ an.

OBdA ende d. Wort W mit dem Element $\varphi^{\pm}$ (betrachte sonst $W\varphi^{-1}\varphi$)

Beh: $W\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{3^k}\begin{pmatrix}a\\b\sqrt{2}\\c\end{pmatrix}$ $a,b,c \in \mathbb{Z}$ aber $3 \nmid b$, insbes. also $b \neq 0$

(dann gilt $W\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, also $W \neq id$)

Bew: (Induktion über die Länge dieses Wortes).

$n=1 \Rightarrow$ (OBdA-Ann!) $W = \varphi^{\pm} \Rightarrow W\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}a\\b\sqrt{2}\\c\end{pmatrix}$ mit $a=1, b=2, c=0$, $3 \nmid 2$ ✓

$n \geq 1, n \to n+1$: $W = \varphi^{\pm}W'$ oder $W = \rho^{\pm}W'$, W' Wort der Länge n, $W'\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{3^n}\begin{pmatrix}a'\\b'\sqrt{2}\\c'\end{pmatrix}$

$$W\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{3^{n+1}}\begin{pmatrix}a\\b\sqrt{2}\\c\end{pmatrix} \text{ mit } \begin{cases} a = a' \mp 4b',\ b = b' \pm 2a',\ c = 3c', & \text{falls } W = \varphi^{\pm}W' \\ a = 3a',\ b = b' \mp 2c',\ c = c' \pm 4b', & \text{falls } W = \rho^{\pm}W' \end{cases}$$

$a, b, c \in \mathbb{Z}$, z.z. $3 \nmid b$

4 Fälle: (1) $\omega = \varphi^{\pm}\rho^{\pm}v'$ mit v' erfüllt $= 1$ (falls $n=2$)

(2) $\omega = \rho^{\pm}\varphi^{\pm}v'$

(3) $\omega = \varphi^{\pm}\varphi^{\pm}v'$ $\qquad v' = \frac{1}{3^{n-2}}\begin{pmatrix} a'' \\ b''\sqrt{2} \\ c'' \end{pmatrix}$

(4) $\omega = \rho^{\pm}\rho^{\pm}v'$

(1) $b = b' \pm 2a'$ mit $a' = 3a''$ und $3 \nmid b' \Rightarrow 3 \nmid b$

(2) $b = b' \mp 2c'$ $\quad 3 \nmid b'$, $c' = 3c'' \Rightarrow 3 \nmid b$

(3) $b = b' \pm 2a'$, $a' = a'' \mp 4b''$, $3 \nmid b'$, $3 \nmid b''$

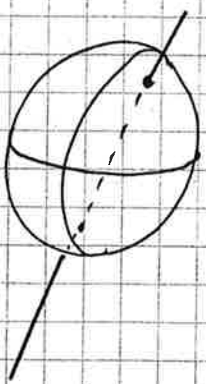
$b = b' \pm 2(a'' \mp 4b'') = b' \pm 2a'' - 8b'' = b' + \underbrace{(b'' \pm 2a'')}_{b'} - 9b'' = \underset{3\nmid}{2b'} - \underset{3|}{9b''} \Rightarrow 3 \nmid b.$

(4) analog ■

Hausdorff-Paradoxon 4.9

Es existiert eine abzählbare Teilmenge D von S^2 (= Einheitssphäre im $\mathbb{R}^3$), für welches $S^2 \setminus D$ SO_3-paradoxal (bzgl S^2) ist

Beweis Sei G die freie Gruppe, welche durch φ und ρ von oben erzeugt wird.



Sei $\tau \in G \setminus \{1\} \Rightarrow \tau$ hat genau 2 Fixpunkte auf S^2.

Da G abzählbar ist, ist $D :=$ Menge aller Fixpkte von El aus $G \setminus \{1\}$ abzählbar.

Beh: $S^2 \setminus D$ ist SO_3-paradoxal.

Zeige: G operiert fixpunktfrei auf $S^2 \setminus D$ ($\Rightarrow S^2 \setminus D$ paradox über G $\Rightarrow SO_3$ paradox über SO_3).

Sei nun $p \in S^2 \setminus D$, $g \in G \overset{!}{\Rightarrow} g(p) \in S^2 \setminus D$, dh wieder kein Fixpunkt

(Ang ex $h \in G$: $h(g(p)) = g(p) \Rightarrow g^{-1}hg(p) = p \Rightarrow p \in D$ ↯).

G operiert also fixpunktfrei auf $S^2 \setminus D \Rightarrow$ aus Satz 4.2/3 folgt:

$S^2 \setminus D$ ist G-paradoxal, $G \subseteq SO_3 \Rightarrow S^2 \setminus D$ ist SO_3-paradoxal ■

Lemma 4.10

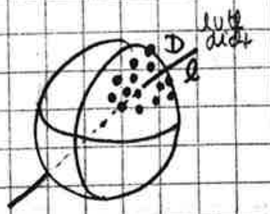
Es sei D abzählbar, $D \subseteq S^2$. Dann gilt $S^2\setminus D \overset{SO_3}{\sim} S^2$

Beweis Sei $g\in SO_3$ mit paarweise disjunkten Iterierten $D, g(D), g^2(D), \dots$

Dann gilt: $S^2 = E \cup (S^2\setminus E)$ mit $E = \bigcup_{n=0}^{\infty} g^n(D)$ $\quad (g^0(D) := D)$

$$S^2 \sim g(E) \cup (S^2\setminus E) = S^2\setminus D.$$

Existenz eines solchen g:



Sei l Gerade durch den Nullpunkt, welche D nicht schneidet

Sei $A := \{\theta \in [0,2\pi) : \exists n\in\mathbb{N}\ \exists p\in D : \underbrace{g^{(l)}_{n\theta}}(p) \in D\}$

$A \neq \emptyset$, A abzählbar || Rotationen um Achse l um den $\sphericalangle$ $n\theta$.

$\Rightarrow$ ex ein Winkel $\psi \in [0,2\pi)\setminus A$

Setze $g = g^{\psi(l)}$ = Drehung um die Achse l um Winkel ψ

$\Rightarrow D \cap g^m(D) = \emptyset \quad \forall m$

und für $n \geq m$: $g^m(D)\cap g^n(D) = \emptyset$, da $g^{n-m}(D)\cap D = \emptyset$.

$S^2\setminus D$ ist paradoxal, $S^2\setminus D \sim S^2 \Rightarrow S^2$ paradoxal ■

4.11 Banach-Hausdorff-Tarski-Paradoxon

(1) S^2 ist SO_3-paradoxal

(2) B^3 ist G_3-paradoxal

Beweis (1) aus Hausdorff-Paradoxon $\Rightarrow S^2\setminus D$ ist SO_3 paradoxal, D abzählbar, $S^2 \supseteq$

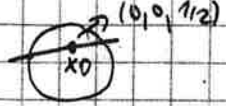
$\Rightarrow$ nach 4.6: $(S^2\setminus D \sim S^2)$: S^2 ist SO_3-paradoxal

(2) Jede SO_3-paradoxale Zerlegung der Oberfläche S^2 von B^3 liefert eine solche (SO_3)-paradoxale Zerlegung von $B^3\setminus\{0\}$ durch die Vorschrift:

$$p \in S^2 \mapsto \{\alpha p \mid 0 < \alpha \leq 1\}$$

$B^3\setminus\{0\}$ ist SO_3-Paradoxal, d.h. ohne Translationen

Zeige $B^3\setminus\{0\} \sim B^3$ (allerdings aber mit Translationen)



Betrachte dann $P = (0,0,1/2)$

Sei g eine Rotation (bzgl der Achse ℓ, welche durch P geht, $0 \notin \ell$), welche in der Gruppe unendliche Ordg. hat ($g^n \neq id \ \forall n$).

Setze $E := \{g^n(0) : n \in \mathbb{N}_0\}$ $\quad (g^0(0) = 0)$

$\Rightarrow g(E) = E \setminus \{0\}$

$B^3 = E \cup B^3 \setminus E \sim g(E) \cup (B^3 \setminus E) = B^3 \setminus \{0\}$

$B^3 \setminus \{0\}$ ist G_3-paradoxal und $B^3 \setminus \{0\} \sim B^3 \Rightarrow B^3$ ist G_3-paradoxal ■

4.12 Banach-Hausdorff-Tarski-Paradoxon (allg Version)

Jede beschränkte Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}^3$, mit Inneren $X^\circ \neq \emptyset$ ist G_3-äquidecomposable zu B^3 ($B^3 \sim X$)

Beweis $X^0 \neq \emptyset \Rightarrow$ ex Kugel $L \subseteq X$

Wähle Translationen τ_j ($j = 1..n$) mit $B^3 \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} \tau_j(L)$ (nicht notwendig disj.)

Wähle Translationen τ_j^* mit $\tau_j^* L \cap \tau_k^* L = \emptyset$ ($j \neq k$) und $j = 1..n$ gl. Anzahl

Setze $S = \sum_{j=1}^{n} \tau_j^* L \overset{(1)}{\Rightarrow} S \underset{G_3}{\sim} L$ $\quad$ (1) s.u.

$\Rightarrow B^3 \overset{(2)}{\preceq} S$ (äquivalent zu einer Teilmenge)

$\Rightarrow B^3 \preceq S \sim L \subseteq X \Rightarrow B^3 \preceq X$

X beschränkt $\Rightarrow X \subseteq$ Kugel $K \Rightarrow$ wie oben $X \subseteq K \preceq B^3$

$\Rightarrow$ nach Banach-Schröder-Bernstein Theorem: $X \sim B$.

Beweis von (1): L ist G_3-paradoxal $\Rightarrow L = A_1 \cup B_1$ mit $A_1 \sim L \sim B_1$

Vollst. Induktion $\Rightarrow$ Beh. (Benutze Satz: X G-para $\Leftrightarrow X = A \cup B$ $A, B \sim X$)

Beweis von (2): $B^3 \subseteq \bigcup_1^n \tau_j L = \sum_1^n K_j$, $K_j \subseteq \tau_j L$ (umschreiben in disj. Vereinigg)

$\Rightarrow \tau_j^{-1} K_j \subseteq L \Rightarrow K_j \sim \underbrace{\tau_j^* (\tau_j^{-1}}_{\sigma_j} K_j) \subseteq \tau_j^* L$

$\Rightarrow B_3 \subseteq \sum K_j \sim \sum \sigma_j K_j \subseteq \sum \tau_j^* L = S$

$\Rightarrow B^3 \preceq S$ □

Auswirkungen auf die Maßtheorie

Satz 4.13

(1) Es existiert kein Inhalt μ auf $\mathcal{P}(S^{n-1})$ (S^{n-1}: Sphäre im $\mathbb{R}^n$), welcher SO_n – rotationsinvariant ist mit $\mu(S^{n-1}) = 1$ (Normierung, sonst $=\infty$ wählbar)
(d.h. es ex. keine additive Fortsetzung des rotationsinvarianten Lebesguemaßes auf den Lebesguemengen) (schon früher über Vitali-menge: ex keine σ-add. Fortsetzung)

(2) Es existiert kein Inhalt μ auf $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, welcher G_n – invariant ist mit $\mu([0,1]^n) = 1$ für $n \geq 3$.

Beweis

Fall $n=3$:

(1) S^2 ist SO_3-paradoxal $\Rightarrow S^2 = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$, $A \sim S^2 \sim B$.

Ang. es existiert so ein μ

$\Rightarrow 1 = \mu(S^2) = \mu(A) + \mu(B) = \mu(S^2) + \mu(S^2) = 2$ ↯

Beachte: $A \sim B \Rightarrow A = \sum_{j=1}^{N} A_j$, $B = \sum_{j=1}^{N} \tau_j A_j \Rightarrow \mu(A) = \mu(B)$, wegen der Rotationsinvarianz, $\tau_j \in SO_3$, G_3.

(2) Ang., ex Inhalt μ auf $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ mit μ G_3-invariant und $\mu([0,1]^n) = 1$

$\Rightarrow \mu(B^3) \overset{!}{=} \lambda(B^3) = \frac{4}{3}\pi$ ausschöpfen durch Würfel

$\Rightarrow \nu := \frac{3}{4\pi}\mu$ ist Inhalt mit $\nu(B^3) = 1 \Rightarrow \nu$ induziert auf der Oberfläche S^2 einen SO_3-invarianten Inhalt ω durch die Vorschrift:

$A \subseteq S^2 \Rightarrow \omega(A) := \nu(\{tP,\ P \in A,\ 0 < t \leq 1\})$

ω ist SO_3-invariant $\Rightarrow$ ↯ zu (1)

hier sogar $0 \leq t \leq 1$, da $\nu(x) = 0$
(Beweis über kleine Würfel, Normierung $\to 0$) ∎

Übertragung auf n für $n \geq 3$:

(2) Ann ex Inhalt $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0,\infty]$, μ G_n-invariant, $\mu([0,1]^n) = 1$.

Definiere mittels μ einen invarianten Inhalt auf $\mathbb{R}^3$:

Zu $A \subseteq \mathbb{R}^3$ definiere $\nu(A) := \mu(A \times [0,1]^{n-3})$ $\Rightarrow$ ν Inhalt!

Sei M eine orthogonale Matrix in $\mathbb{R}^3$ und $x \in \mathbb{R}^3$ (d.h. Isometrie mit $0 \mapsto 0$)

$\Rightarrow$ $\tilde{M} := \begin{pmatrix} M & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$ ergibt orthogonale Matrix in $\mathbb{R}^n$

$$\nu(MA+x) = \mu((MA+x) \times [0,1]^{n-3}) = \mu(\tilde{M}(A \times [0,1]^{n-3}) + (x, \overbrace{0 \dots 0}^{n-3})^T) = \mu(A \times [0,1]^{n-3}) = \nu(A)$$

$\Rightarrow$ ν ist G_3-invariant.

$\nu([0,1]^3) = \mu([0,1]^n) = 1$

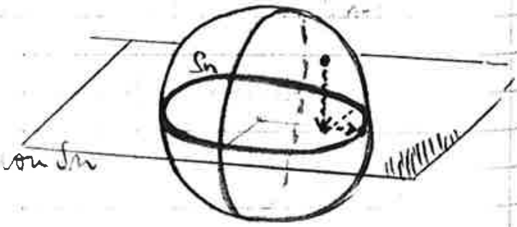
$\Rightarrow$ ν ist G_3-invarianter, normierter Inhalt auf $\mathbb{R}^3$ ↯ zu Fall $n=3$: (2).

(1) Daß es auf S_{n-1} $(n>3)$ keinen SO_n-invarianten Inhalt gibt mit $\mu(S_{n-1}) = 1$, folgt wie im Fall $n=3$ aus der SO_n-Paradoxalität von S_{n-1}. Dazu der Beweis:

Über vollständige Induktion:

$n=3$ schon bewiesen

$n+1 \rightsquigarrow n+2$: Es sei A_j, B_k paradoxale Zerlegung von S_n



$(x_1, \dots, x_{n+1}, t) \in S_{n+1}$ mit $t \neq \pm 1$

Es sei $(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}, t) \in A_j^*$, falls gilt: $\dfrac{(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})}{\|(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})\|_2} \in A_j$ ($\|\cdot\|_2$ Euklidnorm)

— " — $\in B_k^*$, — " — $\in B_k$

$\Rightarrow$ A_j^*, B_k^* bilden eine SO_{n+2}-paradoxale Zerlegung von $S_{n+1} \setminus \{-1, 1\} \subseteq \mathbb{R}^{n+2}$

$\Rightarrow$ $S_{n+1} \overset{SO_{n+2}}{\sim} S_{n+1} \setminus \{\pm 1\}$

$\Rightarrow$ S_{n+1} ist SO_{n+2} paradoxal. ■

Definition:

Sei G Gruppe, $B(G) :=$ VR aller beschränkten reellen Funktionale auf G.

Ein reelles lineares Funktional ϕ auf $B(G)$ heißt linksinvariantes Mittel auf G,

falls gilt: i) $\phi(f) \geq 0 \quad \forall f \geq 0$

Analoge Def bei Verschiebungen im additiven Fall

ii) $\phi(\chi_G) = 1$

iii) $\phi({}_x f) = \phi(f)$ mit $({}_x f)(u) := f(x^{-1}u)$

G heißt mittelbar (oder amenabel), falls es solch ein ϕ gibt.

Bem: Sei G amenabel, $A \subseteq G$, Setze $\mu(A) := \phi(\chi_A)$

$\Rightarrow$ (I) $\begin{cases} \mu \text{ ist Inhalt auf } P(G) \text{ (Additivität klar)} \\ \mu(G) = \phi(\chi_G) = 1 \quad \text{(da } \phi \text{ ein Mittel!)} \\ \mu \text{ ist } G\text{-invariant, dh. für } A \subseteq G: \mu(gA) = \phi(\chi_{gA}) \overset{!}{=} \phi({}_g\chi_A) = \phi(\chi_A) = \mu(A) \end{cases}$

Linkstranslation von χ_A um g

Linkstrans!

(beachte: $\chi_{gA}(u) = \begin{cases} 1 & u \in gA \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} = \begin{cases} 1 & g^{-1}u \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} = \chi_A(g^{-1}u) = ({}_g\chi_A)(u)$)

Umgekehrt: Sei G Gruppe und μ Inhalt auf G mit (I). Dann ist G amenabel,

denn (Beweisskizze!) μ definiert das lineare Funktional $\phi(f) = \int_G f \, d\mu$

Hierbei definiert man Integrale bzgl. Inhalt μ wie bei Maßen:

(i) $\int \chi_A \, d\mu := \mu(A)$

(ii) $0 \leq f \in B(G) \Rightarrow$ ex Folge von Elementarfunktionen $s_n = \sum_{j=1}^{m_n} \alpha_j \chi_{A_j}$ mit $s_n \nearrow f$

$\int f \, d\mu := \lim_n \int s_n \, d\mu$.

(iii) $f \in B(G)$ bel. $\Rightarrow f = f^+ - f^-$, $f^{+/-} \geq 0 \Rightarrow$ (ii)

Satz 4.14 Folgende Gruppen sind amenabel:

(1) endliche Gruppen

(2) Untergruppen von amenablen Gruppen

(3) Abelsche Gruppen

(4) Auflösbare Gruppen

Beweis siehe Anhang

Beispiel:

- Ist G eine freie Gruppe vom Rang 2 (z.B. $\mathbb{R}^3$-Rotationen), so ist G nicht amenabel.
- Allg: Ist G eine Gruppe, welche bzgl. Linkstranslation über sich selbst paradoxal ist, so ist G nicht amenabel.

Beweis G paradoxal $\Rightarrow$ ex $A, B \subseteq G$, $A \cap B = \emptyset$, $A \sim G \sim B$, $A \cup B = G$

Ann. G ist amenabel $\Rightarrow$ ex Inhalt μ auf G, $\mu(G) = 1$, μ G-invariant (bzgl. Linkstransl.)

$\Rightarrow 1 = \mu(G) = \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) = \mu(G) + \mu(G) = 2$ ↯ □.

4.15 Satz von Tarski

Sei G Gruppe, welche auf X operiert, $E \subseteq X$, $E \neq \emptyset$, E Obermenge einer Orbit. Ind.

Dann sind äquivalent:

(1) es ex G-invarianter Inhalt μ auf X mit $\mu(E) = 1$

(2) E ist nicht G-paradoxal

(3) G ist amenabel.

Beweis (nur für die trivialen Implikationen $3 \Rightarrow 1 \Rightarrow 2$) ($2 \Rightarrow 3$ nicht trivial!)

(3)⇒(1): Es sei G amenabel $\Rightarrow$ es ex G-invarianter Inhalt μ auf $\mathcal{P}(G)$ mit $\mu(G) = 1$, Konstruiere nun Inhalt ν auf $\mathcal{P}(X)$ ausgehend von μ:

Sei $x_0 \in E$, definiere den Inhalt(!) $\nu: \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ durch

$$A \in \mathcal{P}(X): \quad \nu(A) := \mu(\{g \in G : gx_0 \in A\})$$

$\Rightarrow \nu$ ist Inhalt mit $\nu(X) = \mu(G) = 1$

da $\mathcal{O}(x_0) \subseteq E \Rightarrow 1 \overset{!}{=} \nu(\mathcal{O}(x_0)) \leq \nu(E) \leq \nu(X) = 1 \Rightarrow \nu(E) = 1$ und ν ist G-invariant.

also gilt (1).

(1)⇒(2): wie oben im Bsp durch Widerspruchsannahme.

(2)⇒(3): nicht trivial!

4.16 Satz (von Neumann, Banach)

Sei G Gruppe. Dann sind äquivalent:

(1) G amenabel

(2) "G hat die Hahn-Banach-Eigenschaft", d.h.

Aus $\left\{\begin{array}{l} G \text{ operiert linear auf dem VR } V \\ - V_0 \subseteq V \text{ ist } G\text{-invarianter UVR von } V \\ - \phi: V_0 \to \mathbb{R} \text{ ist } G\text{-invariantes Funktional auf } V_0 \\ - \phi \text{ wird dominiert durch } p: \phi(v) \leq p(v) \ \forall v \in V_0 \\ \text{mit } p \text{ ist } G\text{-invariantes sublineares Funktional} \\ \text{auf } V. \end{array}\right\}$ folgt $\left\{\begin{array}{l} \phi \text{ hat eine} \\ G\text{-invariante} \\ \text{Fortsetzg auf } V \\ \text{mit } \phi \leq p \text{ auf } V \end{array}\right.$

Beweis

(1)⇒(2) Sei G amenabel und ϕ G-invariantes Funktional auf $V_0 \subseteq V$, V_0 G-invariant

$\phi \leq p$ auf V_0 $\Rightarrow$ nach Hahn-Banach ex Fortsetzung $F_0: V \to \mathbb{R}$ mit $F_0 \leq p$

konstr. zur G-invarianz:

Definiere für $v \in V$: $f_v := \begin{cases} G \to \mathbb{R} \\ u \mapsto F_0(u^{-1}v) \end{cases}$

Behauptung: f_v ist beschränkt.

Wegen $F_0(u^{-1}v) \leq p(u^{-1}v) \overset{?}{=} p(v)$ (G-invariantes sublin. Funktional p !!)

$\Rightarrow f_v \leq p(v) \Rightarrow f_v \in B(G)$

G amenabel $\Rightarrow$ ex Mittel M

Definiere $\psi(v) := M(f_v)$

Dann gilt:
- $\psi(v) = M(f_v) \leq M(p(v)) = p(v)$
- ψ linear
- ψ ist Fortsetzung von ϕ: $v_0 \in V_0 \Rightarrow$

  $\psi(v_0) = M(f_{v_0}) = M(F_0(u^{-1}v_0)) = M(\phi(u^{-1}v_0)) = \underbrace{M(\phi(v_0))}_{\text{konst}} = \phi(v_0)$
- ψ ist G invariant: Sei $g \in G$

  $\psi(gv) = M(f_{gv}) \overset{!}{=} M(l_g(f_v)) \underset{M \text{ Mittel}}{=} M(f_v) = \psi(v)$

$\Rightarrow \psi$ ist eine solche Fortsetzg aus (2).

(2)⇒(1): Sei $V = B(G)$, $V_0 := \{$ constante Fktn $\}$

G operiert linear auf V durch $f \mapsto {}_x f$ für $x \in G$.

Setze $\phi: \begin{cases} V_0 \to \mathbb{R} \\ v_0 \mapsto \phi(v_0) = \alpha \end{cases}$ falls $v_0 = \alpha \chi_G$

ϕ ist ein lineares, G-invariantes Funktional

$p(f) := \sup \{ f(u), u \in G \}$ für $f \in V$

$\Rightarrow \phi(v_0) = \alpha = p(v_0)$

Nach (2) hat ϕ eine G-invariante Fortsetzung Ψ auf V mit $\Psi \le p$.

Ψ ist G-invariantes Mittel auf V.

Beweis: – Ψ linear

– $\Psi(\chi_G) = \phi(\chi_G) = 1$

– $f \ge 0$, $f \in V \Rightarrow \Psi(f) \ge 0$, denn:

für $f \ge 0$ ist per Def. von p: $p(-f) \le 0 \Rightarrow \Psi(-f) \le p(-f) \le 0 \Rightarrow$

$\Psi(f) = -\Psi(-f) \ge 0$ □.

Fazit: G ist amenabel ■

4.16 Theorem von Banach, von Neumann und Mycielski

Sei $G \subseteq G_n$ (Bewegungsgruppe des $\mathbb{R}^n$) und G sei amenabel.
(zB G = Gruppe der Translationen auf $\mathbb{R}^n$ ⇒ G abelsch ⇒ G amenabel)
Dann ex eine G-invariante, additive Fortsetzung des Lebesguemaßes λ^n auf $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$

Folge: $n \ge 3$: G_n kann nicht amenabel sein

s.u.: G_2 ist auflösbar ⇒ s.u.: amenabel.

Beweis $V_0 := \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)$, $V := \{ f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : \exists g \in V_0 : f(x) \le g(x)\ \forall x \in \mathbb{R}^n \}$

V ist G invariant wegen der G-invariant des Lebesguemaßes

(*) Beachte: $f \in V$ u. $\tilde{f} \ge f \Rightarrow \tilde{f} \in V$.

Definiere: $\phi(f) := \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\lambda^n$ für $f \in V_0$

 Da das Lebesguemaß λ^n bewegungsinvariant: ϕ ist G_n-invariant, also G-invariant

Definiere $p: \begin{cases} V \to \mathbb{R}^+ \\ f \mapsto \inf\{\Phi(g) : f \leq g, g \in V_0\} \end{cases}$

Dann ist p ein sublineares Funktional, p ist G-invariant.

$\overset{4.15}{\Rightarrow}$ Es exist. lineare G-invariante Fortsetzung Ψ von Φ auf V mit $\Psi \leq p$.

Setze für $A \subseteq \mathbb{R}^n$: $\mu(A) := \begin{cases} \Psi(\chi_A) & \text{, falls } \chi_A \in V \\ \infty & \text{, sonst} \end{cases}$

- Beh.: μ ist Inhalt!

Bew. $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$, $A \cap B = \emptyset$, $\mu(A \cup B) = \Psi(\chi_{A\cup B}) = \Psi(\chi_A + \chi_B) = \Psi(\chi_A) + \Psi(\chi_B) = \mu(A) + \mu(B)$
(falls χ_A und $\chi_B \in V$)

Falls (OBdA) $\chi_A \notin V \Rightarrow$ Wegen $\chi_{A\cup B} \geq \chi_A$ und (*): $\chi_{A\cup B} \notin V \Rightarrow \mu(A\cup B) = \infty = \mu(A) + \mu(B)$

- μ ist G-invariant, denn: Sei $g \in G$ und $A \subseteq \mathbb{R}^n$

Falls $\chi_{gA} \in V$: $\mu(gA) = \Psi(\chi_{gA}) = \Psi({}_g\chi_A) = \Psi(\chi_A) = \mu(A)$

Falls $\chi_{gA} \notin V$: $\chi_A \notin V$ wegen G-Invarianz v. V $\Rightarrow$ $\mu(gA) = \infty = \mu(A)$.

- $\mu|_{V_0} = \lambda^n$, denn: A Lebesguemb. $\Rightarrow \mu(A) = \Psi(\chi_A) = \Phi(\chi_A) = \lambda^n(A)$
- $\mu \geq 0$, denn: $f \geq 0 \Rightarrow -f \leq 0 \Rightarrow \Psi(-f) \leq p(-f) \leq 0$ per Def von $p \Rightarrow \Psi(f) = -\Psi(-f) \geq 0$.

(Bem.: insbesondere ~~[illegible]~~ $f = \chi_A$) ∎

4.17 Korollar

Das Lebesguemaß im $\mathbb{R}^1$ und $\mathbb{R}^2$ hat eine bewegungsinvariante additive Fortsetzung auf die Potenzmenge.

Beweis: Aus 4.16 und der Tatsache, daß G_1 abelsch, G_2 auflösbar, also nach 4.14 amenabel ∎

4.18 Korollar:

Es gibt im $\mathbb{R}^1$ und $\mathbb{R}^2$ keine beschränkten, G_n-paradoxalen Teilmengen E mit $E^0 \neq \emptyset$

Beweis ($n = 1,2$) Ann. ex. μ Inhalt, μ G_n-invariant, Fortsetzg. von λ^n $\Rightarrow$

$\underset{\uparrow}{0 <} \mu(E) \underset{\uparrow}{<} \infty$ $\Rightarrow$ üblicher Schluß: E ist nicht G_n-paradoxal (Widerspr.!)

- E enthält offene Kugel
- beschränkt $\Rightarrow$ E liegt in offener Kugel!

4.19 Korollar:

Das Lebesguemaß λ^n hat im $\mathbb{R}^n$ eine translationsinvariante additive Fortsetzung (da die Gruppe der Translationen abelsch und damit amenabel).

ANHANG G

① Beweis von Satz 4.17

(1) Beh.: Jede endliche Gruppe ist amenabel:

Bew.: $\mu(A) := \frac{|A|}{|G|}$

(2) Sei G amenabel und H Untergruppe von G, Beh.: H ist amenabel.

Sei μ G-invarianter Inhalt auf G mit $\mu(G)=1$

Wähle aus dem System der Rechtsklassen von H jeweils genau einen Vertreter, sei M diese Menge.

Definiere $\nu: \mathcal{P}(H) \to [0,1]$ durch $A \subseteq H$, $\nu(A) := \mu(\sum_{g\in M} Ag)$

Dann ist ν Inhalt, $\nu(H)=1$, ν ist H-invariant, da

$$\nu(hA) = \mu(\sum_{g\in M} hAg) = \mu(h\cdot \sum_{g\in M} Ag) \underset{\mu\ G\text{-inv.}}{=} \mu(\sum_{g\in M} Ag) = \nu(A)$$

$\Rightarrow$ Beh. mit 4.15. □.

(3) Endlich erzeugte abelsche Gruppen sind amenabel:

Beweis (*) Beh.: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \mu_\varepsilon : \mathcal{P}(G) \to [0,1]$ mit

(i) $\mu_\varepsilon(G) = 1$

(ii) μ_ε ist Inhalt

(iii) ("approximative Invarianz")

$\forall A \subseteq G$, $\forall g_k \in \mathcal{E} = [g_1, \dots g_n] =$ Erzeugendensystem

gilt: $|\mu_\varepsilon(A) - \mu_\varepsilon(g_k A)| \leq \varepsilon$.

Bew. von (*):

Fall 1: $\mathcal{E} = [g_1]$.

Wähle $N \in \mathbb{N}$, so dass $\frac{2}{N} \leq \varepsilon$

Definiere $\mu_\mathcal{E}(A) := \frac{1}{N} \left| \{ i : 1 \le i \le N,\ g_1{}^i \in A \} \right|$

$\Rightarrow$ (i) $\mu_\mathcal{E}(G) = 1$ ✓, (ii) ✓, (iii) $|\mu_\mathcal{E}(A) - \mu_\mathcal{E}(g_1 A)| \le \frac{2}{N} < \varepsilon$

Unterschied ist höchstens 1 Potenz.

Fall 2: $\mathcal{E} = \{g_1 \dots g_k\}$, $N \in \mathbb{N}$: $\frac{2}{N} < \varepsilon$

Definiere $\mu_\mathcal{E}(A) := \frac{1}{N^k} \left| \{ (i_1, \dots, i_k) : 1 \le i_j \le N,\ g_1{}^{i_1} \cdots g_k{}^{i_k} \in A \} \right|$

$\Rightarrow$ (i), (ii) ✓

(iii) $|\mu_\mathcal{E}(A) - \mu_\mathcal{E}(g_j A)| \le \frac{1}{N^k} \left| \{ (i_1, \dots, i_k) : 1 \le i_j \le N,\ i_j = 1 \text{ oder } = N+1 \} \right|$

$= \frac{1}{N^k} \cdot 2N^{k-1} = \frac{2}{N} < \varepsilon$

G-invariant:

Definiere $\mathcal{M}_\varepsilon := \{ \mu_\varepsilon : \mathcal{P}(G) \to [0,1],\ \mu_\varepsilon \text{ erfüllt i) ii) iii) aus } (*) \}$

$\Rightarrow \mathcal{M}_\varepsilon \neq \emptyset \quad \forall \varepsilon > 0$

$\mathcal{M}_\varepsilon \subseteq [0,1]^{\mathcal{P}(G)}$, $[0,1]$ kompakt $\Rightarrow$ Produkt $[0,1]^{\mathcal{P}(G)}$ kompakt nach Tychow.

$\mathcal{M}_\varepsilon$ ist abgeschlossen (Netzlimites)

$\Rightarrow \mathcal{M}_\varepsilon$ ist kompakt.

$\mathcal{M}_\varepsilon$ sind monoton

$\Rightarrow$ Cantorscher Durchschnittssatz: $\bigcap_{0<\varepsilon<1} \mathcal{M}_\varepsilon \neq \emptyset$

$\Rightarrow \exists \mu \in \bigcap_{0<\varepsilon<1} \mathcal{M}_\varepsilon \Rightarrow \mu$ ist G invarianter Inhalt auf $G = [g_1, \dots, g_k]$, $\mu(G) = 1$

Sei nun G abelsch, bel (nicht notwendig endlich erzeugt).

$\Rightarrow G = \bigcup_{\alpha \in J} G_\alpha$, $\{ G_\alpha : \alpha \in J \}$ sei das System der endlich erzeugten Untergruppen von G mit Indexmenge J, die so gerichtet sei, daß $\alpha \preceq \beta :\Leftrightarrow G_\alpha \subseteq G_\beta$

Betrachte $E = [0,1]^{\mathcal{P}(G)}$

Definiere $\mathcal{M}_\alpha := \{ \mu : \mathcal{P}(G) \to [0,1],\ \mu \text{ Inhalt},\ \mu(G) = 1,\ \mu(gA) = \mu(A)\ \forall g \in G_\alpha \}$

$\mathcal{M}_\alpha \neq \emptyset$ (denn: G_α ist amenabel, μ_α ausgeh., def $\mu(A) := \mu_\alpha(A \cap G_\alpha) \Rightarrow \mu \in \mathcal{M}_\alpha$)

$\mathcal{M}_\alpha$ ist kompakt, haben endl. Durchschnittseigenschaft, dann: Cantorscher $\bigcap$-Satz $\exists \mu$ mit gemeinsam[illegible]

(4) <u>G auflösbar $\Rightarrow$ G amenabel</u>

Bem: $N \lhd G$, N amenabel, G/N amenabel $\Rightarrow$ G amenabel.

Dann sind auflösbare Gruppen amenabel, denn:

$G \rhd N_1 \rhd N_2 \rhd \dots \rhd \{1\}$

N_m/N_{m+1} abelsch $\Rightarrow$ schrittweise hoch $\Rightarrow$ G amenabel.

<u>Ausführlicher:</u>

Beh: $N \lhd G$, N amenabel, G/N amenabel $\Rightarrow$ G amenabel.

Bew: Es sei ν_1 Inhalt auf N, $\nu_1(N)=1$, ν_1 N-Invariant

und ν_2 Inhalt auf G/N, $\nu_2(G/N)=1$, ν_2 G/N-Invariant.

Für $A \subseteq G$ definiere

$$f_A : \begin{cases} G \to \mathbb{R} \\ g \mapsto \nu_1(N \cap g^{-1}A) \end{cases} \qquad \tilde{f}_A : \begin{cases} G/N \to \mathbb{R} \\ gN \to f_A(g) \end{cases}$$

Dann ist $\tilde{f}_A$ wohldefiniert, denn:

$$g_2 \in g_1 N \Rightarrow g_2 = g_1 x,\ x \in N \Rightarrow N \cap g_2^{-1}A = x^{-1}(N \cap g_1^{-1}A)$$

$$\Rightarrow \nu_1(N \cap g_2^{-1}A) = \nu_1(N \cap g_1^{-1}A) \quad \text{(Invariant auf } N\text{!)}$$

Definiere $\mu(A) := \int \tilde{f}_A \, d\nu_2 \quad A \subseteq G$.

- μ ist endlich additiv:

  $A, B \subseteq G$, $A \cap B = \emptyset \Rightarrow g^{-1}A \cap g^{-1}B = \emptyset \ \forall g \in G \Rightarrow \tilde{f}_{A \cup B} = \tilde{f}_A + \tilde{f}_B$

  $\Rightarrow \mu(A \cup B) = \int \tilde{f}_A d\nu_2 + \int \tilde{f}_B d\nu_2 = \mu(A) + \mu(B)$.

- $\mu(G) = 1$, denn:

  (i) $\chi_G = f_G$, weil $\nu_1(N \cap g^{-1}G) = \nu_1(N) = 1$

  (ii) $\mu(G) = \int \tilde{f}_G d\nu_2 = \int \tilde{\chi}_G \, d\nu_2 = \int \chi_{G/N} \, d\nu_2 = \nu_2(G/N) = 1$

- μ ist G-invariant, denn:

  $A \subseteq G$, $g, m \in G$, $f_{gA}(m) = \nu_1(N \cap m^{-1}gA) = \nu_1(N \cap (g^{-1}m)^{-1}A) = f_A(g^{-1}m) = {}_g(f_A)(m)$

  $\Rightarrow \mu(gA) = \int \tilde{f}_{gA} \, d\nu_2 = \int \widetilde{{}_g(f_A)} \, d\nu_2 \overset{(*)}{\underset{\text{Inv. von } \nu_2}{=}} \int \tilde{f}_A \, d\nu_2 = \mu(A)$

  zu (*): $\widetilde{{}_g(f_A)}(mN) = {}_g(f_A)(m) = f_A(g^{-1}m)$

  $({}_{gN}\tilde{f}_A)(mN) = \tilde{f}_A(g^{-1}N\, mN) = \tilde{f}_A(g^{-1}mN) = f_A(g^{-1}m)$ ∎

(2) **Beh:** G_1, G_2 (Bewegungsgruppen im $\mathbb{R}^1$ bzw $\mathbb{R}^2$) sind auflösbare Gruppen

Bew: Sei $I: x \mapsto x$ die Identität.

~~$a \in \mathbb{R}$~~, $T_1 = \{(x \mapsto a+x), a \in \mathbb{R}\}$

Dann gilt

- $\{I\} \triangleleft T_1 \triangleleft G_1$ ist Normalreihe mit abelschen Faktoren, denn

$G_1/_{T_1} \cong O_1 \cong \mathbb{Z}_2$, $T_1 \cong \mathbb{R}$

$O_1 = \{I, x \mapsto -x\}$

- Es bezeichne ρ_θ Drehung um den Nullpunkt mit Winkel θ (gegen den Uhrzeigersinn) $\rho_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

Es bezeichne σ_θ Spiegelung an der Achse durch 0 mit Winkel θ

$SO_2 = \{\rho_\theta : 0 \leq \theta < 2\pi\}$ abelsch, $SO_2 \cong T = \partial D$

$SG_2 = \{g \in G_2, \det g = 1\}$

$O_2 = SO_2 \cup \{\sigma_\theta : 0 \leq \theta < 2\pi\}$

$\Rightarrow \{I\} \triangleleft T_2 \triangleleft SG_2 \triangleleft G_2$ ist Normalreihe mit abelschen Faktoren,

denn: $SG_2/_{T_2} \cong SO_2$, da $T_2 = \ker \pi$, $\pi: SG_2 \to SO_2$

$G_2/_{SG_2} \cong \mathbb{Z}_2$

Def: O_n : Orthogonalmatrizen A

SO_n : —— " —— A mit $\det A = 1$

G_n : Bewegungen ($\phi(x) = Ax + x_0$, $A \in O_n$)

T_n : Translationen

SG_n : Bewegungen mit $\det = 1$.