§1 Meßbare Abbildungen und Funktionen

Definition 1.1 "Topologie"

Sei $X \neq \emptyset$, $P(X) :=$ Menge aller Teilmengen von X.

Ein System $\tau \subseteq P(X)$ heißt Topologie auf X :$\Leftrightarrow$

i) $\emptyset, X \in \tau$

ii) $A_j \in \tau$, $j = 1..n \Rightarrow \bigcap_{j=1}^{n} A_j \in \tau$

iii) $A_\lambda \in \tau$, $\lambda \in \Lambda \Rightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \in \tau$

(X, τ) heißt topologischer Raum, die Elemente von τ heißen offene Mengen, τ = das System der offenen Mengen in X.

Definition 1.2 "σ-Algebra"

Sei $X \neq \emptyset$, Ein System $\mathfrak{A} \subseteq P(X)$ heißt Algebra / σ-Algebra, falls gilt.

i) $X \in \mathfrak{A}$

ii) $A \in \mathfrak{A} \Rightarrow A^c := X \setminus A \in \mathfrak{A}$

iii) $A_1, .., A_n \in \mathfrak{A} \Rightarrow \bigcup_{j=1}^{n} A_j \in \mathfrak{A}$ (Algebra)

iii) $A_1, A_2, \dots \in \mathfrak{A} \Rightarrow \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathfrak{A}$ (σ-Algebra)

$\mathcal{X} = (X, \mathfrak{A})$ heißt meßbarer Raum, falls $\mathfrak{A}$ σ-Algebra auf X ist.

Die Elemente von $\mathfrak{A}$ heißen meßbare Mengen.

Definition 1.3 (stetige bzw. mb Abb)

X, Y seien Topologische Räume, $f: X \to Y$ eine Abb. heißt stetig, falls gilt: Für alle offenen Mengen U in Y: $f^{-1}(U)$ ist offen.

$\mathcal{X} = (X, \mathfrak{A}_1)$, $\mathcal{Y} = (Y, \mathfrak{A}_2)$ seien mb. Räume, Abb $f: \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ heißt meßbar, falls gilt: $\forall A \in \mathfrak{A}_2 : f^{-1}(A) \in \mathfrak{A}_1$.

Satz und Definition 1.4

$X \neq \emptyset$, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ($\mathcal{F} \neq \emptyset$). Dann gibt es eine kleinste σ-Algebra über X, welche $\mathcal{F}$ enthält. Bezeichnung: $\mathfrak{A}(\mathcal{F})$

$\mathcal{F}$ heißt in diesem Fall Erzeugendes System von $\mathfrak{A}(\mathcal{F})$

Beweis

Es sei $\Omega := \{\mathfrak{A} : \mathfrak{A}\ \sigma\text{-Algebra über } X \text{ mit } \mathcal{F} \subseteq \mathfrak{A}\}$

$\Omega \neq \emptyset$, da $\mathcal{P}(X) \in \Omega$.

Setze $\mathfrak{A}(\mathcal{F}) := \bigcap_{\mathfrak{A} \in \Omega} \mathfrak{A} \Rightarrow \mathcal{F} \subseteq \mathfrak{A}(\mathcal{F})$

Bleibt z.z. $\mathfrak{A}(\mathcal{F})$ ist σ-Algebra über X.

i) $X \in \mathfrak{A}(\mathcal{F})$, da $\forall \mathfrak{A} \in \Omega : X \in \mathfrak{A}$

ii) $A \in \mathfrak{A}(\mathcal{F}) \Rightarrow \forall \mathfrak{A} \in \Omega: A \in \mathfrak{A} \Rightarrow \forall \mathfrak{A} \in \Omega: A^c \in \mathfrak{A} \Rightarrow A^c \in \bigcap_{\mathfrak{A} \in \Omega} \mathfrak{A} = \mathfrak{A}(\mathcal{F})$

iii) $A_j \in \mathfrak{A}(\mathcal{F}) \Rightarrow$ analog: $\bigcup_j A_j \in \mathfrak{A}(\mathcal{F})$ ∎

Satz und Definition 1.5 (Borelsche σ-Algebra auf (X, τ))

Sei (X, τ) ein topologischer Raum. Dann gibt es eine kleinste σ-Algebra $\mathcal{B}$ über X, welche "alle offenen Mengen des TRs (X, τ) enthält", dh $\tau \subseteq \mathcal{B}$. Diese σ-Algebra heißt die Borelsche σ Algebra auf (X, τ). Die Elemente von $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\tau)$ heißen Borel-mb.

Beweis: Korollar aus 1.4 ∎

Definition 1.6 (Borel mb. Abb.)

Eine Abb $f: X \to Y$, wobei X versehen ist mit der Borelschen σ-Algebra $\mathcal{B}_1$ und Y mit der Borelschen σ-Algebra $\mathcal{B}_2$ heißt

$(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$-mb oder "Borel-meßbar",

falls f meßbar ist im Sinn der Definition 1.5.

Satz 1.7

X, Y seien topologische Räume, versehen mit den jeweiligen Borelschen σ-Algebren. Es sei $f: X \to Y$ stetig. Dann ist f auch Borelmeßbar.

Beweis Folgt aus dem folgenden Lemma 1.8 mit $\mathcal{F} := \tau_Y$ ■
(= Topologie auf Y)

Lemma 1.8

Ist $(X, \mathcal{A}_1)$ ein mb. Raum, $\emptyset \neq Y$, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(Y)$,
$\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}(\mathcal{F})$. Eine Abbildung $f: X \to Y$ ist $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$-mb genau dann, falls gilt: $\quad f^{-1}(F) \in \mathcal{A}_1 \; \forall F \in \mathcal{F}$.

Beweis "$\Rightarrow$" per Definition.

"$\Leftarrow$" Man betrachte das Teilsystem $\mathcal{P}(Y)$:

$\mathcal{M} := \{A \subseteq Y : f^{-1}(A) \in \mathcal{A}_1\}$

Nach Vor.: $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{M}$, $\mathcal{F} \neq \emptyset$, also $\mathcal{M} \neq \emptyset$

Beh: $\mathcal{M}$ ist σ-Algebra auf Y $\leadsto \mathcal{F} \subseteq \mathcal{M} \leadsto \mathcal{A}(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{M}) = \mathcal{M} \to \mathcal{A}_2 \subseteq \mathcal{M}$

Bew: (i) $f^{-1}(Y) = X \in \mathcal{A}_1 \Rightarrow Y \in \mathcal{M}$

(ii) $A \in \mathcal{M} \Rightarrow f^{-1}(A^c) = (f^{-1}(A))^c \in \mathcal{A}_1 \Rightarrow A^c \in \mathcal{M}$

(iii) $A_j \in \mathcal{M} \Rightarrow \forall j: f^{-1}(A_j) \in \mathcal{A}_1 \Rightarrow f^{-1}(\bigcup_1^\infty A_j) = \bigcup_1^\infty f^{-1}(A_j) \in \mathcal{A}_1$

$\Rightarrow \bigcup A_j \in \mathcal{M}$

$\Rightarrow \mathcal{A}_2 \subseteq \mathcal{M} \Rightarrow \forall A \in \mathcal{A}_2: f^{-1}(A) \in \mathcal{A}_1 \Rightarrow f$ ist $\mathcal{A}_1$-$\mathcal{A}_2$-mb. ■

<u>Satz .9 "Verkettung mb. Abb ist mb"</u>

$\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$ seien mb. Räume, $f: \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, $g: \mathcal{Y} \to \mathcal{Z}$ seien mb. $\Rightarrow$

$h: \mathcal{X} \to \mathcal{Z}$, $h = g \circ f$ ist mb. Abb zw. $\mathcal{X}$ und $\mathcal{Z}$.

Beweis folgt aus $(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A))$ $\square$

<u>Spezielle Erzeugendensysteme der Borelschen σ-Algebra auf $\mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, $\mathbb{C}$:</u>

(hier identifiziere $\mathbb{C} \hat{=} \mathbb{R}^2$).

Bem: zur Topologie auf $\overline{\mathbb{R}}$: Umgebung von $\pm\infty$ = offene Menge, die das Äußere einer Kugel um 0 enthalten.

$\mathbb{R}$: Sei τ das System der offenen Mengen in $\mathbb{R}$

$J_1 :=$ System aller offenen beschränkten Intervalle (a,b)

$J_2 :=$ ——"—— halboffenen ——"—— $(a,b]$

$J_3 :=$ ——"—— kompakten ——"—— $[a,b]$

$\overline{\mathbb{R}}$: Sei $\overline{\tau}$ das System der offenen Mengen in $\overline{\mathbb{R}}$

$\overline{J_1} = J_1 \cup \bigcup_{a \in \mathbb{R}} \{(a, \infty]\} \cup \{[-\infty, b), b \in \mathbb{R}\}$

$\mathbb{C}$: Sei τ^* das System der offenen Mengen in $\mathbb{C}$

$J_1^* :=$ Menge aller offenen Kugeln $K(z_0, r)$ $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$

$J_2^* :=$ ——"—— Rechtecke der Form $(a,b] \times (c,d]$ $a,b,c,d \in \mathbb{R}$.

<u>Dann gilt:</u>

$\mathcal{L}(J_j) = \mathcal{L}(\tau)$ $j = 1,2,3$

$\mathcal{L}(\overline{J_1}) = \mathcal{L}(\overline{\tau})$

$\mathcal{L}(J_j^*) = \mathcal{L}(\tau^*)$ $j = 1,2$

<u>Beweis</u> für $\mathcal{L}(J_3) = \mathcal{L}(\tau)$

(1) $[a,b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} (a - 1/n, b + 1/n)$ $(a < b)$

(2) $(a,b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [a + 1/n, b - 1/n]$

$\Rightarrow [a+\frac{1}{n}, b-\frac{1}{n}] \in \mathcal{L}(\mathcal{J}_3) \Rightarrow (a,b) \in \mathcal{L}(\mathcal{J}_3) \Rightarrow \mathcal{J}_1 \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{J}_3) \Rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{J}_1) \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{J}_3)$

Nach (1) gilt $\mathcal{L}(\mathcal{J}_1) \supseteq \mathcal{L}(\mathcal{J}_3) \Rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{J}_1) = \mathcal{L}(\mathcal{J}_3)$, beachte $\mathcal{L}(\mathcal{J}_1) \overset{!}{=} \mathcal{L}(\tau)$ ∎

Lemma 1.10

Seien X, Y topologische Räume versehen mit der Borelschen σ-Algebra.
$\phi: \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to Y$ sei eine stetige Abb. $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ sei ebenfalls mit der Borelschen σ-Algebra versehen.
Sei weiterhin $f: X \to \mathbb{R}$, $g: X \to \mathbb{R}$ Borel-meßbar.
Dann ist $h: X \to Y$, $x \mapsto \phi(f(x), g(x))$ mb.

(Anwendung: Meßbarkeit von $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ untersuchen über Meßbarkeit von $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f$!)

Beweis

$h = \phi \circ F$ mit $F = (f,g): X \to \mathbb{R}\times\mathbb{R}$
$\phi: X \to Y$ stetig $\Rightarrow$ mb und $\phi \circ F$ als Verkettung nach Lemma 1.9 mb, falls F mb.
Nun die Meßbarkeit von F:
$\mathbb{R}^2 = \mathcal{R}(\mathcal{J})$, sei $(a,b)\times(c,d) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \Rightarrow$
$F^{-1}((a,b)\times(c,d)) = f^{-1}(a,b) \cap g^{-1}(c,d) \in \mathcal{R}(\tau_X)$ und
$\mathcal{R}(\mathcal{J}) = \mathcal{L}(\tau_{\mathbb{R}^2}) \Rightarrow$ Beh! ∎

Lemma 1.11 Spur-Topologie und Spur-σ-Algebra der Borelschen σ-Algebra

Sei (X,τ) topologischer Raum und $\mathcal{B}(\tau)$ Borelsche σ-Algebra auf X.
Weiter sei $Y \subseteq X$ versehen mit der Spurtopologie $\tau_Y := \{U\cap Y : U\in\tau\}$
Weiter sei die Spur-σ-Algebra definiert durch

$$\mathcal{B}_Y(\tau) := \{A\cap Y : A \in \mathcal{B} = \mathcal{B}(\tau)\}$$

Beh: Dann ist $\mathcal{B}_Y(\tau) = \mathcal{B}(\tau_Y)$

Beweis

(1) Zeige $\mathcal{B}_Y(\tau)$ ist σ-Algebra auf Y ($\Rightarrow \mathcal{B}_Y(\tau) \supseteq \tau_Y \Rightarrow \mathcal{B}(\tau_Y) \subseteq \mathcal{B}_Y(\tau)$)

i) $Y \in \mathcal{B}_Y(\tau)$, denn $Y = X\cap Y$ mit $X \in \mathcal{B} = \mathcal{B}(\tau)$

ii) Sei $B \in \mathcal{B}_Y(\tau) \Rightarrow B = A\cap Y$, $A \in \mathcal{B}(\tau)$

$\Rightarrow Y \setminus B = Y\cap B^c = Y\cap(A^c \cup Y^c) = Y\cap A^c$, $A^c \in \mathcal{B}(\tau) \Rightarrow Y\setminus B \in \mathcal{B}_Y(\tau)$

iii) $B_1, B_2, \ldots \in \mathcal{B}_Y(\tau) \Rightarrow B_i = A_i \cup Y$ $A_i \in \mathcal{B}(\tau) \Rightarrow$

$\bigcup B_i = \bigcup (A_i\cap Y) = (\bigcup A_i)\cap Y \in \mathcal{B}_Y(\tau)$, da $\bigcup A_i \in \mathcal{B}(\tau)$

$\Rightarrow \mathcal{B}_Y(\tau)$ ist σ-Algebra in Y

Zeige $\tau_Y \subseteq \mathcal{B}_Y(\tau)$:

Sei $V \in \tau_Y$, dh V relativ offen in $Y \Rightarrow V = U\cap Y$ U offen in X

$\Rightarrow U \in \tau \Rightarrow U \in \mathcal{B}(\tau) \Rightarrow U\cap Y = V \in \mathcal{B}_Y(\tau)$

$\Rightarrow \mathcal{B}(\tau_Y) \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{B}_Y(\tau)) = \mathcal{B}_Y(\tau)$

(2) Zeige $\mathcal{B}_Y(\tau) \subseteq \mathcal{B}(\tau_Y)$, indem man stetiges f konstruiert mit $f^{-1}(\mathcal{B}(\tau)) = \mathcal{B}_Y(\tau)$ ...:

Betrachte $f = id: (Y,\tau_Y) \to (X,\tau)$; $y \mapsto f(y) := y$

Klar f ist stetig, $f^{-1}(U) = U\cap Y$ $\forall U\in\tau$

$\Rightarrow f: (Y, \mathcal{B}(\tau_Y)) \to (X, \mathcal{B}(\tau))$ ist mb, da f stetig

$\Rightarrow f^{-1}(\mathcal{B}(\tau)) = \mathcal{B}(\tau)\cap Y := \{B\cap Y, B\in\mathcal{B}(\tau)\} = \mathcal{B}_Y(\tau) \subseteq \mathcal{B}(\tau_Y)$ = kl σAlg

$\Rightarrow \mathcal{B}_Y(\tau) = \mathcal{B}(\tau_Y)$ ∎

<u>Konvention</u>: $\mathbb{C}, \mathbb{R}$ bzw Teilmengen von $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{R}$ seien immer mit der Borelschen σ-Algebra bzgl der üblichen Euklid-Topologie versehen.

<u>Satz 1.12</u> Über komplexwertige meßbare Abbildungen

Es sei X ein meßbares Raum; $f, g: X \to \mathbb{C}$ ~~eine~~ komplexwertige Abbildungen. Dann gilt:

i) f, g mb $\Rightarrow$ $f+g$ mb, fg mb.

ii) $f = u + iv$ ist mb $\Leftrightarrow$ $u: X \to \mathbb{R}$, $v: X \to \mathbb{R}$ sind mb.

$u = \operatorname{Re} f$, $\quad v = \operatorname{Im} f$.

iii) f mb $\Rightarrow$ $|f|$, $u^+ = \max(u, 0)$, $u^- = -\min(u, 0)$, v^+, v^- sind mb.

iv) f mb $\Rightarrow$ $\exists$ mb. Funktion $\alpha: X \to \mathbb{C}$ mit $|\alpha| = 1$ und $f = \alpha |f|$

das heißt α ist eine meßbare Argumentfunktion!

<u>Beweis</u> i) nach Lemma 1.10 (für $f, g: X \to \mathbb{R}$. Für $f, g: X \to \mathbb{C}$ gilt Lemma 1.10 ganz analog):

Betrachte $\phi := \begin{matrix} + \\ \cdot \end{matrix} \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ (s,t) \mapsto \begin{matrix} s+t \\ s \cdot t \end{matrix} \end{cases}$ ist stetig; $f, g: X \to \mathbb{R}$ sind mb

$\Rightarrow$ nach Lemma 1.10 ist $x \mapsto \phi(f(x), g(x)) = f(x) + g(x) = (f+g)(x)$

bzw $x \mapsto f(x) g(x) = (fg)(x)$

jeweils eine mb. Funktion. Insbesondere ist also

$f \equiv$ const bzw $f = cg$ mb.

ii) $\phi: \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $z \mapsto \operatorname{Re} z$ bzw $z \mapsto \operatorname{Im} z$ sind stetige Abb. $\Rightarrow$

$u = \operatorname{Re} f = \phi \circ f$ bzw $v = \operatorname{Im} f = \phi \circ f$ sind mb.

u, v mb, $u, v: X \to \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $u, v: X \to \mathbb{C}$ sind mb, da

$\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\tau_{\mathbb{C}}) = \tau_{\mathbb{R}}$ $\overset{i)}{\Rightarrow}$ $u + iv = f$ ist mb.

iii) $\phi: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto |z|$ stetig $\Rightarrow$ $|f| = \phi \circ f$ ist mb

$\Rightarrow$ mb.

... $u^+ = u+|u|$ ... $u^- = u-|u|$ ...

iv) $E := f^{-1}(\{0\})$, da Probleme bei $f(x)=0$.

$\{0\}$ ist Borelmenge in $\mathbb{C}$, da $\{0\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$

Da f mb, ist also $E = f^{-1}(\{0\}) \in \mathcal{L}_X$, also mb in X.

$\Rightarrow \chi_E(x) := \begin{cases} 1 & x \in E \\ 0 & x \notin E \end{cases}$ ist mb. Fktn.

$\Rightarrow \phi : \begin{cases} \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}\setminus\{0\} \\ z \mapsto \frac{z}{|z|} \end{cases}$ (Arg. von z) ist stetig.

Also ϕ mb bzgl der Borelschen σ-Algebra auf $\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

Setze $\alpha(x) := \phi(f(x) + \chi_E(x)) \Rightarrow \alpha$ mb.

trivial

Sei $x \in E \Rightarrow f(x)=0,\ \chi_E(x)=1 \Rightarrow \phi(1)=1 \Rightarrow \alpha(x)=1 \Rightarrow f(x) = \alpha(x)|f(x)|$

Sei $x \notin E \Rightarrow f(x) \neq 0 \Rightarrow \alpha(x) = \phi(f(x)) = \frac{f(x)}{|f(x)|} \Rightarrow f(x) = \alpha(x)|f(x)|$.

Und $|\alpha| = 1$.

Satz 1.13 Meßbarkeit von $\limsup f_n$, $\liminf f_n$, $\lim f_n$, $\sup f_n$, ..

$\sup_{n=1}^{\infty} f_n$

Es seien $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ mb ($\overline{\mathbb{R}}$ mit der Borelschen σ-Algebra)

Dann gilt: $\sup_n f_n$, $\inf_n f_n$, $\overline{\lim} f_n$, $\underline{\lim} f_n$, $\lim f_n$ ist mb

Beweis Es genügt z.z. $\sup f_n$ ist mb, da

$$\inf f_n = -\sup(-f_n)$$

$$\limsup f_n = \inf_{n=1}^{\infty} \sup_{k\geq n} f_k$$

$$\liminf f_n = \sup_{n=1}^{\infty} \inf_{k\geq n} f_k$$

Beh $\forall \alpha \in \mathbb{R}: f^{-1}((\alpha,\infty]) \in \mathfrak{A} = \sigma$-Algebra auf X, für $f(x) := \sup_n f_n(x)$

$f^{-1}((a,\infty]) = \underbrace{\bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{\underbrace{f_n^{-1}((\alpha,\infty])}_{f_n \text{ mb}}}_{\in\mathfrak{A}}}_{\in\mathfrak{A}}$, da $y \in f^{-1}((a,\infty])$

$\Leftrightarrow f(y) > a$

$\Leftrightarrow \sup f_n(y) > a$

$\Leftrightarrow \exists n : f_n(y) > a$ ∎

Definition: Eine Funktion der Form $t = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \chi_{I_j}$ mit $\alpha_j \in \mathbb{C}$, I_j Intervalle in

heißt <u>Treppenfunktion.</u> Verallgemeinerung auf bel. mb. Räume:

$$s = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \chi_{E_j}, \quad \alpha_j \in \mathbb{C}, \quad E_j \subseteq X, \quad X \text{ bel mb. Raum}$$

heißt Elementarfunktion (Beachte: E_j zunächst nicht notwendig

Eine <u>Elementarfunktion</u> sei in Normaldarstellung, wenn:

- $E_j \cap E_k = \emptyset \quad \forall j \neq k$, dh E_j paarweise disjunkt
- α_j seien paarweise verschieden

(Zur Charakterisierung der Meßbarkeit einer Elementarfunktion von technischem Vorteil, noch $\bigcup E_j = X$ zu fordern).

<u>Bemerkungen:</u>

i) Die Menge der Elementarfktn. (E-Fktn) stimmt mit der Menge derjenigen Funktionen überein, welche nur endl. Wertebereich haben

ii) s Elementarfktn in Normaldarstellg: s ist mb $\Leftrightarrow$ alle E_j mb.

<u>Satz 1.14</u>

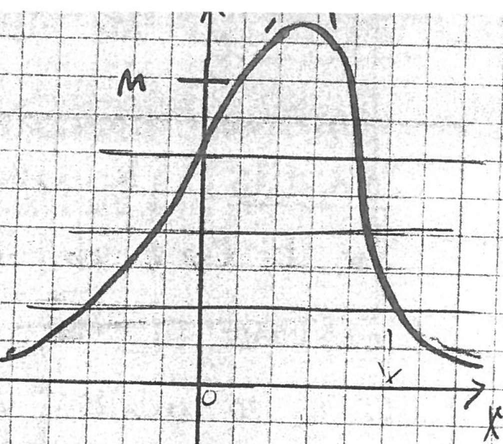
Sei $f : X \to [0,\infty]$ mb

Dann existieren mb. Elementarfunktionen $s_n : X \to [0,\infty)$ mit

(1) $\quad 0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \ldots \leq f$

(2) $\quad s_n(x) \longrightarrow s(x) \qquad \forall x \in X$.

<u>Bem:</u> Ist f beschränkt, so kann man die mb. s_n sogar so wählen, daß die Konvergenz der s_n gleichmäßig ist.



Beweis

Beim Schritt n betrachte man $[0,n] \subseteq [0,\infty]$ und zerlege $[0,n]$ in Teile (bei jedem neuen Schritt Verdopplg der Anzahl)

Betrachte dann die Urbilder dieser Intervallstückchen auf der X-Achse. Man betrachte dann auf einem solchen E_{jn} den abgesenkten Fkt-Wert:

Setze $E_{jn} := \{x \in X : \frac{j}{2^n} \le f(x) < \frac{j+1}{2^n}\}$ $\quad n \in \mathbb{N}, \; j = 0, 1, \dots n2^n - 1$

$E_{n2^n} := \{x \in X : f(x) \ge n\}$ $\qquad$ (n fest!)

Def $\quad s_n := \sum_{j=0}^{n2^n} \frac{j}{2^n} \chi_{E_{jn}} = \varphi_n \circ f$ $\quad$ mit $\quad \varphi_n(t) := \begin{cases} \frac{j_n(t)}{2^n} & 0 \le t < n \\ n & n \le t \le \infty \end{cases}$

wobei $j_n(t)$ die eindeutig best. ganze Zahl mit $\frac{j}{2^n} \le t < \frac{j+1}{2^n}$

Damit gilt dann:

1) $t - \frac{1}{2^n} \le \varphi_n(t) \le t$, falls $t < n$

2) $0 \le \varphi_1 \le \varphi_2 \le \dots$

3) $\varphi_n(t) \to t$ für $n \to \infty$ $\quad t \in [0,\infty]$ $\quad$ (klar für $t \in [0,\infty)$, aber beachte auch für $t = \infty$)

$s_n(x) = (\varphi_n \circ f)(x) \to f(x) \quad \forall x \in X$.

s_n sind mb, da die E_{jn} mb.

Monotonie der s_n: $s_0 \le s_1 \le \dots$ da $(\varphi_n)_n$ monoton

Zusatz: Sei $|f(x)| \le M \quad \forall x \in X$, $\varepsilon > 0$ bel. vorgegeben.

Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$: $2^{-n_0} < \varepsilon$ und $n_0 > M$

Für $t \le n_0$: $\quad |t - \varphi_n(t)| = t - \varphi_n(t)$, $\quad n \ge n_0$

und $t - \varphi_n(t) \overset{(1)}{\le} \frac{1}{2^n} \le \frac{1}{2^{n_0}} < \varepsilon$

$\Rightarrow |f(x) - s_n(x)| \le \varepsilon \quad \forall n \ge n_0$ und $\forall x \in X$! ■

Satz 1.15

$f: X \to \mathbb{C}$ sei ms. Dann ist f punktweiser Grenzwert einer Folge messbarer s_n von Elementarfunktionen. Für beschränktes f ist $(s_n)_n$ so wählbar, daß die Konvergenz glm. ist.

Beweis

$f = (u^+ - u^-) + i(v^+ - v^-)$ $\quad u^+ - u^- = \operatorname{Re} f, \quad v^+ - v^- = \operatorname{Im} f$

u^+, u^-, v^+, v^- sind ms und ≥ 0.

$v^{+/-}, u^{+/-} : X \to [0, \infty]$

$\Rightarrow$ 1.13: ex Folge von Treppenfunktionen $(s_n^j)_n$ $j = 1..4$ mit den gewünschten Konvergenzeigenschaften. Die Summe endlich vieler ms E-Fktn ist ms. E-Fktn $\Rightarrow$ Beh! ■

§ 2 Maßräume

Definition "Inhalt, Maß"

(1) Sei $X \neq \emptyset$, $\mathfrak{A}$ Algebra auf X. Eine Abb. $\mu: \mathfrak{A} \to [0,\infty]$ heißt Inhalt, falls gilt:

i) $\mu(\emptyset) = 0$

ii) $\mu(\sum_{i=1}^{n} E_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i) \quad \forall E_i \in \mathfrak{A}$ disjunkt.

(2) Sei $X \neq \emptyset$, $\mathfrak{A}$ σ-Algebra auf X

Eine Abb. $\left.\begin{matrix}\mu: \mathfrak{A} \to [0,\infty] \\ \mu: \mathfrak{A} \to [-\infty,\infty] \\ \mu: \mathfrak{A} \to \mathbb{C}\end{matrix}\right\}$ heißt $\left\{\begin{matrix}\text{positives Maß} \\ \text{signiertes Maß} \\ \text{komplexes Maß}\end{matrix}\right\}$, falls μ σ-additiv, dh $\mu(\sum_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{1}^{\infty} \mu(E_i) \quad \forall E_i \in \mathfrak{A}$ (*) und $\mu(\emptyset) = 0$.

Bemerkungen

(1) Im Falle eines komplexen Maßes folgt $\mu(\emptyset) = 0$ aus der σ-Additivität!

(2) Aus der σ-Additivität folgt die Additivität.

(3) Zur Konvergenz der Reihen (*):

Im Falle eines komplexen Maßes ist $\mu(\sum E_i)$ immer endlich, dh $\sum_{1}^{\infty} \mu(E_i)$ konvergiert unbedingt. Aus dem Riemannschen Umordnungssatz folgt aus der unbedingten die absolute Konvergenz.

(4) Ist μ ein signiertes Maß auf X, dann nimmt μ höchstens einen der Werte $+\infty$ oder $-\infty$ an.

Denn:

Ann $\exists A \in \mathfrak{A}$ $\mu(A) = \infty \Rightarrow X = A + A^c$, $\mu(X) = \mu(A) + \mu(A^c)$ wohldef $\Rightarrow$ $\mu(A^c) = \infty$ oder $\mu(A^c)$ ist endlich. In jedem Fall ist $\mu(X) = \infty$

Falls ex $B \in \mathfrak{A}$: $\mu(B) = -\infty \Rightarrow \mu(X) = \mu(B) + \mu(B^c) = -\infty + \mu(B^c) \Rightarrow \mu(X) = -\infty$

Also können nicht gleichzeitig $\mu(A) = \infty$ und $\mu(B) = -\infty$ sein!

(5) Zur Konvergenz der Reihe $\sum \mu(E_i)$ bei signierten Maßen:

$a_i^+ := \max(a_i, 0)$, $\quad a_i^- := -\min(a_i, 0)$

Sind $a_i \in [-\infty, \infty]$ bzw $(-\infty, \infty]$, so "konvergiert" die Reihe $\sum a_i$ per definitionem, falls mindestens eine der Reihen $\sum a_i^+$ bzw $\sum a_i^-$ konvergiert.

Es sei dann $\sum a_i := \sum a_i^+ - \sum a_i^-$

(insbesondere kommt es auch hier nicht auf die Anordg an.)

Sprechweise im Folgenden:

"Sei μ ein Maß" $\Rightarrow$ alle 3 Fälle: pos, sig, komplexes Maß sind möglich!

Satz 2.1 **Maß-Eigenschaften:**

Es sei μ ein Maß auf $(X, \mathfrak{A})$. Dann gilt:

i) $\mu(A) \leq \mu(B)$ für $A \subseteq B$ und μ positiv.

D.h. positive Maße sind monoton.

ii) Ist $A \subseteq B$, so gilt: $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$, falls $\mu(A)$ endlich.

D.h. Insbesondere gilt die Beziehung bei komplexen Maßen immer.

iii) Stetigkeit von ~~ob~~ unten:

Ist $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} \mu(A_n) = \mu(\bigcup_n A_n)$

iv) Stetigkeit von oben:

Ist $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$ und $\exists m: \mu(A_m)$ endlich, so gilt

$\lim\limits_{n \to \infty} \mu(A_n) = \mu(\bigcap_n A_n)$

OBdA kann man also auch nur $\mu(A_1)$ endlich fordern, da die ersten Glieder keinen Beitrag zum Schnitt liefern. Bei komplexen Maßen ist die Zusatz-Bed. der Endlichkeit sowieso überflüssig.

Beweis:

i)ii) Sei $A \subseteq B \Rightarrow B = A + (B \setminus A) \Rightarrow$

$\mu(B) = \mu(A) + \underbrace{\mu(B \setminus A)}_{\geq 0} \geq \mu(A)$ falls μ pos.

und falls $\mu(B \setminus A)$ endlich: $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.

iii) Sei $B_1 := A_1$, $B_j := A_j - A_{j-1}$, $j = 2, 3 \dots$

D.h. Disjunkte Folge so, dass $\bigcup A_i = \bigcup B_i$ bei μ pos oder kompl.:

$\mu(\bigcup A_j) = \mu(\bigcup B_j) = \mu(\sum B_j) = \sum\limits_1^\infty \mu(B_j) = \lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{i=1}^n \mu(B_i) =$

$\lim\limits_{n \to \infty} \mu(\bigcup_1^n B_i) = \lim\limits_{n \to \infty} \mu(A_n)$

Im Falle eines signierten Maßes. Im Fall endliches signiertes Maß keine Schwierigkeit, da (*) dann unbedingt, also absolut

Falls $\exists a_j^+ = \infty \Rightarrow \lim \sum_1^n a_j \overset{?}{=} \underbrace{\sum_1^\infty a_j^+}_{=\infty} - \underbrace{\sum_1^\infty a_j^-}_{<\infty} \Rightarrow \forall n \geq j: \underbrace{\sum_{i=1}^n a_i^+}_{=\infty} \Rightarrow \lim \sum^n a_i = \infty$

(iv) Setze $C_n := A_1 \setminus A_n \Rightarrow \bigcup C_n = \bigcup (A_1 \setminus A_n) = A_1 - \bigcap_n A_n$, $\underbrace{A := \bigcap_n A_n}_{\mu(A) \text{ endlich}}$

$C_n \nearrow \Rightarrow$ nach (ii) gilt also

$$\mu(A_1) - \mu(A) = \mu(A_1 - A) = \mu(\bigcup C_n) = \lim \mu(C_n) = \lim (\underbrace{\mu(A_1) - \mu(A_n)}_{\text{endl!}})$$
$$= \mu(A_1) - \lim_n \mu(A_n)$$

$\Rightarrow \mu(A)$ endlich $\Rightarrow \mu(A) = \mu(\bigcap A_n) = \lim \mu(A_n)$ ∎

<u>Frage:</u> Wie steht's mit einer Art Umkehrung dieser Eigenschaften aus 2.1. Dh. Ist für eine bloß additive Mengenfunktion etwa die Stetigkeit von unten schon hinreichend für die σ-Additivität von μ?

<u>Satz 2.2 Kriterium für die σ-Additivität</u>

Sei μ ein Inhalt auf $(X, \mathfrak{A})$ mit $\mathfrak{A}$ σ-Algebra. Dann gilt:

(1) Ist μ stetig von unten, dh. $\forall (A_n)_n: A_n \nearrow \Rightarrow \lim \mu(A_n) = \mu(\bigcup A_n)$, so ist μ bereits σ-additiv.

(2) Ist μ stetig von oben, dh gilt für <u>alle</u> $(A_n)_n$ mit $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$ $\mu(\bigcap A_n) = \lim_n \mu(A_n)$ (also <u>ohne</u> Einschränkg!), die Gleichg muß auch gelten falls <u>alle</u> $\mu(A_n) = \infty$), so ist μ σ-additiv.

<u>Beweis</u> Z.z. ist $\sum_1^\infty \mu(B_j) = \mu(\sum B_j)$

(1) konstruiere monoton steigende Folge: Setze $A_n := \sum_{k=1}^n B_k \Rightarrow A_n \nearrow$
und $\bigcup_1^\infty A_n = \sum_1^\infty B_k \Rightarrow \mu(\sum_{k=1}^\infty B_k) = \mu(\bigcup A_n) = \lim_n \mu(A_n) = \lim \mu(\sum_{k=1}^n B_k)$
$\underset{\text{endl. Add}}{=} \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^n \mu(B_k) = \sum_{k=1}^\infty \mu(B_k)$.

(2) Setze $A_n = \sum_{k=n}^\infty B_k \Rightarrow A_n \searrow \Rightarrow$
$$\underbrace{\mu(\sum_{k=1}^\infty B_k)}_{\text{feste Zahl}} = \mu(\sum_{k=1}^{n-1} B_k + \sum_{k=n}^\infty B_k) = \mu(\sum_{k=1}^{n-1} B_k + A_n) = \mu(\sum_{k=1}^{n-1} B_k) + \mu(A_n)$$
$\Rightarrow$

$\mu(\bigcap A_n) = \mu(\emptyset) = 0$

$$\underbrace{\mu\Big(\sum_{k=1}^{\infty} B_k\Big)}_{\text{feste Zahl}} = \sum_{k=1}^{n-1} \mu(B_k) + \mu(A_n)$$

$$\Downarrow \qquad \mu\Big(\bigcap A_n\Big) = \mu(\emptyset) = 0$$

$$\lim \sum_{k=1}^{n-1} \mu(B_k) = \mu\Big(\sum_{1}^{\infty} B_k\Big) - \underbrace{\lim \mu(A_n)}_{ex\ = 0} = \mu\Big(\sum_{k=1}^{\infty} B_k\Big) \Rightarrow \blacksquare$$

<u>Bemerkungen</u>

(1) Das Ganze ist auch richtig für eine additive Mengenfunktion $\mu: \mathfrak{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ mit $\mu(\emptyset) = 0$ bzw für $\mu: \mathfrak{A} \to \mathbb{C}$.

(2) Beispiel, daß man 2.1 (iv) nicht auf die Endlichkeit eines $\mu(A_n)$ verzichten kann: $X = \mathbb{N}$, $\mathfrak{A} = \mathfrak{P}(X) = \mathfrak{P}(\mathbb{N})$, μ Zählmaß auf $\mathbb{N}$.

$A_n = \{n, n+1, \dots\} \Rightarrow \mu(A_n) = \infty \ \forall n \in \mathbb{N}$ $\quad \mu(\bigcap A_n) = \mu(\emptyset) = 0$

aber $\mu(A_n) = \infty \not\to \mu(\emptyset) = 0$.

(3) Beispiel, daß man in 2.2 (2) <u>alle</u> Folgen, auch jene mit $\mu(A_n) = \infty$ betrachten muß:

Sei etwa $X = \mathbb{N}$, $\mathfrak{A} = \mathfrak{P}(\mathbb{N})$, $\mu(A) = \infty$ für A unendlich,
$\mu(A) = 0$ für A endlich

$\Rightarrow$ μ ist (endlich) additive Mengenfunktion.

- Für alle $(A_n)_n$, $A_n \downarrow$ mit $\mu(A_1)$ endl. gilt:
  $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots \Rightarrow A_n$ endl $\Rightarrow \mu(A_n) = 0 \to \mu(\bigcap A_n) = 0$.
- Jedoch μ nicht σ-additiv, da
  $0 = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\{n\}) \neq \mu(\sum_{1}^{\infty} \{n\}) = \mu(\mathbb{N}) = \infty$.
- denn die Vor von Satz 2.2 sind nicht erfüllt, denn z.B. für $A_n = \{n, n+1, \dots\}$ $\quad A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$ jedoch alle $\mu(A_n) = \infty$ und $\mu(\bigcap A_n) = \mu(\emptyset) = 0 \neq \infty = \lim \mu(A_n)$.

Totalvariation eines Mapes

Bem.: die Totalvariation eines Mapes wird sich als endliches Map erweisen. Zum Endlichkeitsnachweis benutze folgendes Lemma:

Lemma 2.3

Es seien $z_1, \dots, z_N \in \mathbb{C}$ endlich viele komplexe Zahlen vorgegeben, dann existiert eine Teilmenge $S \subseteq \{1..N\}$ mit:

$$\left| \sum_{k \in S} z_k \right| \geq \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{N} |z_k| \qquad \left(\tfrac{1}{\pi} \text{ optimal !}\right)$$

Beweis

Setze $z_k = |z_k| e^{i\varphi_k}$ mit $\varphi_k \in [-\pi, \pi]$, OBdA $z_k \neq 0$

Für $-\pi \leq \theta \leq \pi$ setze $S(\theta) := \{k \in \{1..N\}$ mit $\cos(\varphi_k - \theta) > 0\}$

$$\Rightarrow \left| \sum_{k \in S(\theta)} z_k \right| = |e^{i\theta}| \left| \sum_{k \in S(\theta)} |z_k| e^{i(\varphi_k - \theta)} \right| \geq \sum_{k \in S(\theta)} |z_k| \cos(\varphi_k - \theta) = \sum_{k=1}^{N} |z_k| \cos^+(\varphi_k - \theta) =: F(\theta)$$

$F(\theta)$ ist stetige Funktion auf kompaktem $[-\pi, \pi]$

$\Rightarrow$ es ex ein Maximum von F in $\theta = \theta_0 \in [-\pi, \pi]$

Setze $S := S(\theta_0)$

$$\Rightarrow F(\theta_0) \geq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(\theta)\, d\theta = \sum_{k=1}^{N} |z_k| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^+(\varphi_k - \theta)\, d\theta = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{N} |z_k|$$

Bem: Die Konstante $\frac{1}{\pi}$ ist die bestmögliche Konstante!

Situation: Gegeben sei das komplexe Maß μ auf der σ-Algebra $\mathfrak{A}$, $X \neq \emptyset$ $(X, \mathfrak{A})$.

Frage: Existiert ein Maß ν, $\nu \geq 0$ mit $|\mu(E)| \leq \nu(E)$ $\forall E \in \mathfrak{A}$?

Versuch: $\nu := |\mu|$ geht nicht, da $|\mu|$ nicht mehr σ-additiv.

Herleitung notwendiger Bedingungen an ν:

$\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ sei Zerlegung von E mit $E_i \in \mathfrak{A}$

$\nu(E) = \sum_1^{\infty} \nu(E_i) \geq \sum_{i=1}^{\infty} |\mu(E)|$ für jede Zerlegung $\mathfrak{Z}$ von E.

d.h. $\nu(E) \geq \sup_{\mathfrak{Z}} \sum_{i=1} |\mu(E_i)|$ $\mathfrak{Z}$ durchlaufe alle Zerlegungen von E.

Satz 2.4 "Variation $|\mu|$ von μ".

Sei μ ein komplexes Maß. Definiere $|\mu|(E) := \sup_{\mathfrak{Z}} \sum_{j=1}^{\infty} |\mu(E_j)|$ wobei E meßbar, $\sum_{i=1} E_i = E$ und die E_i mb sind.

Beh: Dann ist $|\mu|$ ein positives Maß mit der Eigenschaft: Ist ν ein weiteres positives Maß mit $|\mu(E)| \leq \nu(E)$ $\forall E \in \mathfrak{A}$, so folgt $|\mu| \leq \nu$. $|\mu|$ heißt Variation von μ

Beweis z.z. ist noch die σ-Additivität von $|\mu|$: ~~Sei E∈𝔄 bel.~~

Sei $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ paarweise disjunkte $E_i \in \mathfrak{A}$ mit $\sum_{i=1}^{\infty} E_i =: E$ $\Rightarrow E \in \mathfrak{A}$

z.z. $|\mu|(E) = |\mu|(\sum_{i=1}^{\infty} E_i) \stackrel{!}{=} \sum_{i=1}^{\infty} |\mu|(E_i)$ (σ-Additivität).

Fall 1) $\exists i_0 : |\mu|(E_{i_0}) = \infty$ Beh: $|\mu|(E) = |\mu|(\sum_{i=1}^{\infty} E_i) = \infty$.

Sei $M > 0$ bel $\Rightarrow \exists$ Zerlegung $\{E_j^{(i_0)}\}_{j=1}^{\infty}$ von E_{i_0} mit $\sum_{j=1}^{\infty} |\mu(E_j^{(i_0)})| \geq M$

$\Rightarrow |\mu|(E) = |\mu|(\sum_{i=1}^{\infty} E_i) \geq \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{\infty} |\mu(E_i)| + \sum_{j=1}^{\infty} |\mu(E_j^{(i_0)})| \geq M$

(da $\{E_i, E_j^{(i_0)}\}_{j=1}^{\infty}{}_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{\infty}$ Zerlegung von E).

$\Rightarrow |\mu|(E) = \infty$

$\Rightarrow |\mu|(\sum_{i=1}^{\infty} E_i) = \infty = \sum_{i=1}^{\infty} |\mu|(E_i) \leftarrow$ da $|\mu|(E_{i_0})$ schon $= \infty$)

Fall 2) $\forall i: |\mu|(E_i) < \infty$

(i) Sei $\varepsilon > 0$ bel. Wähle Zerlegg $\{E_j^{(i)}\}_{j=1}^{\infty}$ von E_i mit $\sum_{j=1}^{\infty} |\mu(E_j^{(i)})| \geq |\mu|(E_i) - \frac{\varepsilon}{2^i}$

$\Rightarrow \{E_j^{(i)}\}_{j,i=1}^{\infty}$ ist Zerlegung von $E \Rightarrow \sum_i \sum_j |\mu(E_j^{(i)})| \leq |\mu|(E)$

$|\mu|(E) \geq \sum_i \sum_j |\mu(E_j^{(i)})| \geq \sum_i \left(|\mu|(E_i) - \frac{\varepsilon}{2^i}\right) = \sum_1^{\infty} |\mu(E_i)| - \varepsilon$

$\Rightarrow \varepsilon$ bel: $|\mu(E)| \geq \sum_1^{\infty} |\mu|(E_i)$

(ii) Sei $\{A_j\}_{j=1}^{\infty}$ Zerlegung von $E \Rightarrow \{A_j \cap E_i\}_{j=1}^{\infty}$ Zerlegg von E_i

$\{A_j \cap E_i\}_{i=1}^{\infty}$ Zerlegg von A_j

$\Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} |\mu(A_j)| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \left|\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_j \cap E_i)\right| \leq \sum_i \sum_j |\mu(A_j \cap E_i)| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |\mu|(E_i)$

$\downarrow$

$|\mu|(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} |\mu|(E_i)$

(i)(ii) $\Rightarrow$ σ-Additivität ■

Bem 1: auch gültig für signierte Maße μ.

Bem 2: Zusatz über die Minimaleig ist klar per Def von $|\mu|$.

Definition von $|\mu|$ über endliche Zerlegungen:

Bem: Es gilt: $|\mu|(E) = \sup\limits_{\substack{\text{endl. Zerlegg} \\ \mathcal{Z} \text{ von } E}} \sum_{j=1}^{n} |\mu(E_j)|$

Beweis:

Sei $\nu(E) := \sup\limits_{\substack{\mathcal{Z} \text{ endl.} \\ \text{Zerlegg v. } E}} \sum_{j=1}^{n} |\mu(E_j)|$

Bem: Es gilt: $|\mu|(E) \doteq \sup\limits_{\substack{\text{endl. Zerlegg. } \mathcal{Z} \\ \text{von } E}} \sum_{j=1}^{n} |\mu(E_j)|$

Beweis:

Sei $\nu(E) := \sup\limits_{\mathcal{Z} \text{ endl.}} \sum_{j=1}^{n} |\mu|(E_j)$

$\Rightarrow \nu(E) \leq |\mu|(E)$, da aus $\{E_i\}_1^n$ mit $E_j := \emptyset$ $j = n+1, \ldots$ eine unendliche Zerlegung

Sei $\alpha < |\mu|(E)$ bel. ($|\mu|(E)$ momentan noch $=\infty$ möglich!)

Dann ex Zerlegung $\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$ mit $\sum_{j=1}^{\infty} |\mu(E_j)| > \alpha$

Fall 1) $\sum_{j=1}^{\infty} |\mu(E_j)| =: \Pi < \infty$ ($\Pi > \alpha$ also!)

$\Rightarrow \exists n_0 : \sum_{1}^{n_0} |\mu(E_j)| > \frac{\Pi + \alpha}{2}$, da $\Pi > \frac{\Pi+\alpha}{2} > \alpha$

Setze $F_j := E_j$ ($j = 1 \ldots n_0$), $F_{n_0+1} := \bigcup_{j=n_0+1}^{\infty} E_j$

$\Rightarrow \{F_j\}$ ist endliche Zerlegg. von E.

$\Rightarrow \nu(E) \geq \sum_{j=1}^{n_0} |\mu(F_j)| + |\mu(F_{n_0+1})| \geq \frac{\Pi+\alpha}{2} + 0 \geq \alpha$

$\Rightarrow \nu(E) \geq \alpha$

mit $\alpha \to |\mu|(E)$ folgt: $\nu(E) \geq |\mu|(E)$.

Fall 2: $\sum_{1}^{\infty} |\mu(E_j)| = \infty \Rightarrow \exists n_0 : \sum_{j=1}^{n_0} |\mu(E_j)| \geq N$ (bel.) $\Rightarrow$

$\nu(E) \geq \sum_{1}^{n_0} |\mu(E_j)| + |\mu(F_{n_0+1})| \geq N \Rightarrow \nu(E) = \infty$

Satz 2.5

Ist μ ein komplexes Maß, so ist $|\mu|$ ein endliches (!) pos. Maß.

Beweis

Idee: Aus der Widerspruchsannahme: ex E mit $|\mu|(E) = \infty$ wird eine Folge A_j konstruiert mit $|\mu(A_j)| \geq \varepsilon > 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$ divergiert!

Verwende dazu das Lemma von Rudin!

Ann. $\exists E \in \mathfrak{A}$ mit $|\mu|(E) = \infty$. Setze $c := \pi(1 + |\mu(E)|)$

$\Rightarrow$ es existiert eine Zerlegung $\{E_j\}_{j=1}^{N}$ von E mit $\sum_{j=1}^{N} |\mu(E_j)| > c$

$\Rightarrow$ Nach dem Lemma von Rudin ex $E_{j_1}, \dots, E_{j_m} \in \{E_1, \dots, E_N\}$ mit

$$\left| \sum_{l=1}^{m} \mu(E_{j_l}) \right| \geq \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^{N} |\mu(E_j)| > \frac{c}{\pi} > 1$$

$\Rightarrow \exists A \in \mathfrak{A}: A = \bigcup_{l=1}^{m} E_{j_l}$ mit $|\mu(A)| > 1$

Setze $B := E \setminus A$ und schätze ab:

$$|\mu(B)| = |\mu(E) - \mu(A)| \geq |\mu(A)| - |\mu(E)| > \frac{c}{\pi} - \left(\frac{c}{\pi} - 1\right) = 1$$

Fazit: es ex eine disjunkte Zerlegung $E = A \dot\cup B$ mit

$|\mu|(E) = \infty$ mit OBdA (aus Symmetriegründen) $|\mu(A)| > 1$ und $|\mu|(B) = \infty$

Sei jetzt $|\mu|(X) = \infty \Rightarrow$ es ex Zerlegung $\{A_1, B_1\}$ von X mit

$|\mu(A_1)| > 1$ und $|\mu|(B_1) = \infty$

$\Rightarrow$ es exist. Zerlegg $\{A_2, B_2\}$ von B_1 mit $|\mu(A_2)| > 1$, $|\mu|(B_2) = \infty$

usw! (induktiv!)

$\Rightarrow$ es ex paarweise disjunkte A_j, $j = 1, 2, \dots$ mit $|\mu(A_j)| > 1$ $\forall j \Rightarrow$

$\mu\left(\sum_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$ konvergiert nicht, da die Glieder keine Nf. bilden

Jedoch per Def. von komplexem Maß ist $\mu(\sum A_j) \in \mathbb{C}$, dh. konvergent.

Dies ist ein Widerspruch zur Ann! $\Rightarrow |\mu|$ ist endlich! ∎

Bemerkung:

Satz 2.8 ist auch richtig, falls μ ein endliches signiertes Maß ist, das heißt $\mu: \mathfrak{A} \to (-\infty, \infty)$

Also: μ komplexes oder endlich signiertes Maß $\Rightarrow$

$|\mu|$ ist endliches (!) pos. Maß.

Definition "Totalvariation $\|\mu\|$ von Maß".

Sei μ komplexes Maß auf $(X, \mathfrak{A})$. Dann heißt $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ Maßraum und $\|\mu\| := |\mu|(X)$ heißt Totalvariation von μ.

Satz 2.6

Es sei $\mathcal{M}$ der Raum aller komplexen Maße auf dem festen Raum $(X, \mathfrak{A})$. Es ist $\mathcal{M} \neq \emptyset$, da z.B. $\delta_a \in \mathcal{M}$ für $a \in X$. Versehen mit $\|\cdot\|$ wird $(\mathcal{M}, \|\cdot\|)$ ein Banachraum (!)

Beweis

VR-Struktur von $\mathcal{M}$: $(\lambda\mu)(E) := \lambda\, \mu(E) \quad (\lambda \in \mathbb{C})$

$$(\mu+\nu)(E) := \mu(E) + \nu(E)$$

Norm-Eigenschaft von $\|\cdot\|$, d.h. $(\mathcal{M}, \|\cdot\|)$ ist normierter Raum!

(i) $\|\mu\| \geq 0$, $\|\mu\| = 0 \Leftrightarrow |\mu|(X) = 0 \Rightarrow \mu \equiv 0$.

(ii) $\|\mu+\nu\| = |\mu+\nu|(X) = \sup\limits_{\mathfrak{Z}} \sum |(\mu+\nu)(E_j)| \leq \sup\limits_{\mathfrak{Z}} \left(\sum |\mu(E_j)| + \sum |\nu(E_j)| \right)$

$= \sup\limits_{\mathfrak{Z}} \left(\sum\limits_j |\mu(E_j)| \right) + \sup\limits_{\mathfrak{Z}} \left(\sum\limits_j |\nu(E_j)| \right)$

$= |\mu|(X) + |\nu|(X) = \|\mu\| + \|\nu\|$.

(iii) $\|\lambda\mu\| = |\lambda\mu|(X) = \sup\limits_{\mathfrak{Z}} \left(\sum |(\lambda\mu)(E_j)| \right) = |\lambda| \sup\limits_{\mathfrak{Z}} \left(\sum |\mu(E_j)| \right) =$
$|\lambda|\, \|\mu\|$.

Zur Vollständigkeit:

Sei $(\mu_n)_n$ CF in $\mathcal{M} \Rightarrow \|\mu_n - \mu_m\| \to 0$ für $m, n \to \infty$

D.h. $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 : \|\mu_n - \mu_m\| < \varepsilon \quad \forall m, n \geq n_0$.

z.z.: $\exists \mu \in \underline{\underline{\mathcal{M}}} : \|\mu_n - \mu\| \to 0$ für $n \to \infty$.

Sei E bel. mb. Menge:

$\forall m, n \geq n_0$

(1) $|\mu_n(E) - \mu_m(E)| = |(\mu_n - \mu_m)(E)| \leq |\mu_n - \mu_m|(E) \leq |\mu_n - \mu_m|(X) = \|\mu_n - \mu_m\| < \varepsilon$

$\Rightarrow (\mu_n(E))_n$ ist CF in $\mathbb{C}$ $\Rightarrow$ konvergent.

Setze $\mu(E) := \lim\limits_{n\to\infty} \mu_n(E)$.

z.z. ① $\mu \in \mathcal{M}$, d.h. μ ist Maß und ② $\|\mu_n - \mu\| \to 0$ für $n\to\infty$.

Aus (1) folgt insbesondere

(i) $|\mu_n(E) - \mu(E)| \leq \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall E \in \mathfrak{A}$ (Gleichmäßigkeit in E! Unabh. von E nach (1), da $\|\mu_n - \mu_m\| < \varepsilon$)

(ii) μ ist additiv:

$$\mu\left(\sum_{j=1}^N E_j\right) = \lim_{n\to\infty} \mu_n\left(\sum_{j=1}^N E_j\right) = \sum_{j=1}^N \lim_n \mu_n(E_j) = \sum_{j=1}^N \mu(E_j)$$

(iii) μ ist σ-additiv:

Sei $\sum_{j=1}^\infty E_j = E$ beliebig $\overset{(i)}{\Rightarrow} \left|\sum_{j=1}^N \mu_n(E_j) - \sum_{j=1}^N \mu(E_j)\right| = \left|(\mu_n - \mu)\left(\sum_1^N E_j\right)\right| \overset{(i)}{\leq} \varepsilon \; \forall n \geq n_0 \; \forall N$

Zu diesem n_0 ex $m_0 \geq n_0$: $\forall P \geq M \geq m_0$: $\left|\sum_{j=M}^P \mu_{n_0}(E_j)\right| \leq \varepsilon$.

Für diese $M \geq P \geq m_0$ gilt dann:

$$\underbrace{\left|\sum_{j=M}^P \mu(E_j)\right|}_{} \leq \left|\sum_{j=M}^P (\mu - \mu_{n_0})(E_j)\right| + \sum_{j=M}^P |\mu_{n_0}(E_j)| \leq \left|(\mu - \mu_{n_0})\left(\sum_{j=M}^P E_j\right)\right| + \varepsilon \leq 2\varepsilon$$

$\Rightarrow$ ist CF $\Rightarrow$ konvergent in $\mathbb{C}$ $\Rightarrow \sum_{j=1}^N \mu(E_j) \to \sum_{j=1}^\infty \mu(E_j)$, ist also konv.

In (iii) strebe nun $N \to \infty \Rightarrow$

(iv) $\forall n \geq n_0$: $\left|\sum_{j=1}^\infty \mu_n(E_j) - \sum_{j=1}^\infty \mu(E_j)\right| \leq \varepsilon$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sum_{j=1}^\infty \mu_n(E_j)}_{\mu_n\left(\sum E_j\right) \; \boxed{\mu_n \text{ Maß}}} = \sum_{j=1}^\infty \mu(E_j) \quad \text{(Glm in } E_j\text{)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^\infty \mu_n(E_j) = \lim_n \mu_n\left(\sum E_j\right) = \mu\left(\sum E_j\right)$$

$\Rightarrow \mu\left(\sum_1^\infty E_j\right) = \sum_1^\infty \mu(E_j) \Rightarrow \mu$ σ-add $\Rightarrow \mu$ Maß $\Rightarrow \mu \in \mathcal{M}$

Noch z.z. μ ist GW von μ_n bzgl $\|\cdot\|$ Norm; d.h. $\|\mu_n - \mu\| \to 0$ für $n\to\infty$.

Sei jetzt $\{A_j\}_{j=1}^N$ bel. endliche Zerlegung von X. $\Rightarrow \sum_{j=1}^N |(\mu_m - \mu_n)(A_j)| \leq \|\mu_m - \mu_n\| < \varepsilon \quad \forall m, n \geq n_0$

Für $m\to\infty$ gilt $\mu_m(A_j) \to \mu(A_j)$ punktweise, d.h.

$\sum_{j=1}^N |(\mu_n - \mu)(A_j)| \leq \varepsilon \; \forall n \geq n_0$; $\{A_j\}$ bel Zerleg $\Rightarrow$ sup bilden: $\|\mu_n - \mu\| = |\mu_n - \mu|(X) \leq \varepsilon$

$\forall n \geq n_0$

__Bemerkung:__

Das ganze gilt auch noch für den Raum $\tilde{\mathcal{M}}$ aller __endlichen__ __signierten__ Maße (da die endlich signierten Maße nur spezielle komplexe Maße sind).

Zur Konvergenz in Norm $\|\cdot\|$ auf $\mathcal{M}$:

__Proposition 2.6__

Sind μ_n, μ komplexe Maße auf $(X, \mathfrak{A})$, so gilt:

$\|\mu_n - \mu\| \to 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mu_n(A) \to \mu(A) \quad (n \to \infty)$ gleichmäßig in $A \in \mathfrak{A}$.

__Beweis__

„$\Rightarrow$“ $\forall A \in \mathfrak{A}$: $|\mu_n(A) - \mu(A)| = |(\mu_n - \mu)(A)| \leq |\mu_n - \mu|(A) \leq |\mu_n - \mu|(X)$

$= \|\mu_n - \mu\| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 = n_0(\varepsilon)$ unabh. von A.

„$\Leftarrow$“ Sei $E \in \mathfrak{A}$ bel (insbesondere $E = X$) und $\{A_j\}_{j=1}^{m}$ bel endl. Zerlegung von E mit $A_j \in \mathfrak{A}$:

$$\sum_{j=1}^{m} |\mu_n(A_j) - \mu(A_j)| \underset{\text{Rudin}}{\leq} \pi \cdot \left| \sum_{k=1}^{\ell(n)} [\mu_n(A_{j_k}) - \mu(A_{j_k})] \right| \underset{\mu_n, \mu \text{ add}}{=} \pi \cdot \Big| (\mu_n - \mu)\big(\underbrace{\textstyle\sum_{k=1}^{\ell(n)} A_{j_k}}_{=: E_n}\big) \Big| \leq \varepsilon$$

$\forall n \geq n_0 = n_0(\varepsilon)$ unabh. von E_n

$$\Rightarrow \underbrace{\sup_{\text{Z endl}} \sum |(\mu_n - \mu)(A_j)|}_{= |\mu_n - \mu|(E)} \leq \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$

$E := X \quad \Rightarrow \quad \|\mu_n - \mu\| = |\mu_n - \mu|(X) \leq \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$ ∎

__Proposition 2.7__

Es sei μ ein komplexes Maß mit $|\mu|(X) = 1 = \mu(X)$.

Dann ist μ ein W-Maß, dh. $\mu \geq 0$ und $\mu(X) = 1$.

__Beweis__ Zz. $\forall E \in \mathfrak{A}$ $0 \leq \mu(E) \leq 1$: Sei E mb bel.

 $\Rightarrow 1 = |\mu|(X) \geq |\mu|(E) + |\mu|(X \setminus E) \geq |\mu(E)| + |\mu(X \setminus E)| = |\mu(E)| + |1 - \mu(E)| \geq$

Bemerkung:

Sei μ komplexes Maß $\Rightarrow \mu(A) = \operatorname{Re}\mu(A) + i \operatorname{Im}\mu(A)$

$\operatorname{Re}\mu$ und $\operatorname{Im}\mu$ sind endliche signierte Maße

Sind umgekehrt μ, ν endliche signierte Maße, so folgt

$\sigma = \mu + i\nu$ ist komplexes Maß.

Nun: Zerlegung der endlich signierten Maße

hier: zunächst Jordan-, dann erst Hahnzerlegung!

Theorem 2.8 JORDANSCHER ZERLEGUNGSSATZ

Sei μ ein signiertes Maß

Definiere $\mu^+(E) := \sup\{\mu(A),\ A \subseteq E,\ A \text{ mb}\}$

$\mu^-(E) := -\inf\{\mu(A),\ A \subseteq E,\ A \text{ mb}\}$

(für E mb)

Behauptung: Dann gilt:

i) μ^+, μ^- sind positive Maße, für die höchstens eines ∞ wird

ii) $\mu = \mu^+ - \mu^-$ (heißt Jordanzerlegung)

iii) $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$

Beweis

i) OBdA nur für μ^+:

$\mu^+(\emptyset) = 0$, insbesondere $\mu^+ \geq 0$.

z.z. ist die σ-Additivität von μ^+.

Seien E_j paarweise disjunkt und mb, sonst bel.

z.z. $\mu^+\left(\sum_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu^+(E_j)$.

σ-Additivität von μ^+: Seien E_j paarweise disj., mb., bel.

z.z. $\mu^+(\sum_{j=1}^{\infty} E_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu^+(E_j)$.

„$\leq$" Sei $T \subseteq \sum_{j=1}^{\infty} E_j$ bel $\Rightarrow$ $\mu(T) = \mu(T \cap \sum E_j) = \mu(\sum T \cap E_j)$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \mu(T \cap E_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^+(E_j)$$

„$\geq$" Fall a) $\forall E_j : \mu^+(E_j) < \infty$

Gemäß der sup-Definition von μ^+ läßt sich $\mu^+(E_j)$ annähern:

Zu $\varepsilon > 0$ bel $\exists\, T_j \subseteq E_j$ mit $\mu(T_j) \geq \mu^+(E_j) - \frac{\varepsilon}{2^j}$

$$\Rightarrow \mu^+(\sum_{j=1}^{\infty} E_j) \underset{\text{sup Def. von } T!}{\geq} \mu(\sum_{j=1}^{\infty} T_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(T_j) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^+(E_j) - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^j}$$

$$= \sum_j \mu^+(E_j) - \varepsilon$$

$\varepsilon \to 0$ ergibt die Beh.

Für μ^- geht dieser Schritt analog oder man verwendet μ^+-Beh. auf $-\mu$.

Fall b) $\mu^+(E_{j_0}) = \infty \Rightarrow \mu^+(\sum_{j=1}^{\infty} E_j) \geq \mu^+(E_{j_0}) = \infty = \sum_{j=1}^{\infty} \mu^+(E_j)$. $\square$

ii) z.z. $\mu = \mu^+ - \mu^-$ (Jordanzerlegung).

Zunächst gilt: $-\mu^- \leq \mu \leq \mu^+$

Sei E mb, bel. und $T \subseteq E$ bel. $\Rightarrow$

Fall a) $\mu(E)$ endlich:

$$\mu(T) = \mu(E) - \mu(E \setminus T) \begin{cases} \leq \mu(E) + \mu^-(E \setminus T) \leq \mu(E) + \mu^-(E) \\ \geq \mu(E) - \mu^+(E \setminus T) \geq \mu(E) - \mu^+(E) \end{cases}$$

sup // −inf $\downarrow$

$$\left.\begin{array}{l} \mu^+(E) \leq \mu(E) + \mu^-(E) \\ -\mu^-(E) \geq \mu(E) - \mu^+(E) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \mu(E) \geq \mu^+(E) - \mu^-(E) \\ \mu(E) \leq \mu^+(E) - \mu^-(E) \end{array}$$

$\Rightarrow$ Beh: $\mu(E) = \mu^+(E) - \mu^-(E)$ $\square$

Fall b) $\mu(E) = \infty$, $\mu^+(E) = \infty \Rightarrow$ da $\mu^{+/-}$ nicht gleichzeitig $\pm\infty$

$\mu^-(E)$ endl. $\Rightarrow$ Beh.

Fall c) $\mu(E) = -\infty$ analog $\square$

iii) z.z. $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$

Sei E mb., $\mathcal{Z}\{E_j\}_{j=1}^N$ bel. Zerlegung von E

$$\sum_{j=1}^N |\mu(E_j)| = \sum_{S_1 := \mu(E_j)\geq 0} |\mu(E_j)| + \sum_{S_2 := \mu(E_j)<0} |\mu(E_j)| = \sum_{S_1} \mu(E_j) + \sum_{S_2} -\mu(E_j)$$

$$= \sum_1^N (\mu(E_j))^+ + \sum_1^N (\mu(E_j))^- = \mu(\underbrace{\sum_{S_1} E_j}_{\subseteq E}) - \mu(\underbrace{\sum_{S_2} E_j}_{\subseteq E}) \leq \mu^+(E) + \mu^-(E)$$

$$\Rightarrow \sup_{\mathcal{Z}} \sum |\mu(E_j)| = |\mu|(E) \leq \mu^+(E) + \mu^-(E).$$

Sei $T, S \subseteq E \Rightarrow$ (Falls $|\mu|$ endlich:)

$$\mu(T) - \mu(S) = \mu(T) - \mu(S \cap T) - \mu(S \cap T^c) = \mu(T \setminus S) - \mu(S \setminus T)$$

$$\leq |\mu(T \setminus S)| + |\mu(S \setminus T)| \leq |\mu|(E)$$

$$\Rightarrow \sup_{S \subseteq E}, \sup_{T \subseteq E}: \quad \mu^+(E) + \mu^-(E) \leq |\mu|(E)$$

Dies gilt alles, falls $|\mu|$ endlich, denn $|\mu|(E) < \infty \Rightarrow |\mu(E)| < \infty$

Falls $|\mu(E)| = \infty$ gilt Ungleichung $\mu^+(E) + \mu^-(E) \leq \infty = |\mu|(E)$ trivialerweise ∎

<u>Bemerkung</u>: Daß μ^+, μ^- höchstens einen der Werte $\pm\infty$ annehmen kann, wird hier drin Beweis verwendet.

<u>Definition</u> Minimum und Maximum zweier signierter Maße

Seien $m_{1/2}$ endliche signierte Maße auf $(X, \mathfrak{A})$. Dann sei

- $m_1 \leq m_2 \quad :\Leftrightarrow \quad m_1(E) \leq m_2(E) \quad \forall E \in \mathfrak{A}$.
- $(m_1 \wedge m_2)(E) := \inf\limits_{\substack{\text{endl. Zerleg.} \\ (E_j)_1^n \text{ von } E}} \left(\sum_{j=1}^n \min(m_1(E_j), m_2(E_j)) \right)$ Minimum von m_1, m_2
- $(m_1 \vee m_2)(E) := \sup\limits_{\substack{\mathcal{Z} \text{ endl.} \\ \text{v. } E}} \left(\sum_{j=1}^n \max(m_1(E_j), m_2(E_j)) \right)$

Bem: Damit $m_1 \wedge m_2$, $m_1 \vee m_2$ Maße werden, muß man wieder

Bemerkg: Allgemein verwendet man diese Schreibweisen für Max. und Min. auch für Zahlen!

$p \vee q := \max(p,q) \quad p,q \in \mathbb{R}.$

$p \wedge q := \min(p,q) \quad p,q \in \mathbb{R}.$

Lemma 29 Sei μ ein endliches signiertes Maß. Dann gilt:

i) $\mu^- = -(\mu \wedge 0)$

ii) $\mu^+ = \mu \vee 0$

Beweis (hier Fall ii), Aussage i) analog)

- $\max(\mu(E_j),0) \geq 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{m}(\mu(E_j) \vee 0) \geq \mu(E_j) \quad \forall j$

  $A \subseteq E$ bel., fest mb.

  $(\mu \vee 0)(E) = \sup_{\mathfrak{Z}} \sum \max(\mu(E_j),0) \geq (\mu(A) \vee 0) + (\mu(E \setminus A) \vee 0) \geq \mu(A)$

  $\Rightarrow \sup_{A \subseteq E} : \quad (\mu \vee 0)(E) \geq \mu^+(E)$

- Sei $\{E_j\}_1^m$ beliebige Zerlegung von E. OBdA d. Umnummerierg:

  $\mu(E_1) \dots \mu(E_k) \leq 0, \quad \mu(E_{k+1}), \dots, \mu(E_m) \geq 0.$

  $\sum_{j=1}^{m} \max(\mu(E_j),0) = \sum_{j=k+1}^{m} \mu(E_j) = \mu(\underbrace{\textstyle\sum_{k+1}^{m} E_j}_{=:A \subseteq E}) = \mu(A) \leq \mu^+(E)$

  $\Rightarrow \sup_{\mathfrak{Z}} \dots : \quad (\mu \vee 0)(E) \leq \mu^+(E).$ ∎

Satz 2.10

Sind μ_1, μ_2, μ endliche signierte Maße, so gilt:

i) $\mu_1 \wedge \mu_2 \le \mu_1, \mu_2 \le \mu_1 \vee \mu_2$

ii) $\mu_1 \le \mu, \quad \mu_2 \le \mu \Rightarrow \mu_1 \vee \mu_2 \le \mu$
$\mu_1 \ge \mu, \quad \mu_2 \ge \mu \Rightarrow \mu_1 \wedge \mu_2 \ge \mu$ } „Extremaleigenschaften".

iii) $\mu_1 \vee \mu_2 = \mu_1 + (\mu_2 - \mu_1)^+$

iv) $\mu_1 \wedge \mu_2 = \mu_1 - (\mu_2 - \mu_1)^- = \mu_1 - (\mu_1 - \mu_2)^+$

v) $\mu_1 \vee \mu_2, \ \mu_1 \wedge \mu_2$ sind Maße

vi) $|\mu| = \mu \vee (-\mu)$

vii) $\mu^+ \wedge \mu^- = 0$

$-\mu^+ = (-\mu)^-$

$(-\mu)^+ = \mu^-$

Beweis

i) folgt aus der Definition und der Bet. zu. reellen Zahlen
$\min(r,s) \le r, s \le \max(r,s)$

ii) Extremaleigenschaften bei reellen Zahlen:
$a_1 \le r, \ a_2 \le r \Rightarrow \max(a_1, a_2) \le r$
$a_1 \ge r, \ a_2 \ge r \Rightarrow \min(a_1, a_2) \ge r$

iii) Beh: $\mu_1 \vee \mu_2 = \mu_1 + (\mu_2 - \mu_1)^+$ (hier wird die Endlichkeit benötigt, da sonst evtl. Minusteiden undefiniert)

Zunächst gilt $\mu_1 + (\mu_2 - \mu_1)^+ = \mu_1 + [(\mu_2 - \mu_1) \vee 0]$

- Nach (ii): $\mu_1 \le \mu_1 + (\mu_2 - \mu_1)^+$, da $(\mu_2 - \mu_1)^+$ pos. Anteil
  $\mu_2 \le \mu_1 + (\mu_2 - \mu_1)^+$, da
  $\mu_2 - \mu_1 = (\mu_2 - \mu_1)^+ - (\mu_2 - \mu_1)^- \le (\mu_2 - \mu_1)^+$ (~~Lebesgue~~ Jordanzerlg.)
  $\Rightarrow \mu_1 \vee \mu_2 \le \mu_1 + (\mu_2 - \mu_1)^+ \quad (*)$
- $0 \le (\mu_1 \vee \mu_2) - \mu_1$, da $\mu_1 \le \mu_1 \vee \mu_2$ nach (i)
  $\mu_2 - \mu_1 \le (\mu_1 \vee \mu_2) - \mu_1$, da $\mu_2 \le \mu_1 \vee \mu_2$ nach (i)
  $\Rightarrow (\mu_2 - \mu_1) \vee 0 \le (\mu_1 \vee \mu_2) - \mu_1$
  $\Rightarrow \mu_1 \vee \mu_2 \ge \mu_1 + ((\mu_2 - \mu_1) \vee 0) \overset{\text{s.o.}}{=} \mu_1 + (\mu_2 - \mu_1)^+ \quad (**)$

(iv) analog

(v) $m_1 \vee m_2$, $m_1 \wedge m_2$ sind endliche signierte Maße, da nach

(iii) zusgesetzt aus $(\ldots)^+$ und Maß und $(\ldots)^+$ ist Maß.

(vi) $|m| = m \vee (-m)$ folgt aus der $|m|$-Definition und

der Eigenschaft, daß $\max(r,-r) = |r|$

(vii) $m^+ \wedge m^- = 0$ folgt sofort aus (iv), da

$m^+ \wedge m^- = m^+ - (\underbrace{m^+ - m^-}_{m})^+ = m^+ - m^+ = 0$ (Vgl Jordanzerlegg)

■

<u>Definition</u> „Schwacher Träger", „singuläre Maße"

(i) Es sei μ ein Maß auf $(X, \mathfrak{A})$. Dann heißt $S \in \mathfrak{A}$

„schwacher Träger" für μ, falls gilt:

(*) $\mu(E) = \mu(E \cap S) \quad \forall E \in \mathfrak{A}$

Man sagt auch: „μ ist auf S konzentriert"

<u>Bem</u>: (*) ist äquivalent zu: Ist E mb., $E \cap S = \emptyset \Rightarrow \mu(E) = 0$

Der schwache Träger ist nicht eindeutig bestimmt.

Dagegen ist „Träger" = support (wie in Rudin verwendet)

bei Borelmaßen definiert und immer als kompakt

betrachtet und somit dann eindeutig.

<u>Def</u> (ii) Haben 2 Maße μ, ν auf $(X, \mathfrak{A})$ disjunkte schwache Träger,

so heißen μ und ν (zueinander) singulär.

Schreibweise $\mu \perp \nu$

<u>Bem</u>: $\mu \perp \nu \iff \exists E \in \mathfrak{A}: \mu(E) = \nu(E^c) = 0.$

Theorem 2.11 Hahnscher Zerlegungssatz.

Sei μ ein signiertes Maß auf $(X, \mathfrak{A})$. Dann existiert eine Zerlegung $\{P, N\}$ von X, P, N meßbar, so daß gilt:

(1) $\forall E \in \mathfrak{A},\ E \subseteq P:\ \mu(E) \geq 0$

(2) $\forall E \in \mathfrak{A},\ E \subseteq N:\ \mu(E) \leq 0$

P heißt dann μ-positive Menge und

N heißt μ-negative Menge.

Bemerkung I) Der Beweis wird liefern: $\mu^+ \perp \mu^-$

und $\mu^+(E) = \mu(P \cap E)$, $\mu^-(E) = \mu(E \cap N)$ für jede Hahnzerlegung $\{P, N\}$ von X, denn:

$$\mu^+(E) = \mu^+(P \cap E) + \mu^+(N \cap E) = \mu(P \cap E) + \mu^-(P \cap E) + \mu^+(N \cap E)$$

$$\text{und } 0 \leq \mu^-(P) = -\inf\{\underbrace{\mu(A)}_{\geq 0 \text{ per Def von } P},\ A \subseteq P\} \leq 0 \Rightarrow \mu^-(P) = 0 \Rightarrow \mu^-(P \cap E) = 0$$

$$\text{und } 0 \leq \mu^+(N) = \sup\{\underbrace{\mu(A)}_{\leq 0 \text{ per Def von } N},\ A \subseteq N\} \leq 0 \Rightarrow \mu^+(N) = 0 \Rightarrow \mu^+(N \cap E) = 0$$

$\square$

Beweis des Hahnschen Zerlegungssatzes:

Weil (unbewiesen) $\mu^+(X), \mu^-(X)$ beide nicht gleichzeitig ∞, sei OBdA $\mu^+(X) < \infty$.

Nach der sup-Definition von μ^+:

Es ex $E_n \subseteq X$, E_n mb mit $\mu(E_n) \geq \mu^+(X) - \frac{1}{2^n}$.

$$\Rightarrow \mu^+(E_n^c) \overset{\text{endl. Add}}{=} \mu^+(X) - \mu^+(E_n) \leq \mu^+(X) - \mu(E_n) \leq \frac{1}{2^n} \quad (1)$$

$$\mu^-(E_n) \overset{\text{Jordan}}{=} \mu^+(E_n) - \mu(E_n) \leq \mu^+(X) - \mu(E_n) \leq \frac{1}{2^n} \quad (2)$$

Wir setzen $\boxed{P := \liminf E_n = \bigcup_{n \geq 1}^{\infty} \bigcap_{j \geq n} E_j}$

$$\Rightarrow P^c = \bigcap_{n \geq 1}^{\infty} \bigcup_{j \geq n} E_j^c = (\limsup E_j^c) \subseteq \bigcup_{j \geq n} E_j^c \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \mu^+(P^c) \leq \mu^+\Big(\bigcup_{j \geq n} E_j^c\Big) \leq \sum_{j \geq n} \mu^+(E_j^c) \leq \sum_{j \geq n} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^n} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

$$\Rightarrow \mu^+(P^c) = 0$$

$$0 \leq \mu^-(P) = \mu^-\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{j \geq n} E_j\Big) \overset{\text{Stetig v.u.}}{=} \lim_{n \to \infty} \mu^-\Big(\bigcap_{j \geq n} E_j\Big) \leq \liminf_{n \to \infty} \mu^-(E_n) \overset{(2)}{\leq} \liminf \frac{1}{2^n} = 0$$

$$\Rightarrow \mu^-(P) = 0.$$

Also $\mu^+(P^c) = \mu^-(P) = 0$

Also wurde auch gezeigt, daß μ^+ und μ^- disjunkte schwache Träger haben, also sind $\mu^{+/-}$ singulär

Mit $N = P^c$: N, P mb.

Sei $A \subseteq P$, A mb $\Rightarrow 0 \leq \mu^-(A) \leq \mu^-(P) = 0 \Rightarrow \mu^-(A) = 0 \Rightarrow \mu(A) = \mu^+(A)$

Sei $A \subseteq P^c$, A mb $\Rightarrow \mu^+(A) \leq \mu^+(P^c) = 0 \Rightarrow \mu(A) = -\mu^-(A) \leq 0$. ∎

Satz 2.12

Seien m_1, m_2 endliche signierte Maße und $\{P, N\}$ sei Hahnzerlegung von $m_1 - m_2$ (was wegen Endlichkeit wohldef. ist)

So gilt:

(1) $(m_1 \vee m_2)(E) = m_1(E \cap P) + m_2(E \cap N) \quad \forall E \in \mathfrak{A}$

(2) $(m_1 \wedge m_2)(E) = m_1(E \cap N) + m_2(E \cap P) \quad \forall E \in \mathfrak{A}$

Beweis

(1) $(m_1 \vee m_2)(E) \overset{\text{Add}}{=} (m_1 \vee m_2)(E \cap P) + (m_1 \vee m_2)(E \cap N)$

$= [m_1 + (m_2 - m_1)^+](E \cap P) + (m_1 + (m_2 - m_1)^+)(E \cap N)$

$\overset{\mu^+ = (-\mu)^-}{=} [m_1 + (m_1 - m_2)^-](E \cap P) + [m_1 + (m_1 - m_2)^-](E \cap N)$

$= m_1(E \cap P) + \underbrace{(m_1 - m_2)^-(E \cap P)}_{\substack{=0 \text{ nach Bem I} \\ \text{unter Satz}}} + m_1(E \cap N) + \underbrace{(m_1 - m_2)^+(E \cap N)}_{=0 \text{ nach Bem I}} - (m_1 - \ldots$

$= m_1(E \cap P) + m_2(E \cap N)$

(2) analog ∎

Satz 2.13

Es seien m_1, m_2 zwei <u>positive</u> Maße auf derselben σ-Alg $(X, \mathfrak{A})$

Dann sind äquivalent

(1) $m_1 \perp m_2$

(2) $m_1 \wedge m_2 = 0$ (m_1 und m_2 sind teilerfremd).

Sprechweise: m_1 singulär zu $m_2 \Leftrightarrow$ "m_1 und m_2 sind teilerfremd".

Beachte: Für signierte Maße allg. ist dieser Satz falsch, denn (2) impliziert, daß $m_1, m_2 \geq 0$.

Beweis

(1) ⇒ (2): $m_1 \perp m_2 \Rightarrow \exists S$ mb : $m_1(E) = m_1(E \cap S)\ \forall E$ mb und $m_2(E) = m_2(E \cap S^c)\ \forall E$ mb

$$\Rightarrow 0 \overset{\text{pos. Maße!!}}{\leq} (m_1 \wedge m_2)(E) = \underbrace{(m_1 \wedge m_2)(E \cap S)}_{\leq m_2(S) = 0} + \underbrace{(m_1 \wedge m_2)(E \cap S^c)}_{\leq m_1(S^c) = 0} = 0 + 0 = 0$$

$\Rightarrow m_1 \wedge m_2 = 0.$

(1) ⇐ (2): [(2) impliziert, daß $m_{1,2} \geq 0$, d.h. Vor. pos. Maße notw.]

Sei $\{P, N\}$ Hahnzerlegung von $m_1 - m_2$

$$\Rightarrow 0 = (m_1 \wedge m_2)(E) = \underbrace{m_1(E \cap N)}_{\geq 0} + \underbrace{m_2(E \cap P)}_{\geq 0} \Rightarrow$$

$\Rightarrow m_1(E \cap N) = 0, \quad m_2(E \cap P) = 0$

$\Rightarrow$ P schwacher Träger für m_1, N schw. Träger für $m_2 \Rightarrow m_1 \perp m_2$ ∎

Satz 2.14

Sei $\mathcal{F}$ eine Familie (!!) positiver endlicher Maße auf $(X, \mathfrak{A})$

Dann existiert ein endliches positives Maß μ_0 mit den Eigenschaften:

(1) $0 \leq \mu_0 \leq \mu \quad \forall \mu \in \mathcal{F}$

(2) Ist ν ein weiteres pos. endliches Maß mit $\nu \leq \mu\ \forall \mu \in \mathcal{F}$, so gilt $\nu \leq \mu_0$ ("Extremaleigenschaft").

<u>Bezeichnung</u>: $\mu_0 = \inf\limits_{\mu \in \mathcal{F}} \mu$

__Beweis__ Definition: $\mu_0(E) := \inf\limits_{\{E_j\} \text{ Zerleg von } E} \sum\limits_{j=1}^{n} \inf\limits_{\mu\in F} \mu(E_j)$

$\Rightarrow$ (1) $\mu_0(\emptyset)=0$

μ_0 endlich, da $\mu_0(E) \le \inf\limits_{\mu\in F}\mu(E) \le \underset{\text{bel}}{\mu(E)} < \infty \quad \forall E.$

(2) μ_0 additiv:

Sei $E=\sum\limits_{j=1}^{N} E_j$

- Wähle nun S_j^i ($i=1..m(j)$) mit $E_j = \sum\limits_{i=1}^{m(j)} S_j^{(i)}$

mit $\mu_0(E_j) \ge \sum\limits_{i=1}^{m(j)} \inf\limits_{\mu\in F}\mu(S_j^{(i)}) - \frac{\varepsilon}{N}$

$\Rightarrow \{S_j^{(i)},\ i=1..m(j),\ j=1..N\}$ ist Zerlegung von E $\Rightarrow$

$\mu_0(E) = \inf \dots \le \sum\limits_{j=1}^{N}\sum\limits_{i=1}^{m(j)} \inf\limits_{\mu\in F}\mu(S_j^{(i)}) \le \sum\limits_{j=1}^{N} (\mu_0(E_j)+\frac{\varepsilon}{N})$

$= \sum\limits_{j=1}^{N} \mu_0(E_j)+\varepsilon$, ε bel $\Rightarrow \mu_0(E) = \mu_0(\sum\limits_{j=1}^{N} E_j) \le \sum\limits_{j=1}^{N} \mu_0(E_j)$

- Wähle nun Zerlegung $E=\sum\limits_{i=1}^{n} S_i$ mit $\mu_0(E) \ge \sum\limits_{i=1}^{n} \inf\limits_{F} \mu(S_i) - \varepsilon$

$\Rightarrow S_j^i := S_i\cap E_j \Rightarrow \{S_j^i,\ j=1..N\}$ ist Zerlegung von S_i.

und $\{S_j^i\ \ i=1..n\}$ ist Zerlegung von E_j.

Wähle $\mu_i \in F$ mit $\mu_i(S_i) \le \inf\limits_{F} \mu(S_i) + \frac{\varepsilon}{n}$

$\Rightarrow \sum\limits_{j=1}^{N} \mu_0(E_j) \le \sum\limits_{j=1}^{N}\sum\limits_{i=1}^{n} \inf\limits_{F} \mu(S_j^i) \le \sum\limits_{j=1}^{N}\sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i(S_j^i) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{N} \mu_i(S_j^i)$

$\le \sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i(S_i) \le \sum\limits_{i=1}^{n} [\inf\limits_{F} \underset{\text{dann!}}{\mu(S_i)} + \frac{\varepsilon}{n}] \le \frac{n\varepsilon}{n} + \mu_0(E)+\varepsilon$

$= \mu_0(E)+2\varepsilon$

$\overset{\varepsilon\to 0}{\Rightarrow} \sum\limits_{j=1}^{N} \mu_0(E_j) \le \mu_0(E) = \mu_0(\sum\limits_{j=1}^{N} E_j).$ ■

- σ-Additivität: μ_0 ist σ-additiv, denn i) μ_0 ist Inhalt und

ii) Ist $A_n \downarrow \emptyset \Rightarrow \mu_0(A_n)\to 0$

aus i) und ii) folgt bei einem endl. Inhalt (also für μ_0) die σ-Additivität. μ_0 ist also dann Maß!

ii) gilt, da $0\le\mu_0\le\mu$. ■

§3 Äußere Maße und das Lebesguemaß im $\mathbb{R}^n$.

<u>Zunächst einige Vorbemerkungen über abstrakte äußere Maße.</u>

<u>Definition "äußeres Maß"</u>

Sei $X \neq \emptyset$, $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ (beachte: also auf der ganzen Potenzmenge def.)

heißt $\boxed{\text{äußeres Maß}}$, falls gilt:

i) $\mu^*(\emptyset) = 0$

ii) μ^* ist monoton, dh $A \subseteq B \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$

iii) $\mu^*(\sum_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$ mit A_n disj., $A_n \subseteq X$. (σ-Subadditiv).

<u>Beispiel:</u>

① $\mu^*(A) := \begin{cases} 0, & \text{falls } A = \emptyset \\ 1, & \text{falls } A \neq \emptyset \end{cases}$ ist äußeres Maß.

② $\mu^*(A) := \begin{cases} 0, & \text{falls } A \text{ endl.} \\ 1, & \text{falls } A \text{ unendl.} \end{cases}$ verletzt (iii)

<u>Konstruktion des äußeren Lebesguemaßes im $\mathbb{R}^n$:</u>

Sei $I := I_1 \times \dots \times I_n$ ein Intervall im $\mathbb{R}^n$, I_j offene Intervalle im $\mathbb{R}^1$ und beschränkt.

$|I| := \prod_{j=1}^{n} |I_j|$ mit $|I_j| = b - a$ für $I_j = (a, b)$: <u>elem. geom. Inhalt</u>

<u>Definiere:</u> $A \subseteq \mathbb{R}^n$: $\boxed{\lambda^*(A) := \inf\{ \sum_{k=1}^{\infty} |I^{(k)}| \text{ mit } A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I^{(k)} \}}$

Wobei die $I^{(k)}$ Intervalle im $\mathbb{R}^n$ sind. $\lambda^*(A)$ ist wohldef. Zahl $\in \overline{\mathbb{R}}$

<u>Satz 3.1</u> <u>Eigenschaft des äußeren Lebesguemaßes λ^*:</u>

λ^* ist ein äußeres Maß, welches Intervallen I tatsächlich den elementargeometrischen Inhalt $\lambda^*(I) \overset{!}{=} |I|$ zuordnet.

Es gilt sogar für beschränkte offene Intervalle I:

$$\lambda^*(\bar{I}) = \lambda^*(I) = |I|.$$

Beweis

i) $\lambda^*(\emptyset)=0$ klar, da man Überdeckung von $\emptyset$ mit beliebig kleinem Inhalt wählen kann.

ii) $A \subseteq B$. Sei $\{I^{(k)}\}$ Überdeckung von B $\Rightarrow$ $\{I^{(k)}\}$ ist Überdeckung von A.
$\Rightarrow \lambda^*(A) \leq \lambda^*(B)$ wegen inf-Definition von λ^*.

iii) Im Fall $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda^*(A_j) = \infty$ ist iii) trivial.
Sei nun $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda^*(A_j) < \infty$, $A_j \subseteq X$.
$\Rightarrow$ zu $\varepsilon>0$ beliebig ex $I^{k,j}$ offene Intervalle, beschränkt mit

$$A_j \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I^{k,j} \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |I^{k,j}| \leq \lambda^*(A_j) + \frac{\varepsilon}{2^j}$$

$$\Rightarrow \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} I^{k,j}.$$

Dann ist $\lambda^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} |I^{k,j}| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^*(A_j) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^j} = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^*(A_j) + \varepsilon$

mit $\varepsilon \to 0$ folgt iii).

Beh: $\lambda^*(\bar{I}) = \lambda^*(I) = |I|$ für $I \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränktes offenes Intervall.
Bew: Wähle J als beschränktes offenes Intervall mit $J \supseteq \bar{I}$ und $|J| \leq |I| + \varepsilon$ (was aufgrund von elementargeom. Verhältnissen mögl. ist).
Da ε bel gilt auf jeden Fall: $\lambda^*(\bar{I}) \leq |I|$ $(*)$

Sei nun $\bar{I} \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I^{(k)}$ $\Rightarrow$ $\bar{I}$ kompakt $\exists N$: $\bar{I} \subseteq \bigcup_{k=1}^{N} I^{(k)}$,
Zerlege nun $\bar{I}$ in endlich viele Teilintervalle $\bar{K_j}$ $(j=1..M)$
mit $\bar{K_j}$ kompakt und $K_j^\circ \cap K_l^\circ = \emptyset$ $\forall l \neq j$, $K_j \subseteq I^{(k(j))}$

$\Rightarrow |\bar{I}| = |I| \underset{\text{El. geom}}{=} \sum_{j=1}^{M} |K_j| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |I^{(k)}|$ $\rightarrow$ war bel. Überdeckg
$\Rightarrow$ Inf-Bildung ergibt: $|I| \leq \lambda^*(\bar{I})$ $(**)$

$(*)$, $(**)$ ergeben $\lambda^*(\bar{I}) = |I|$.

Sei $K \subseteq I$, so daß $\bar{K} \subseteq I$, $|K| \geq |I| - \varepsilon$
$\lambda^*(I) \geq \lambda^*(\bar{K}) = |K| \geq |I| - \varepsilon$

$\varepsilon > 0$ bel $\Rightarrow$ $\lambda^*(I) \geq |I| \geq \lambda^*(\bar{I})$ $\Rightarrow$ $\lambda^*(\bar{I}) = \lambda^*(I) = |I|$

Bemerkung: λ^* heißt das äußere Lebesguemaß im $\mathbb{R}^n$.

Der Weg zum Lebesguemaß nach Carathéodory über das Konzept der λ^*-mb. Mengen:

Definition

Sei μ^* äußeres Maß auf $X \neq \emptyset$. Dann heißt $A \subseteq X$ $\boxed{\mu^*\text{-mb}}$ (nach Carathéodory), falls gilt:

Für alle "Testmengen" $T \subseteq X$: $\mu^*(T) = \mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \cap A^c)$

Also eine Art "schwache Additivitätseigenschaft".

Beachte: $\leq$ gilt wegen Eig (iii) von äußeren Maßen immer, also ist v.a. $\geq$ die wesentl. Forderung. Dh. auch, daß die Untersuchgen für Testmengen mit $\mu^*(T) < \infty$ reichen

Theorem 3.2 (Carathéodory)

Sei μ^* ein äußeres Maß auf $X \neq \emptyset$. Dann gilt:

(1) Die Menge $\mathcal{M}_{\mu^*}$ der μ^*-mb. Mengen ist eine σ-Algebra auf X.

(2) $\mu^*|_{\mathcal{M}_{\mu^*}}$ ist ein (positives) Maß.

Beweis

(1) i) Sei $B \subseteq X$ mit $\mu^*(B) = 0$ oder $\mu^*(B^c) = 0$. Dann folgt:

B ist μ^*-mb, dh $B \in \mathcal{M}_{\mu^*}$.

Bew: $\mu^*(B) = 0 \Rightarrow \mu^*(T \cap B) = 0$ ~~und~~ $\mu^*(T \cap B^c) \leq \mu^*(T)$

$\Rightarrow \mu^*(T) \geq \mu^*(T \cap B) + \mu^*(T \cap B^c) \Rightarrow$ "=", da μ^* äußeres Maß!

$\Rightarrow B$ μ^*-mb $\Rightarrow B \in \mathcal{M}_{\mu^*}$. B^c analog! $\square$

ii) $B \in \mathcal{M}_{\mu^*} \Rightarrow B^c \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ (aufgrund der Symm. der Definition!)

iii) Beh: $B_1, B_2 \in \mathcal{M}_{\mu^*} \Rightarrow B_1 \cup B_2 \in \mathcal{M}_{\mu^*}$.

$B_{1/2} \in \mathfrak{M}_{\mu^*}$. Beh: $B_1 \cup B_2 \in \mathfrak{M}_{\mu^*}$.

Sei dann T bel. Testmenge.

- Da $B_1 \in \mathfrak{M}_{\mu^*}$ gilt bzgl der Testmenge $T \cap (B_1 \cup B_2)$:

$$\mu^*(T \cap (B_1 \cup B_2)) = \mu^*(T \cap (B_1 \cup B_2) \cap \underline{\underline{B_1}}) + \mu^*(T \cap (B_1 \cup B_2) \cap \underline{\underline{B_1^c}})$$

$$= \mu^*(T \cap B_1) + \mu^*(T \cap B_1^c \cap B_2)$$

- Und damit:

$$\mu^*(T \cap (B_1 \cup B_2)) + \mu^*(T \cap (B_1 \cup B_2)^c)$$

$$= \mu^*(T \cap B_1) + \mu^*(T \cap B_1^c \cap B_2) + \mu^*(T \cap B_1^c \cap B_2^c)$$

$$= \mu^*(T \cap B_1) + \mu^*(T \cap B_1^c)$$

$$= \mu^*(T)$$

$\Rightarrow B_1 \cup B_2 \in \mathfrak{M}_{\mu^*}$.

Damit ist $\mathfrak{M}_{\mu^*}$ eine Algebra (per Induktion!).

(iv) Beh: $\forall B_j \in \mathfrak{M}_{\mu^*}$, B_j paarweise disjunkt gilt:

(*) $$\mu^*(T) = \sum_{j=1}^{n} \mu^*(T \cap B_j) + \mu^*(T \cap (\bigcap_{j=1}^{n} B_j^c))$$

(*) wird mittels Induktion bewiesen:

$n=1$: $\mu^*(T) = \mu^*(T \cap B_1) + \mu^*(T \cap B_1^c)$ ✓ da μ^*-Meßbarkeit von B_1

$n \to n+1$: $\mu^*(T) = \sum_{j=1}^{n} \mu^*(T \cap B_j) + \mu^*(T \cap (\bigcap_1^n B_j^c))$ per IndAnn.

Nun gilt für $\mu^*(T \cap (\bigcap_1^n B_j^c))$

$$\mu^*(T \cap (\bigcap_1^n B_j^c)) = \underbrace{\mu^*(T \cap (\bigcap_1^n B_j^c) \cap \underline{\underline{B_{n+1}}})} + \mu^*(T \cap (\bigcap_1^n B_j^c) \cap \underline{\underline{B_{n+1}^c}})$$

$$= \mu^*(T \cap B_{n+1}) + \mu^*(T \cap (\bigcap_1^{n+1} B_j^c))$$

$$\Rightarrow \mu^*(T) = \sum_1^n \mu^*(T \cap B_j) + \mu^*(T \cap B_{n+1}) + \mu^*(T \cap (\bigcap_1^{n+1} B_j^c))$$

$$= \sum_1^{n+1} \mu^*(T \cap B_j) + \mu^*(T \cap (\bigcap_1^{n+1} B_j^c))$$

$\Rightarrow$ Beh!

(v) Beh: B_j paarweise disj: B_j, $j=1,2\ldots \in \mathfrak{M}_{\mu^*} \Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} B_j = \bigcup_1^{\infty} B_j \in \mathfrak{M}_{\mu^*}$

KK

Seien $B_j \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ $j = 1, 2, \dots$, B_j paarweise disjunkt. Nach (iv):

Aufgrund der Monotonie: $\mu^*(T) \geq \sum_1^m \mu^*(T \cap B_j) + \mu^*(T \cap (\bigcap_1^\infty B_j^c))$ $\forall m$.

Mit $m \to \infty$ gilt: $\mu^*(T) \geq \sum_{j=1}^\infty \mu^*(T \cap B_j) + \mu^*(T \cap (\bigcap_{j=1}^\infty B_j^c))$

$$= \sum_{j=1}^\infty \mu^*(T \cap B_j) + \mu^*(T \cap (\bigcup_{j=1}^\infty B_j)^c) \qquad (**)$$

$$\geq \mu^*(T \cap (\bigcup_1^\infty B_j)) + \mu^*(T \cap (\bigcup_1^\infty B_j)^c)$$

Da liefert $\bigcup_{j=1}^\infty B_j \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ im Fall B_j paarweise disj.

(vi) Der allg Fall: Seien $A_j \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ $j = 1, 2, \dots$ evtl nicht paarweise disj.

Wähle die B_j so, daß $B_1 = A_1 \in \mathcal{M}_{\mu^*}$, $B_j = A_j - A_{j-1} = A_j \cap A_{j-1}^c \in \mathcal{M}_{\mu^*}$

$\Rightarrow \bigcup_{j=1}^\infty A_j = \sum_{j=1}^\infty B_j$ und die $B_j \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ $\Rightarrow$ nach (v) gilt $\bigcup_{j=1}^\infty A_j \in \mathcal{M}_{\mu^*}$

$\Rightarrow$ Also ist $\mathcal{M}_{\mu^*}$ σ-Algebra!

(2) $\mu^*|_{\mathcal{M}_{\mu^*}}$ ist ein Maß, denn:

(I) $\emptyset \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ und per Def: $\mu^*(\emptyset) = 0$.

(II) μ^* ist σ-Additiv:

Sei $\{B_j\}_1^\infty$ paarweise disjunkt., $B_j \in \mathcal{M}_{\mu^*}$

$\Rightarrow \mu^*(\sum_{j=1}^\infty B_j) \leq \sum_{j=1}^\infty \mu^*(B_j)$, da μ^* äußeres Maß und

in (iv) gilt bei $(**)$ mit $T := \sum_{j=1}^\infty B_j$:

$$\mu^*(\sum_{j=1}^\infty B_j) \geq \sum_{j=1}^\infty \mu^*(\sum_{i=1}^\infty B_i \cap B_j) = \sum_{j=1}^\infty \mu^*(B_j) + \mu^*(\sum_{j=1}^\infty B_j \cap (\sum_1^\infty B_j)^c)$$

Also $\mu^*(\sum_{j=1}^\infty B_j) = \sum_{j=1}^\infty \mu^*(B_j)$ ∎

<u>Definition</u> <u>Das Lebesguemaß λ_n im $\mathbb{R}^n$:</u>

$\mathfrak{M}_{\lambda^*}$ ist die Menge der Lebesguemb. Mengen

$\lambda^*|_{\mathfrak{M}_{\lambda^*}} =: \lambda_n$ heißt das Lebesguemaß im $\mathbb{R}^n$.

<u>Satz 3.3</u> $\boxed{\text{Jede Borelmenge im } \mathbb{R}^n \text{ ist Lebesguemeßbar.}}$

<u>Beweis:</u> $\mathcal{K} := \{ \bar{K} \mid K \text{ Intervall im } \mathbb{R}^n \}$ die Menge der kompakten Intervalle im $\mathbb{R}^n$ erzeugt die Borelsche σ-Algebra $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.

$\Longrightarrow$ Deshalb genügt z.z.: $\mathcal{K} \subseteq \mathfrak{M}_{\lambda^*}$, denn dann:

$$\mathcal{L}(\mathbb{R}^n) = \mathfrak{A}(\mathcal{K}) \subseteq \mathfrak{A}(\mathfrak{M}_{\lambda^*}) = \mathfrak{M}_{\lambda^*}$$

Zeige also: Jedes kompakte Intervall I im $\mathbb{R}^n$ ist Lebesguemb.:

Sei $T \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $\lambda^*(T) < \infty$.

$\Rightarrow$ ex. $I^{(k)}$ mit $T \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I^{(k)}$ und $\sum_{k=1}^{\infty} |I^{(k)}| \leq \lambda^*(T) + \varepsilon$

Nach Elementargeometrie ex Intervalle $K^{(k)}$ und $J^{k,l}$ mit

$$I^{(k)} \cap I \subseteq K^{(k)}$$

$$I^{(k)} \cap I^c \subseteq \bigcup_{l=1}^{l(k)} J^{k,l} \text{ mit den Eigenschaften:}$$

$$|K^{(k)}| + \sum_{l=1}^{l(k)} |J^{k,l}| \leq |I^{(k)}| + \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} T \cap I \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} K^{(k)} & \Longrightarrow \quad \lambda^*(T \cap I) \leq \sum_{k=1}^{\infty} |K^{(k)}| \\ T \cap I^c \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{l=1}^{l(k)} J^{k,l} & \Longrightarrow \quad \lambda^*(T \cap I^c) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{l(k)} |J^{k,l}| \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lambda^*(T \cap I) + \lambda^*(T \cap I^c) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ |K^{(k)}| + \sum_{l=1}^{l(k)} |J^{(k,l)}| \right\} \leq \sum_{k=1}^{\infty} |I^{(k)}| + \varepsilon \leq \lambda^*(T) + 2\varepsilon$$

ε bel $\Rightarrow$ Behauptung!

Veranschauliche die Wahl der Intervalle!!

Im $\mathbb{R}^1$ (Wahl $l(k) = 1$ ist mögl) Im $\mathbb{R}^2$

Bewegungsinvariant des Lebesguemaßes

Lemma 3.4 Es sei μ^* ein äußeres Maß auf $X \neq \emptyset$ und $f: X \to X$ bijektiv mit der Eigenschaft $\mu^*(f(A)) = c \cdot \mu^*(A)$ $\forall A \subseteq X$, c unabhängig v. A. Dann ist mit A μ^*-mb auch $f(A)$ μ^*-mb.

Beweis Sei T bel. Testmenge. Mit T durchläuft wegen der Bijektivität von f auch f(T) alle Testmengen. ($T \subseteq X$).

$\mu^*(f(T) \cap f(B)) + \mu^*(f(T) \cap f(B)^c) \overset{f\,bij}{=} \mu^*(f(T \cap B)) + \mu^*(f(T \cap B^c))$

$= c \cdot (\mu^*(T \cap B) + \mu^*(T \cap B^c)) \overset{B\,\mu^*\text{-mb.}}{=} c\, \mu^*(T) = \mu^*(f(T)) \Rightarrow f(B)$ ist μ^*-mb ∎

Satz 3.5 Über die Streckung in einer Koordinate

Sei $S_k: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $S_k(x_1, .., x_k, .. x_n) := (x_1, .., p x_k, .. x_n)$, $p > 0$ eine Streckung (in 1 Koordinate). Dann gilt:

i) $\lambda^*(S_k(A)) = p\, \lambda^*(A)$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$

ii) A Lebesguemb $\Rightarrow S_k(A)$ ist Lebesguemb.

Beweis Aus der Elementargeometrie übernommen wird: $|S_k(I)| =$

$|S_k(I)| = \lambda(S_k(I)) = p|I| = p \cdot \lambda(I)$

i) Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ bel. und $A \subseteq \bigcup_{m=1}^{\infty} I_m$ (da S_k Bijektionen)

$\Leftrightarrow f(A) \subseteq \bigcup_{m=1}^{\infty} S_k(I_m)$.

$\lambda^*(A) = \inf\limits_{A \subseteq \cup I_m} (\sum_{m=1}^{\infty} |I_m|) \Rightarrow \lambda^*(S_k(A)) \underset{(!)}{=} \inf\limits_{A \subseteq \cup I_m} \sum_{m=1}^{\infty} |S_k(I_m)| = p \cdot \inf\limits_{A \subseteq I_m} \sum |I_m| = p\, \lambda^*(A)$

ii) Nach Lemma 3.4 folgt die 2. Aussage! □

Korollar 3.6 Für s mit $s(x_1, .., x_n) = (p x_1, .., p x_n)$, $p > 0$ gilt:

$\lambda^*(S(A)) = p^n \lambda^*(A)$ und A Lebesguemb. $\Leftrightarrow$ S(A) Lebesguemb

Satz 3.7 Über die Bewegungsinvarianz des Lebesguemaßes im $\mathbb{R}^n$:

Es sei Φ eine Bewegung im $\mathbb{R}^n$, dh eine Isometrie mit $\det\Phi = 1$
(man kann auch Spiegelungen zulassen!) Dann gilt:

i) $\lambda^*(\Phi(A)) = \lambda^*(A) \quad \forall A \subseteq \mathbb{R}^n$

ii) A lebesguemb $\Leftrightarrow$ $\Phi(A)$ lebesguemb.

Bem: i) gilt also sogar für das äußere Maß, erst recht für λ!

Beweis Bem: Jede Bewegung Φ hat die Form $\Phi = T \circ \Psi$ mit Ψ Drehg und T Tra

- Untersuchung für reine Translationen klar (ähnlich zu obigen Koroll.
- Für reine Drehungen gilt nun:

OBdA sei Φ Drehung um den Nullpunkt.

1.) Für jede offene Menge U (etwa $U = \Phi(I)$ = gedrehtes Intervall oder $U = B_n$ = Einheitskugel im $\mathbb{R}^n$) existiert eine Darstellung als Vereinigung von halboffenen Intervallen.

B_n

Konstruktion: – Überdeckg mit Gitter ...

– Betrachte davon jene halboffenen Intervalle $\tilde{I}_j$, deren Abschluss noch ganz in U liegt.

Dann ist $U = \bigcup_{j=1}^{\infty} \tilde{I}_j$ abzählbare Vereinigg von halboffenen Intervallen $\tilde{I}_j$ von der Form $\tilde{I}_j = [a,b)$ mit $= \{x \in \mathbb{R}^n : a_j \le x_j < b_j, j = 1..n\}$ und die $\tilde{I}_j$ sind paarweise disjunkt!

Jedes solche $\tilde{I}_j$ läßt sich mit geeigneten $p_j > 0$ und $x^{(j)} \in \mathbb{R}^n$ darstellen als $\tilde{I}_j = p_j \tilde{J} + x^{(j)}$, wobei $\tilde{J}$ fest vorgegebenes halboffenes Intervall ist.

2.) $\Phi(I)$ und B_n sind offen $\Rightarrow$ Borelmb $\Rightarrow$ lebesguemb.

3.) Betrachte $\Phi(p\tilde{J} + x) = p\Phi(\tilde{J}) + \Phi(x)$ mit $x \in \mathbb{R}^n$, $p > 0$.

Auch die halboffenen Intervalle sind Borelmengen, also lebesguemb und $\lambda(p\tilde{J}+x) = p^n \lambda(\tilde{J})$ mit dem gleichen Argument.

Es genügt nun $\lambda(\phi(p\tilde{J}+x)) = \lambda(p\tilde{J}+x)$ zu zeigen!

$$(*)\quad \lambda(\phi(p\tilde{J}+x)) = \lambda(p\tilde{J}+x)\cdot \frac{p^n\lambda(\phi(\tilde{J}))}{p^n\cdot\lambda(\tilde{J})} = \frac{\lambda(\phi(\tilde{J}))}{\lambda(\tilde{J})}\cdot\lambda(p\tilde{J}+x).$$

z.z. bleibt also für das feste $\tilde{J}$: $\frac{\lambda(\phi(\tilde{J}))}{\lambda(\tilde{J})} = 1$.

Dazu betrachte die Einheitskugel $B_n = \sum_{j=1}^{\infty}(p_j\tilde{J}+x^{(j)})$ mit $p_j > 0$.

(Da das Ziel „=", nicht „≤" ist verwende hier λ, nicht das äußere Maß.)

ϕ Drehung $\Rightarrow \phi(B_n) = B_n$, $B_n = \sum_{j=1}^{\infty}(p_j\tilde{J}+x^{(j)}) \Rightarrow \phi(B_n) = \sum_{j=1}^{\infty}[p_j\phi(\tilde{J})+\phi(x^{(j)})]$

$$\sum_{j=1}^{\infty}\lambda(p_j\tilde{J}) = \lambda\Big(\sum_{j=1}^{\infty}p_j\tilde{J}+x^{(j)}\Big) = \lambda(B_n) = \lambda(\phi(B_n)) = \lambda\Big(\sum_{j=1}^{\infty}[p_j\phi(\tilde{J})+x^{(j)}]\Big) = \sum_{j=1}^{\infty}\lambda(p_j\phi(\tilde{J}))$$

(1) (2)

$$\Rightarrow \text{Nach } (*):\quad \lambda(B_n) = \sum_{j=1}^{\infty}\lambda(\phi(p_j\tilde{J}+x^{(j)})) \underset{(*)}{=} \frac{\lambda(\phi(\tilde{J}))}{\lambda(\tilde{J})}\cdot\sum_{j=1}^{\infty}\lambda(p_j\tilde{J}+x^{(j)}) = \frac{\lambda(\phi(\tilde{J}))}{\lambda(\tilde{J})}\,\lambda(B_n)$$

$\Rightarrow \frac{\lambda(\phi(\tilde{J}))}{\lambda(\tilde{J})} = 1 \Rightarrow$ Drehungsinvarianz!

$\Rightarrow$ Bewegungsinvarianz für halboffene Intervalle

- Sei nun $A \subseteq X$

Fall 1: $\lambda^*(A) < \infty \Rightarrow \exists\, I_j$, $A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$ und $\lambda^*(A) \geq \sum_{j=1}^{\infty}|I_j| - \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ bel.)

$\phi(A) \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty}\phi(I_j) \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty}\phi(\tilde{I}_j)$ ($\tilde{I}$ halboffen, I offen. Halboffen benötigt, da nur für diese Bewegungsinvarianz!)

λ^* äußeres Maß

$$\Rightarrow \lambda^*(\phi(A)) \leq \sum_{j=1}^{\infty}\lambda^*(\phi(\tilde{I}_j)) = \sum_{j=1}^{\infty}\lambda^*(\tilde{I}_j) = \sum_{j=1}^{\infty}\lambda^*(I_j) \leq \lambda^*(A)+\varepsilon$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig, folgt $\lambda^*(\phi(A)) \leq \lambda^*(A)$.

Fall 2: $\lambda^*(A) = \infty \Rightarrow \lambda^*(\phi(A)) \leq \infty = \lambda^*(A)$ trivial.

Weil ϕ^{-1} wieder Bewegung, folgt die umgekehrte Abschätzung!

$\Rightarrow \lambda^*(\phi(A)) = \lambda^*(A)$ für alle $A \subseteq \mathbb{R}^n$ und ϕ bel. Bewegung.

(ϕ kann im Beweis auch Spiegelung sein!)

- Mit Lemma 3.4 folgt, da A bijektiv:

A Lebesguemeß. $\Leftrightarrow \phi(A)$ Lebesguemeß. und dann $\lambda(\phi(A)) = \lambda(A)$;

<u>Frage:</u> λ^2 2dimensionales Lebesguemaß auf $\mathbb{R}^2$. Wie kommt man zu dem in der FTH verwendeten Lebesguemaß auf $T = \partial\mathbb{D}$?

Sei allg S^{n-1} die Oberfläche der Einheitskugel B_n im $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$

<u>Definiere:</u> Ein Maß auf der Oberfläche S^{n-1} der Einheitskugel B_n

(Beachte $S^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n \Rightarrow$ Spur-σ-Algebra induziert!)

Für A Lebesguemenge in S^{n-1}, dh Spurbildg: $A = L \cap S^{n-1}$ mit L Lebesguemenge im $\mathbb{R}^n$

Definiere: $\lambda^{n-1}(A) := n \cdot \lambda(\{\alpha x \in B_n : x \in A, 0 \leq \alpha \leq 1\})$

(Multiplikation mit n, damit Übereinstimmung mit der Elementargeometrie im $\mathbb{R}^2$: Kreisfl. π, Umfang 2π)

Dann ist λ^{n-1} ein rotationsinvariantes (!) Maß auf S^{n-1}.

Nachweis der echten Inklusionen : Borelmb $\subsetneq$ Lebesguemb $\subsetneq$ $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$

① <u>Konstruktion einer Menge $E \subseteq \mathbb{R}^n$, welche keine Lebesguemenge ist</u>

Hier wird eine Menge über die $\boxed{\text{Vitali}}$-Konstruktion gegeben, eine weitere Menge folgt automatisch aus dem Banach-Tarsky-Theorem

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$

Definiere eine Äquivalenzrel. $\sim$ in A durch: $x \sim y :\Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}^n$, dh Differenz hat nur rationale

Es entsteht dadurch also eine Klasseneinteilg: $A = \sum_{\alpha \in \Omega} K_\alpha$

Wähle mittels Auswahlaxiom (!) aus jeder Klasse K_α ein x_α aus

Und definiere damit die Menge $E = V := \{x_\alpha : \alpha \in \Omega\}$

V ist also ein Vertretersystem.

Eigenschaften von V sind:

Bew: Sonst $\exists v, w \in V$: $v+r = w+s \Rightarrow v-w = s-r \in \mathbb{Q}^n \Rightarrow v \sim w \Rightarrow [v]_\sim = [w]_\sim \Rightarrow v = w$ ↯

(da V Vertretersystem der K_α). Also $(V+r) \cap (W+s) = \emptyset$ für $r \neq s$. □

(2) $A \subseteq \bigcup_{r \in \mathbb{Q}^n} (V+r)$

Bew: Sei $a \in A \Rightarrow \exists x_\alpha : a \in K_{\alpha}$ Klasse! $\Rightarrow a = x_{\alpha} + r$ $r \in \mathbb{Q}^n \Rightarrow a \in V+r \Rightarrow$ Beh

Satz 3.8 Jedes $A \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $\lambda(A) > 0$ enthält eine nicht-Lebesgue-mb. Teilmenge

Beweis Sei OBdA $A \subseteq \bar{I}$, $\bar{I}$ kompaktes Intervall.

Sei V die Vitalimenge wie oben. Beh: V ist nicht Lebesgue-mb.

Denn angenommen V ist Lebesgue-mb $\Rightarrow V+r$ ist Lebesgue-mb $\forall r \in \mathbb{Q}^n$

(aufgrund der Translationsinvarianz!)

Insbesondere für $r^{(k)} = (\frac{1}{k}, 0, 0 \ldots 0)$: $W := \bigcup_{k=1}^{\infty} (V + r^{(k)})$ ist L-mb.

Sei I von der Form $(a, b) \Rightarrow W \subseteq [a, c)$ mit $c := b + (1, 0, \ldots 0)$

(Diese Spezialkonstruktion ist notwendig, damit das Maß endl. wird)

$\Rightarrow \infty > \lambda(W) = \sum_1^{\infty} \lambda(V + r^{(k)}) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(V) \Rightarrow \lambda(V) = 0 \Rightarrow \lambda(V + r^{(k)}) = 0 \Rightarrow \lambda(W) = 0$

Nach (2) ist $A \subseteq W$

$\Rightarrow \lambda(A) = 0$ ↯.

Bem 1: In der Konstruktion der Vitalimenge V wurde das Auswahlaxiom benutzt! 1964 zeigte Solovay, daß ohne Auswahlaxiom keine nicht-Lebesgue-mb. Menge konstruierbar ist.

Bem 2: Da nicht speziell das Lebesguemaß λ oben benutzt wurde gilt auch: Ist μ ein beliebiges translationsinvariantes Maß auf den Lebesguemengen mit $\mu([0,1]^n) = 1$, so hat μ keine translationsinvariante σ-additive Fortsetzung auf $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$.

2) Konstruktion einer Lebesguemenge, welche keine Borelmenge ist:

mit Hilfe der Cantormengen!

Seien $C_1, C_2 \subseteq [0,1]$ Cantormengen mit $\lambda(C_1)=0$ und $\lambda(C_2)>0$.
C_1 sei dabei die übliche Cantorsche Drittelungsmenge und
C_2 sei mittels vorgegebener p_n mit $0<p_n<1$ analog
konstruiert wie folgt:

1) Man schneide in der Mitte aus $[0,1]$ ein Intervall der Länge p_1 aus.

2) Dann schneide man aus der Restmenge (links und rechts) jeweils aus der Mitte ein Intervall der Länge $\frac{1}{2}(1-p_1)p_2$ aus

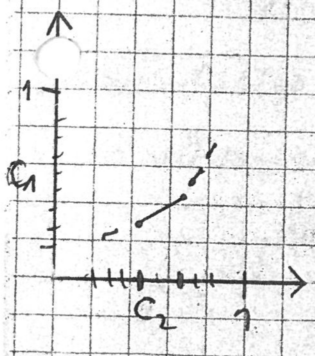
3) Intervalle der Länge $\frac{1}{2}(1-p_1)(1-p_2)p_3$ ausschneiden.

... Der Rest sei die Cantormenge $C_2=[0,1]\setminus\bigcup_{1}^{\infty} I_j$
und $\lambda(C_2)=\prod_{j=1}^{\infty}(1-p_j)$. Dieses Produkt konvergiert (evtl. eben gegen 0) immer.

Betrachte nun eine Abbildung $f:[0,1]\to[0,1]$ und zwar:

Beh: Es ex. eine Cantorfunktion $f:[0,1]\to[0,1]$,

mit:
- $f: C_2 \to C_1$
- $f(C_2)$
- f bijektiv
- f monoton wachsend
- f stetig.



Beweis: Definiere auf den bei der C_2-Konstruktion ausgeschnittenen Intervallen lineare Funktionen.
Außerhalb, dh auf C_2, definiere sie durch $G(t)$.
(Dies ist möglich, da bei der Cantormenge jeder Punkt Häufungspunkt ist).

Sei $A_2 \subsetneq C_2$ nicht Lebesgue-mb. Teilmenge, $A_1 := f(A_2)$