UNIVERSITE PAUL VERLAINE, METZ *Année Universitaire 2010/2011*
Département de Mathématiques

Prof. Raymond Mortini

Equations différentielles, 3^{me} feuille

Exercice 6

Déterminer toutes les solutions des systèmes d'équations différentielles linéaires et AVI suivantes et calculer les déterminants de Wronski associés:

1) $y' = Ay + b$, avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2) $y' = Ay + b$, avec

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -8 & 4 \\ 5 & -6 & 3 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

3) $y' = Ay + b(t)$, $y(1) = (11e, e, 18e)^t$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & 1 \\ -3 & 8 & 2 \end{pmatrix}, \qquad b(t) = \begin{pmatrix} 10te^t \\ 2te^t \\ 14te^t \end{pmatrix}.$$

4) $y' = Ay$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

5) $y' = Ay, y(0) = (0, 1, 0)^t$ avec

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 5 & -3 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

6) $y' = A(t)y + b(t), y(0) = (0,0)^t$, avec

$$A = \begin{pmatrix} t-1 & 2 \\ 1 & t \end{pmatrix}, \qquad b(t) = \begin{pmatrix} t-5 \\ -2t+1 \end{pmatrix}.$$

Indication: le système homogène admet une solution de la forme (u,v) où u et v sont lniírements dépendantes.

Exercice 7

Déterminer la matrice e^A pour

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 8

Montrer qu'il existe un système linéaire unique $y' = Ay$, A matrice à coefficients constants, tel que les fonctions

$$y_1(x) = (1,0,-2)^t e^{2x}, \qquad y_2(x) = (0,1,-3)^t e^{2x}, \qquad y_3(x) = (x,-2x,4x+1)^t e^{2x}.$$

forment un systeme fondamental pour $y' = Ay$.

Exercice 9

Déterminer une matrice fondamentale $Y(t)$ du système $y' = A(t)y$ avec $Y(1) = E$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{t(t^2+1)} & \frac{1}{t^2(t^2+1)} \\ 0 & \frac{-t^2}{(t^2+1)} & \frac{2t^2+1}{t(t^2+1)} \end{pmatrix}.$$

Indication: Il existe une solution de la forme $y(t) = (a+bt, c+dt, e+ft)^t$.

Exercice 10

Déterminer toutes les solutions du système

$$\begin{pmatrix} y_1' & = & (3t-1)y_1 + (1-t)y_2 + te^{t^2} \\ y_2' & = & (t+2)y_1 + (t-2)y_2 + e^{t^2} \end{pmatrix}.$$

Indication: Le système homogène admet une solution de la forme $y_1 = y_2$.