Université de Lorraine, METZ
Département de Mathématiques
Prof. Raymond Mortini

Année Universitaire 2012/2013

Cacul intégral, 2$^{\text{me}}$ feuille

Exercice 13

Soit $\mathcal{C}$ un arc de cercle—muni de masse homogène à densité $\rho(x)$— de rayon R et d'angle d'ouverture 2ϕ, $(0 < \phi < \pi)$. Supposons que le cercle est centré à l'origine et que $\mathcal{C}$ est symétrique par rapport à l'axe Ox. Calculer pour $\rho(x) \equiv \rho$ les coordonnées du centre d'inertie de $\mathcal{C}$ qui sont données par

$$S_i = \frac{1}{M} \int\limits_{\mathcal{C}} x_i \rho(x)\, ds \qquad (i = 1, 2),$$

où M est la masse totale.
Même question pour la cycloï de $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t),\ 0 \leq t \leq 2\pi,\ a > 0.$

Exercice 14

Soit $\mathcal{K}$ la cardioïde $r(\theta) = a(1 + \cos\theta),\ -\pi \leq \theta \leq \pi.$

(a) Déterminer l'abscisse curviligne $s(\theta)$ de $\mathcal{K}$ et donner pour le cas $a = 1$ le paramétrage de $\mathcal{K}$ en fonction de s.
(b) Calculer les intégrales $\displaystyle\frac{1}{L} \int\limits_{\mathcal{K}} x_i\, ds \qquad (i = 1, 2)$, où L est la longueur de $\mathcal{K}$.

Exercice 15

(a) Calculer l' intégrale curviligne

$$\int\limits_{\mathcal{K}} \big(x^2 - \frac{1}{2}xy\big)\, dx + (y^2 + xy)\, dy + z\, dz,$$

où $\mathcal{K}$ est la courbe polygonale fermée d'origine $(0, 0, 0)$, et passant par les points $(0, 1, 1)$ et $(1, 1, 0)$.
(b) Soit $\mathcal{L}$ la courbe donnée par $r(\theta) = \sqrt{2\cos 2\theta} \qquad (-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4})$. Calculer

$$\int\limits_{\mathcal{L}} xy\, dx - x^2\, dy.$$

Esquisser les courbes $\mathcal{K}$ et $\mathcal{L}$.

Exercice 16

Soit $g(t) = \sin t$ et $f(x,y) = \left(\dfrac{y}{x^2+y^2} + yg(xy), \dfrac{-x}{x^2+y^2} + xg(xy) \right)$
si $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
Est-ce-que f a une primitive dans les ouverts suivants:

(a) le disque $x^2 + y^2 < 2x$,
(b) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Si oui, on déterminera une primitive.

Exercice 17

(a) Est-ce-que les champs vectoriels suivants possèdent des primitives sur $\mathbb{R}^3$ resp. $\mathbb{R}^2$?

$$f_1(x,y,z) = (y^2 + 2xz, z^2 + 2xy, x^2 + 2yz), \quad f_2(x,y) = (\sin x + \cos y, \cos y).$$

Au cas d'une réponse affirmative on déterminera toutes les primitives.

(b) Calculer les intégrales $\int_{K_1} f_1 \cdot \; d(x,y,z)$ et $\int_{K_2} f_2 \cdot \; d(x,y)$ pour les courbes $K_1 : x = \cos t, y = \cosh t, z = \sin t$ $(0 \leq t \leq 5\pi)$ et $K_2 : x = \arcsin t, y = \arccos t$ $\ (0 \leq t \leq \sqrt{3}/2)$.

Exercice 18

Soit Γ la courbe paramétrée par $x(t) = \frac{t^2}{2} - t + 2,\ y(t) = \frac{4}{3} t^{\frac{3}{2}}$, $1 \leq t \leq 5$.
a) Calculer la longueur de la courbe Γ.
b) Chercher le paramétrage de Γ par rapport à l'abscisse curviligne $s(t)$.

Exercice 19

Soit Γ la courbe donnée par les coordonnées polaires $(r(\theta)\cos\theta, r(\theta)\sin\theta)$, où $r(\theta) = 1 + \sin\theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.
(a) Quelle est la représentation graphique correcte de Γ?

(b) Déterminer la longueur de Γ ainsi que l'aire du domaine borné délimité par cette courbe.

on peut utiliser que $1 + \sin t = 2\cos^2\left(\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} - t)\right)$.

Exercice 20

Soit $\mathcal{C}$ la courbe donnée par sa représentation polaire $r(t) = \sin t + \sqrt{3}\cos t,\ 0 \leq t \leq 2\pi$. Est-ce que $\mathcal{C}$ est une courbe fermée? Représenter cette courbe sous la forme $\Phi(t) = (x(t), y(t)),\ 0 \leq t \leq 2\pi$. Esquisser $\mathcal{C}$ et en déterminer sa longueur. Résoudre l'équation $x'(t) = 0$ et trouver tous les points de cette courbe qui admettent une tangente verticale.

Exercice 21

Soit Γ la courbe donnée par le paramétrage $\Phi(t) = (4\log t, 2t + 2/t)$, $2 \leq t \leq 4$.
Donner la représentation cartésienne de cette courbe, esquisser son graphe et calculer la longueur de Γ.