*Université de Lorraine, METZ*
*Département de Mathématiques*
Prof. Raymond Mortini

*Année Universitaire 2012/2013*

## Cacul intégral, $1^{\text{re}}$ feuille

**Exercice 1**

Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq a^2\}$. Calculer l'intégrale double suivant:

$$\int\int_D \frac{y}{x^2 + a^2}\, dxdy.$$

**Exercice 2**

Soit $f(x,y) = xy$ et

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{y} \leq x \leq 6 - y \qquad \text{et} \qquad 0 \leq y \leq 4\}.$$

Esquisser l'ensemble $B$ et calculer l'intégrale double $\int_B f(x,y)\, d(x,y)$.

**Exercice 3**

Soit $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x} \leq y \leq 2, x \geq y\}$. Calculer l'intégrale

$$\int_G \exp(x/y) d(x,y).$$

**Exercice 4**

Calculer l'aire de l'intérieur des courbes $\mathcal{C}_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2+y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)\}$ et $\mathcal{C}_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}\}$, $a > 0$ et du domaine borné délimité par la courbe $x = 2 - \sin y$, la droite passant par l'origine et le point $(2, 2\pi)$ et l'axe des $x$.

Esquisser ces domaines.

**Exercice 5**

Calculer l'aire de la surface $S$ bordée par les courbes

$$r(\theta) = 1 + \cos 3\theta \qquad (0 \leq \theta \leq \pi/3) \qquad\qquad \rho(\theta) = 1 + \cos 4\theta \qquad (0 \leq \theta \leq \pi/4).$$

**Exercice 6**

Déterminer le volume du corps $S$ donné par

$$S = \{(x,y,z) : 2x^2 + y^2 \le z \le 4 - y^2\}.$$

Donner une représentation graphique de $S$.

**Exercice 7**

Calculer les intégrales multiples suivants:

(a) $\int_D z \, d(x,y,z)$, où $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 1\}$.

(b) $\int_\Delta (x^3 + y^2 x) \, d(x,y)$, où $\Delta$ est le triangle aux coins $(0,0),\ (-1,2),\ (4,2)$.

(c) $\int_P y \, d(x,y)$, où $P$ est le domaine borné délimité par la droite $y = -1 + x$ et la parabole passant par les points $(0,-5), (1,0), (3,4)$.

(d) $\displaystyle\int_V \frac{d(x,y,z)}{(1+x+y+z)^3}$, où $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z \le 1,\ x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0\}$.

(e) $\displaystyle\int_B \left(x^2 + y^2 + (z-2)^2\right)^{-1} d(x,y,z)$, où $B$ est la boule unité.

**Exercice 8**

Soit $0 < r < R$. La rotation autour de l'axe $Oz$ du disque $(x-R)^2 + z^2 \le r^2$, qui se trouve dans le plan $y = 0$, engendre le tore $T$. Calculer le volume de $T$.

**Exercice 9**

Calculer le volume des parties de $\mathbb{R}^3$ suivantes:

(a) l'intersection des boules $x^2 + y^2 + z^2 \le 1$ et $x^2 + y^2 + (z-1)^2 \le 1$.
(b) l'intersection des deux cylindres $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le 1\}$ et $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 \le 1\}$.

**Exercice 10**

Soit $B$ le corps délimité par les plans $x = 1, y = 0, z = 0$ et $x + y + z = 2$ et soit $f(x,y,z) = (x+y+z)^{-3}$. Calculer $\int_B f(x,y,z) d(x,y,z)$.

**Exercice 11**

Soit $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < 1,\ 0 < x < 2 - y\}$. L'image de $G$ par l'application $f(x,y) = (u,v) = (x+y, y-x^2)$ est noté par $G'$.

(a) Montrer que $f$ est un difféomorphisme de $G$ sur $G'$. Esquisser $G$ et $G'$.
(b) Calculer $\int_{G'} \frac{d(u,v)}{(u-v-12)^2}$.