UNIVERSITE DE METZ *Année Universitaire 2003/2004*
Département de Mathématiques

Prof. Raymond Mortini

AF 1 (maîtrise) analyse fonctionnelle

Exercice 1

Soient E un espace normé sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $x_1, \cdots, x_n \in E$ des vecteurs linéairement indépendants et $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{K}$. Montrer qu'il existe une application linéaire continue $f : E \to \mathbb{K}$ telle que $f(x_k) = \alpha_k$ pour tout $k \in \{1, \cdots, n\}$.

Exercice 2

Montrer que:
(a) le dual topologique de $l1$ est isomorphe isométrique l^∞.
(b) le dual topologique de c_0 est isomorphe isométrique $l1$.

Exercice 3

(1) Soit ℓ^∞ l'espace de Banach des suites réelles bornées. Montrer qu'il existe une forme linéaire L continue sur ℓ^∞ de norme 1 telle que pour tout $x = (\xi_k) \in \ell^\infty$

$$\liminf_{k\to\infty} \xi_k \leq L(x) \leq \limsup_{k\to\infty} \xi_k$$

et que $L(\xi_1, \xi_2, \cdots) = L(\xi_2, \xi_3, \cdots)$.

Indication: considérer sur le sous espace vectoriel

$$F = \left\{ (\xi_k) \in \ell^\infty : \lim_{n\to\infty} \frac{\xi_1 + \cdots + \xi_n}{n} \text{ existe} \right\}$$

l'application $(\xi_k) \mapsto \lim_{n\to\infty} \frac{\xi_1+\cdots+\xi_n}{n}$.

(2) Soit E un espace normé.
Est-ce que E séparable implique E^* séparable?
Est-ce que E^* séparable implique E séparable?

(3) En déduire que $(\ell^\infty)^*$ n'est pas isomorphe isométrique à $\ell 1$.

Exercice 4

Soit X un espace de Banach, $F \subseteq X$ un sous-espace fermé, et $S \in L(F, \ell^\infty)$ une application linéaire continue. Montrer qu'il existe $T \in L(X, \ell^\infty)$, qui prolonge S et qui satisfait $\|S\| = \|T\|$.

UNIVERSITE DE METZ *Année Universitaire 2003/2004*
Département de Mathématiques

Prof. Raymond Mortini

AF 2 (maîtrise) Analyse fonctionnelle

Exercice 5

Soit $D : C^1([0,1]) \to C([0,1])$ l'opérateur diffé rentiel défini par $Df = f'$.
(a) Montrer que $C^1([0,1])$, muni avec la norme $\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$, est un espace de Banach.
(b) Montrer que $D : \big(C^1([0,1], \|\cdot\|\big) \to \big(C([0,1], \|\cdot\|_\infty\big)$ est une application linéaire bornée, donc continue. Cependant, si on regarde $C^1([0,1])$ comme sous espace normé de $C([0,1])$, alors D n'est pas continue.

Exercice 6

Soit E un espace normé, $F \subseteq E$ un sev et $x_0 \in E$. A démontrer:

$$x_0 \in \overline{F} \Longleftrightarrow [\forall\, L \in E^* : L|_F = 0 \Longrightarrow Lx_0 = 0];$$

$$F \text{ dense dans } E \Longleftrightarrow [\forall L \in E^* : L|_F = 0 \Longrightarrow L \equiv 0].$$

Exercice 7

Montrer que l'opérateur $A : \ell^1 \to c_0$ définie par $A(x_n) = (y_n)$, où $y_n = \sum_{k \geq n} x_k$ est continue et déterminer explicitement l'opérateur dual $A^* \in L(\ell^1, \ell^\infty)$ de A.

Exercice 8

Dans l'espace quotient $\ell^\infty/(c_0)$ on déterminera explicitement la norme de quotient.

Exercice 9

a) Soit E un espace normé et F un sous-espace fermé de E. Montrer que E est un espace de Banach si et seulement si F et E/F sont des espaces de Banach.

b) Soit H et G des sous-espaces de E. Montrer que si H est fermé et G de dimension finie, alors $H + G$ est fermé.

c) Donner un exemple d'un espace normé E et de deux sous espaces fermés F_j de E telque $F_1 + F_2$ ne soit pas fermé.

Exercice 10

Montrer qu'une base algébrique d'un espace de Banach est ou bien finie ou bien non-dénombrable.

Exercice 11

Montrer que ℓ^1 est un sous-ensemble maigre et dense dans (c_0).

Exercice 12

Montrer que l'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$ et qui ne sont différentiables dans aucun point de $[0,1]$ est un ensemble dense non maigre dans $C\big([0,1], ||\cdot||_\infty\big)$.
Indication: Considérer les ensembles

$$F_n = \left\{ g \in C([0,1]) : \exists t_0 \in [0,1] : \left| \frac{g(t_0+h) - g(t_0)}{h} \right| \leq n \ \forall h \text{ tq } 0 < t_0 + h < 1 \right\}$$

Exercice 13

Soit $A : l^\infty \to l^\infty$ l'application linéaire définie par $A(x_1, x_2, \cdots) = (x_1, \dfrac{x_2}{2}, \dfrac{x_3}{3}, \cdots)$, où $(x_n) \in l^\infty$. Montrer que:

(a) A est injective et continue avec $\|A\| = 1$, mais A n'est pas surjective.
(b) L'inverse $A^{-1} : A(l^\infty) \to l^\infty$ n'est pas continue.

Est-ce que $A(E)$ est fermé?

Exercice 14

Donner des exemples d'espaces normés E, F et d'opérateurs $A \in \ell(E, F)$ tel que le graphe de A soit fermé sans que A soit continue.

Exercice 15

Soit F l'espace normé des suites finies muni avec la norme du supremum. Montrer que l'opérateur A définie par

$$A(x_1, x_2, \cdots, x_n, 0, \cdots) := (x_1, 2x_2, \cdots, nx_n, 0, \cdots)$$

est limite simple d'une suite d'applications linéaires continues, mais que A est discontinue en chaque point.

Exercice 16

Soient E, F des espaces de Banach et $A : E \to F$ et $B : F^* \to E^*$ des opérateurs linéaires tel que

$$(Ax, x^*) = (x, Bx^*) \ \forall x \in E, \forall x^* \in F^*.$$

Montrer que A et B sont continues et que $B = A^*$.

UNIVERSITE DE METZ *Année Universitaire 2003/2004*
Département de Mathématiques

Prof. Raymond Mortini

AF 3 (maîtrise) Analyse fonctionnelle

Exercice 17

Démontrer que chaque norme pour laquelle $C([0,1]$ est complet et pour laquelle les ensembles $\{f \in C([0,1]) : f(x_0) = 0\},\ x_0 \in [0,1]$, sont fermés, est équivalente à la norme du supremum.

Exercice 18

(a) Montrer que sur chaque espace vectoriel $E \neq \{0\}$ il existe une norme.
(b) Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach de dimension infinie. Montrer qu'il existe une infinité de normes $\|\cdot\|_n$ complètes sur E qui ne sont pas équivalentes deux à deux .

Indication: Si B est une base algébrique de E et $\varphi : B \to]0,\infty[$, on considère $\|x\|_\varphi := \|T_\varphi x\|, x \in E$, où $T_\varphi : E \to E$ est l'endomorphisme définie par: $T_\varphi b = \varphi(b)b, \forall b \in B$.

Exercice 19

Soit $(E, ||\cdot||_1)$ un espace de Banach. A démontrer:
(a) Chaque norme $||\cdot||_2$ pour laquelle E est complet et a la propriété que $(E, ||\cdot||_1)^* \cap (E, ||\cdot||_1)^*$ soit séparante, est équivalente à $||\cdot||_1$.

(b) Si la forme linéaire φ sur E est discontinue pour $||\cdot||_1$, alors il n'existe pas de norme complet sur E pour laquelle φ et chaque $f \in (E, ||\cdot||_1)^*$ soient continues.

Exercice 20

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach sur $\mathbb{R}$ et $x_0 \in E$. Montrer que pour chaque forme linéaire φ sur E avec $\varphi(x_0) \neq 0$ l'expression

$$\|x\|_\varphi := \inf_{t \in \mathbb{R}} \|x - tx_0\| + |\varphi(x)| \quad (x \in E)$$

définie une norme complète sur E pour laquelle φ est continue avec $\|\varphi\|_\varphi = 1$. En plus, une forme linéaire f de E avec $f(x_0) = 0$ est continue par rapport à $\|\cdot\|_\varphi$ si et seulement si f est continue par rapport à $\|\cdot\|$. Dans ce cas on a $\|f\|_\varphi = \|f\|$.

Exercice 21

Soient $||\cdot||_1$ et $||\cdot||_2$ deux normes sur l'espace vectoriel E sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Montrer que si $(E, ||\cdot||_1)^*$ et $(E, ||\cdot||_2)^*$ coïncident (comme sous-ensembles de $\ell(E, \mathbb{K})$), alors les normes $||\cdot||_1$ et $||\cdot||_2$ sont équivalentes.

Exercice 22

Soit (E, d) un espace métrique. On dit qu'une partie N de E est *nulle part dense*, si $\overline{N}^0 = \emptyset$. Montrer que N est nulle part dense dans E si et seulement si chaque boule ouverte B de E contient une boule disjointe avec N.

Une partie M de E est dite *maigre*, si elle est contenue dans une réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide. Montrer que $M \subseteq E$ est maigre $\iff$ M est réunion dénombrable d'ensembles nulle part denses dans E.

Exercice 23

Soit (E, d) un espace topologique. Montrer l'équivalence des assertions suivantes:

(1) E est un espace de Baire
(2) $M^0 = \emptyset$ pour toute partie maigre M de E.
(3) Aucun ouvert non vide de E est maigre.
(4) $\overline{E \setminus M} = E$ pour tout $M \subseteq E$, M maigre.

Donner des exemples et des contre-exemples d'espaces de Baire métrisables.

Exercice 24

Soit E un espace topologique et soit S un sous-espace de E. Montrer que:

(1) Une partie M de S qui est maigre dans S est maigre dans E.
(2) Si S est ouvert et si $M \subseteq S$ est maigre dans E, alors M est maigre dans S.
(3) Tout ouvert d'un espace de Baire est un espace de Baire.
(4) Si E est un espace de Baire, alors le complémentaire de toute partie maigre de E est un espace de Baire.

Exercice 25 (Applications)

(a) Est-ce-que $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ est-il maigre dans $[0, 1]$? Même question pour $[0, 1] \setminus \mathbb{Q}$. Montrer que l'ensemble des nombres irrationnels dans $[0, 1]$ n'est pas un ensemble de la forme F_σ. Est-ce-que l'ensemble des nombres rationnels dans $[0, 1]$ est-il un ensemble de la forme G_δ?

(b) Montrer qu'il n'existe pas de fonction réelle sur $[0, 1]$ qui est continue en chaque point rationnel et discontinue en chaque point irrationnel de $[0, 1]$. Comparer avec la fonction f définie par

$$f(\frac{p}{q}) = \frac{1}{q} \text{ si } 0 < p \leq q \text{ et } \gcd(p, q) = 1 \;\; f(0) = 1 \text{et } \; f(x) = 0 \text{ ailleurs.}$$

UNIVERSITE DE METZ *Année Universitaire 2003/2004*
Département de Mathématiques

Prof. Raymond Mortini

AF 4 (maîtrise) Analyse fonctionnelle

Exercice 26

Soit E un ensemble métrique compact. Montrer que E est séparable. En déduire que l'image d'un opérateur linéaire compact entre deux espaces normés est séparable.

Exercice 27

Soit $k(s,t)$ une fonction continue sur $[0,1] \times [0,1]$. Posons $E = (C[0,1], ||\cdot||_\infty)$. Montrer que l'opérateur de Fredholm $T : E \to E$ défini par

$$(Tf)(s) := \int_0^1 k(s,t) f(t)\, dt$$

est un opérateur linéaire compact.

Exercice 28

a) Soit $x = (x_n) \in \ell^p$, $1 \leq p < \infty$, et soit $a = (a_n) \in c_0$. Montrer que l'opérateur $T : \ell^p \to \ell^p$ définie par $Tx = a \cdot x := (a_j x_j)_j$ est un opérateur linéaire compact. Déterminer la norme de T et les spectres $\sigma_p(T)$ et $\sigma(T)$ de T.

b) Soit $h \in C(\mathbb{R})$ borné. Est-ce que l'opérateur $T : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ défini par $Tf = h \cdot f$ est continu respectivement compact? Quelle est la norme de T?

Exercice 29

Soit E un espace de Banach et $T \in L(E)$. Soit $\sigma(T)$ le spectre de T,
$\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{K} : T - \lambda I \text{ non injective}\}$
$\sigma_c(T) = \{\lambda \in \mathbb{K} : T - \lambda I \text{ injective, } \underline{\text{non surjective}}, \overline{R(T - \lambda I)} = E\}$
$\sigma_r(T) = \{\lambda \in \mathbb{K} : T - \lambda I \text{ injective, } \overline{R(T - \lambda I)} \neq E\}$.
$\sigma_{ap}(T) = \{\lambda \in \mathbb{K} : \exists (x_n) \in E^{\mathbb{N}} : ||x_n|| = 1, ||(T - \lambda I)x_n|| \to 0\}$.

a) Montrer que $\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T)$.
Quelles relations y a t'il entre $\sigma_{ap}(T)$ et les autres spectres ci-dessus?

b) Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes:

i) $\lambda \notin \sigma_{ap}(T)$,
ii) $\exists c > 0, \forall x \in E : ||(T - \lambda I)(x)|| \geq c||x||$,
iii) $\text{Ker}(T - \lambda I) = \{0\}$ et $R(T - \lambda I)$ fermé.

c) Montrer que $\partial\sigma(T) \subseteq \sigma_{ap}(T)$.

Exercice 30

a) Soit $E = C([0,1])$ et $T : E \to E$ l'opérateur de Volterra défini par

$$(Tf)(x) = \int_0^x f(t)\, dt, \quad f \in E, x \in [0,1].$$

Montrer que T est un opérateur linéaire compact. Déterminer $\sigma_p(T)$ et montrer que $\sigma(T) = \sigma_r(T) = \{0\}$. Calculer $\sigma_c(T)$ et $\sigma_{ap}(T)$.

b) Si $S = \{f \in C([0,1]) : f(0) = 0\}$, alors $\sigma(T|_S) = \sigma_c(T|_S) = \{0\}$. Déterminer aussi $\sigma_p(T|_S)$, $\sigma_r(T|_S)$ et $\sigma_{ap}(T|_S)$.

c) Soit

$$X = \{f : [0,1] \to \mathbb{K} : f \text{ borné}, \ f \text{ continue en } 0 \text{ et } 1, \ f(0) = 0\}.$$

Montrer que l'opérateur $T : X \to X$ défini par $(Tf)(x) = xf(x)$ est continue, que $\sigma_p(T) =]0,1[$, $\sigma_c(T) = \{0\}$ et $\sigma_r(T) = \{1\}$. Déterminer $\sigma(T)$ et $\sigma_{ap}(T)$.

Exercice 31

Soit $1 \leq p < \infty$. On définit le shift $S_p : \ell^p \to \ell^p$ par $S_p(x_1, x_2, \cdots) = (0, x_1, x_2, \cdots)$.

a) Montrer que $S_p \in L(\ell^p)$ et déterminer l'opérateur dual $T_q := (S_p)^*$ de S_p ainsi que $||T_q||_{op}$.
b) Montrer que $\sigma_p(S_p) = \emptyset$.
c) Déterminer les spectres $\sigma_p(T_q), \sigma_c(T_q), \sigma_r(T_q)$ et $\sigma(T_q)$. En déduire que $\sigma(S_p) = \overline{\mathbb{D}}$. Calculer $\sigma_r(S_p)$ et $\sigma_c(S_p)$.
c) Montrer que si $|\lambda| < 1$, alors $R(S_p - \lambda I)$ est fermé et $\text{codim}(S_p - \lambda I) = 1$.
d) Montrer que $\sigma_{ap}(S_p) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.
e) Est-ce que $(S_p)^*$ est compact?

f) Soit $M(x_1, x_2, \cdots) = (x_1, x_2/2, x_3/3, \cdots)$. Est-ce que dans ℓ^p, $T = MS_p$ est compact? Calculer $\sigma_p(T)$ et $\sigma(T)$.

Exercice 32

Soit $X = L^2([0, 2\pi])$ et

$$(Tf)(s) = \int_0^{2\pi} \cos(s-t) f(t)\, dt, \quad f \in X.$$

a) Montrer que $(Tf)(s) = \int_0^{2\pi} f(s-t) \cos t\, dt$.
b) Montrer que T est continue et déterminer le rang (=dim $R(T)$) de T.
c) Est-ce que T est compact?
d) Déterminer les spectres $\sigma_p(T)$ et $\sigma(T)$. Chercher explicitement des vecteurs propres de T.

Exercice 33

Soit $E = C([0,1])$ et $T : E \to E$ défini par

$$Tf(x) = \int_0^{1-x} f(t)\, dt.$$

Montrer que T est compact et déterminer le spectre ainsi que les valeurs propres λ de T. Chercher les vecteurs propres associés à λ. Quelle est la dimension des sous-espaces propres de T?

UNIVERSITE DE METZ *Année Universitaire 2003/2004*
Département de Mathématiques

Prof. Raymond Mortini

AF 5 (maîtrise) Analyse fonctionnelle

Exercice 34

Soit M un sous-ensemble d'un espace vectoriel E sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

(a) Supposons que M soit équilibré. Alors M est absorbante si pour tout $x \in E$ il existe $\alpha > 0$ tel que $x \in \alpha M$. Est-ce que cette caractérisation reste vraie si M n'est pas équilibré?

(b) Montrer que M est à la fois équilibré et convexe si et seulement si M est absolument convexe, c'est à dire si $\forall x, y \in M$ et $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ avec $|\alpha| + |\beta| \leq 1$ on a $\alpha x + \beta y \in M$.

Exercice 35

(a) On muni $\mathbb{R}^n$ avec la topologie euclidienne. Montrer qu'un ouvert C non vide de $\mathbb{R}^n$ est la boule unité d'une norme sur $\mathbb{R}^n$ si et seulement si C est convexe, symétrique par rapport à l'origine, c'est à dire $C = -C$ et borné (par rapport à la norme euclidienne).

(b) Déterminer tous les ouverts de $\mathbb{C}$, (muni avec la topologie euclidienne), qui peuvent être représentés comme boule unité d'une norme sur $\mathbb{C}$, ($\mathbb{C}$ vu comme espace vectoriel sur $\mathbb{C}$).

Exercice 36

Soit E un espace vectoriel topologique et $C \subseteq E$ un sous-ensemble convexe. Montrer que C° et $\overline{C}$ sont convexes.

Exercice 37

Soit C un ouvert convexe non vide d'un espace vectoriel topologique E et soit M un sous-espace affine de E tel que $M \cap C = \emptyset$. Montrer qu'il existe un hyperplan affine fermé H de E tel que $M \subseteq H$ et $H \cap C = \emptyset$.

Exercice 38

Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace vectoriel topologique et V un voisinage de 0_E. Montrer:

a) Si $0 < r_1 < r_2 < \cdots$ et $r_n \to \infty$, alors $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} r_n V$.

b) Chaque partie compacte de E est $\mathcal{T}$-borné.

Exercice 39

Soit E un espace vectoriel topologique. Montrer que le dual topologique E^* de E est nontrivial, (c'est à dire $E^* \neq \{0\}$), si et seulement l'origine dans E admet un voisinage convexe U, $U \neq E$.

Exercice 40

Soit $0 < p < 1$ et $L^p[0,1]$ l'espace vectoriel des (classes d'équivalences) de fonctions intégrables à la p-ième puissance au sens de Lebesgue. Démontrer:

(a) L'application $d(f,g) = \|f-g\|_p^p = \int_0^1 |f-g|^p \ dt$ définit une distance complète sur $L^p[0,1]$.
(b) $(L^p[0,1], \|\cdot\|_p^p)$ est un espace vectoriel topologique, localement borné.

(c) Les seuls sous-ensembles convexes et ouverts de $L^p[0,1]$ sont l'ensemble vide et $L^p[0,1]$.

(d) $L^p[0,1]$ n'est pas un espace topologique localement convexe.

(e) Le dual topologique de $L^p[0,1]$ est le singleton $\{0\}$.

(f) Il existe des sous-espaces vectoriels F de $L^p[0,1]$ et des formes linéaires continues sur F qui n'admettent pas de prolongement continue sur $L^p[0,1]$.

Indication pour (c): démontrer d'abord que pour tout $f \in L^p[0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe $t_i \in [0,1], \ 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ tel que $\int_{t_{i-1}}^{t_i} |f|^p \ dt = \frac{1}{n}\|f\|_p^p, \ i = 1, \cdots, n.$

Exercice 41

Soit E un espace vecoriel et $\mathcal{P}$ la famille de toutes les semi-normes sur E. Montrer que $(E, \mathcal{P})$ est un espace vectoriel topologique localement convexe et que toutes les formes linéaires sur E sont continues.

Exercice 42

Soient $\mathcal{P}_j = \{\|\cdot\|_i : i \in I_j\}, \ j = 1, 2$ deux familles de semi-normes sur un espace vectoriel E. Montrer que la topologie définie par $\mathcal{P}_1$ sur E est moins fine que celle définie par $\mathcal{P}_2$ si et seulement si pour tout $i \in I_1$ il existe une partie finie $S \subseteq I_2$ et une constante $C > 0$ telle que

$$\forall x \in E : \ \ \|x\|_i \leq C \max_{j \in S} \|x\|_j.$$

Exercice 43

Soit $\mathcal{P}$ une famille faiblement séparante de semi-normes sur un espace vectoriel E. Supposons que $\mathcal{P}$ soit saturée, c'est à dire que $p_j \in \mathcal{P}(j = 1, 2)$ implique que $p = \max\{p_1, p_2\} \in \mathcal{P}$. Soit $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ la topologie localement convexe i.t. engendrée par $\mathcal{P}$. Montrer qu'une forme linéaire f sur $E = (E, \mathcal{T}_{\mathcal{P}})$ est continue $\iff$ il existe $p \in \mathcal{P}$ et $M > 0$ tel que $|f(x)| \leq Mp(x)$ pour tout $x \in E$.

Exercice 44

a) Montrer que l'espace $H(\mathbb{C})$ des fonctions entières, muni avec la distance

$$d(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\|f-g\|_n}{1 + \|f-g\|_n} \quad \text{avec} \quad \|f\|_n := \max_{|z| \leq n} |f(z)|$$

est un espace de Fréchet qui n'est pas normable.

b) Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{f}_n z^n \in H(\mathbb{C})$. Pour $f, g \in H(\mathbb{C})$ soit

$$\rho(f,g) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ |\widehat{f}_0 - \widehat{g}_0|, \left| \widehat{f}_n - \widehat{g}_n \right|^{\frac{1}{n}} \right\}.$$

Montrer que ρ est une distance sur $H(\mathbb{C})$. Est-ce que d est équivalente à ρ? Est-ce que $(H(\mathbb{D}), \rho)$ est un espace de Fréchet? Est-ce qu'une partie E de $\big(H(\mathbb{C}), \rho\big)$ est précompact si et seulement si elle est bornée dans l'espace métrique $\big(H(\mathbb{C}), \rho\big)$? Caractériser les ensembles compacts dans l'espace vectoriel topologique $\big(H(\mathbb{C}), \rho\big)$.

UNIVERSITE DE METZ *Année Universitaire 2003/2004*
Département de Mathématiques

Prof. Raymond Mortini

AF 6 (maîtrise) Analyse fonctionnelle

Exercice 45

Soient E, F des espaces de Banach et $T \in \ell(E, F)$ une application linéaire. Montrer l'équivalence des assertions suivantes:

a) $T \in L(E, F)$,
b) T est $\sigma(E, E^*) - \sigma(F, F^*)$ continue,
c) Si $||x_n - x||_E \to 0$, alors Tx_n converge faiblement vers Tx.

Exercice 46

Soient E, F des espaces normés et $T \in L(E, F)$. Démontrer que

$$T \text{ est } \sigma(E, E^*) - ||\cdot|| \text{ continue} \Longleftrightarrow T \text{ est de rang fini}$$

Exercice 47

i) Soit E un espace normé et (x_n) une suite de E qui converge faiblement vers x. Montrer que $||x|| \leq \liminf_n ||x_n||$.

ii) Soit $1 < p < \infty$.
a) Démontrer qu'une suite $(x_n) = (\xi_j^{(n)})_j$ de ℓ^p converge faiblement vers $x = (\xi_j)_j \Longleftrightarrow$ elle est bornée (par rapport à $||\cdot||_p$) et $\lim_n \xi_j^{(n)} = x_j \ \forall j$

b) Donner un exemple d'une suite de ℓ^p qui converge faiblement, mais pas dans la norme.

c) Donner un exemple d'une suite de ℓ^p dont les suites des composantes convergent, mais qui ne converge pas faiblement.

Exercice 48

Démontrer qu'une suite de ℓ^1 converge faiblement $\Longleftrightarrow$ elle converge dans la norme. Cependant, la topologie engendrée par la norme est strictement plus fine que la topologie faible sur ℓ^1.

Exercice 49

Démontrer que dans un espace normé de dimension infinie, l'adhérence faible de la sphère $S = \{x \in E : ||x|| = 1\}$ est la boule $B = \{x \in E : ||x|| \leq 1\}$.

Exercice 50

Soit E un espace normé, M un sous-espace vectoriel de E et N un sous-espace vectoriel de E^*. Démontrer:

a) L'orthogonal $M^\perp$ est $\sigma(E^*, E)$-fermé.
b) L'adhérence faible-* de N coïncide avec $({}^\perp N)^\perp$.

Exercice 51

Soit E un espace normé, F un sous-espace fermé de E et $J : E \to E^{**}$ l'immergement canonique de E dans son bidual topologique. Montrer que E est réflexif $\iff$ F et E/F sont réflexifs.

Indication:
a) F est réflexif $\iff J(F) = F^{\perp\perp}$.
b) Si E/F est réflexif, alors $\Psi : \begin{cases} E/F & \longrightarrow & (F^\perp)^* \\ x + F & \mapsto & J(x)|_{F^\perp} \end{cases}$ est un isomorphisme isométrique.
c) preuve alternative en utilisant le théorème de Banach-Kakutani.

Exercice 52

Soit K un ensemble non vide, fermé et convexe d'un espace réflexif E. Alors pour tout $x \in E$ il existe $y_0 \in K$ tel que $||x - y_0|| = \operatorname{dist}(x, K)$.

Exercice 53

Démontrer que tous les espaces de Hilbert sont réflexifs.