D I P L O M A R B E I T

von Herrn

R A Y M O N D   M O R T I N I

Thema :

D A S   V E R H A L T E N   V O N   P O T E N Z R E I H E N

A M   R A N D E   D E S   K O N V E R G E N Z B E R E I C H S

INHALTSVERZEICHNIS

VORWORT

Nach einigen einleitenden Ergebnissen (§ 1) , steige ich gleich ins Thema ein.
So werde ich zum Beispiel in § 2 anhand von Beispielen verschiedene Methoden zum Beweis der Nichtfortsetzbarkeit von Potenzreihen angeben.
Diese Methoden werden sich im späteren Verlauf dieser Arbeit als äusserst fruchtbar erweisen.
Als Vorgriff auf den § 4 ,werde ich im § 3 die wichtigsten elementaren Singularitätskriterien beweisen.
Der § 4 wird sich nun als Hauptziel meiner Arbeit erweisen.Hier wird ein Einblick gegeben in die Vielfältigkeit der nichtfortsetzbaren Potenzreihen (- zB wie sehen die Koeffizienten dieser Reihen aus -) .Insbesondere werden Lücken=reihen vom FABRY - Typ behandelt.
In einem weiteren Paragraphen (§ 5) wird ein kurzer Uberblick gegeben über die Häufigkeit der nichtfortsetzbaren Potenzreihen.
Schliesslich soll in einem letzten Paragraphen (§ 6) gezeigt werden,dass im allgemeinen Diver=genz und Singularität in den Randpunkten des Konvergenzbereichs einer Potenzreihe nicht direkt miteinander gekoppelt sind.

Insgesamt soll also diese Arbeit einen Uberblick geben über das Verhalten von Potenzreihen auf dem Rande ihres Konvergenzbereichs.
Dabei werden jedoch die zur Genüge bekannten Sätze von Fatou (über die Existenz der radialen Limites bei Annäherung an den Rand des Konver= genzbereichs , [4]) sowie die von Abel und Tauber nicht behandelt.Letztere findet man in allen guten Lehrbüchern über Funktionentheorie.

Steinbrücken,den 2.April 1981

§ 1 EINLEITUNG

1.1 DEFINITION

Gegeben sei eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_o)^n$ mit dem Konvergenzradius R ($0<R<\infty$).

Ein Punkt $\hat{z}$ mit $|\hat{z}-z_o| = R$ heisst <u>singulärer Punkt</u> von $f(z) =: \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_o)^n$, wenn für den Konvergenzradius $R(z_1)$ der Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \sum_{n=k}^{\infty} a_n \binom{n}{k} (z_1-z_o)^{n-k} \right\} (z-z_1)^k$$

gilt:

$$R(z_1) = |z_1-\hat{z}|$$

wobei $z_1 =: z_1(t) = (1-t)z_o+t\hat{z}$, $0 < t < 1$.

1.2 BEMERKUNGEN

a) Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \sum_{n=k}^{\infty} a_n \binom{n}{k} (z_1-z_o)^{n-k} \right\} (z-z_1)^k$ erhält man , wenn man $f(z)$ um den Punkt $z_1 \in U_R(z_o)$ in eine Potenzreihe entwickelt:

$$f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} f^{(i)}(z_1)(z-z_1)^i \qquad (|z-z_o| < R)$$

b) Falls $\tilde{z}_1 = (1-\tilde{t})z_o+\tilde{t}\hat{z}$, $0 < \tilde{t} < 1$, $t \neq \tilde{t}$, dann gilt: ($\hat{z}$ wie oben)

$$R(\tilde{z}_1) = |\tilde{z}_1-\hat{z}|$$

Beweis:

Annahme $R(\tilde{z}_1) > |\tilde{z}_1 - \hat{z}|$.

Definiere $F(z) =: \begin{cases} f(z) & |z-z_0| < R \\ f_1(z) & |z-\tilde{z}_1| < R(\tilde{z}_1) \end{cases}$

mit $f_1(z) =: \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} a_n \binom{n}{k} (\tilde{z}_1 - z_0)^{n-k} (z-\tilde{z}_1)^k$

F ist als analytische Fortsetzung von f im Gebiet $U_R(z_0) \cup U_{R(\tilde{z}_1)}(\tilde{z}_1) := G$ holomorph

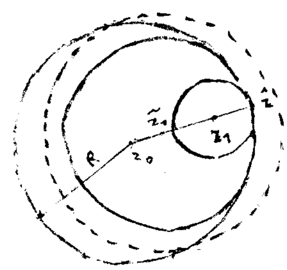
(beachte: $f_1(z) = f(z)$ für $z \in U_R(z_0) \cap U_{R(\tilde{z}_1)}(\tilde{z}_1)$)

Da $z_1 \in U_{R(\tilde{z}_1)}(\tilde{z}_1) \subseteq G$, lässt sich F in eine Potenzreihe um z_1 entwickeln mit

$R_F(z_1) > |z_1 - \hat{z}| = R(z_1)$. Da aber $F^{(i)}(z_1) = f^{(i)}(z_1)$

folgt dass $F(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} F^{(i)}(z_1)(z-z_1)^i =$

$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} f^{(i)}(z_1)(z-z_1)^i$ (*)



Damit erhält man einen Widerspruch:

$|z_1 - \hat{z}| = R_f(z_1) \overset{(*)}{=} R_F(z_1) > |z_1 - \hat{z}|$

Also : $R(\tilde{z}_1) \leq |\tilde{z}_1 - \hat{z}|$

Bekanntlich gilt aber: $R(\tilde{z}_1) \geq |\tilde{z}_1 - \hat{z}|$

Daraus folgt: $R(\tilde{z}_1) = |\tilde{z}_1 - \hat{z}|$ □

c) Eine Potenzreihe ist also nicht in einem singulären Punkt analytisch fortsetzbar. Alle anderen Punkte in denen sich die Reihe eindeutig analytisch (holomorph) fortsetzen lässt, bezeichne ich als <u>reguläre Punkte</u>.

1.3 DEFINITION

Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_o)^n =: f(z)$ habe den Konvergenzradius R, $0 < R < \infty$. Dann heisst $E =: \{ z \in \mathbb{C}: |z-z_o| = R \}$ natürliche Grenze von $f(z)$, wenn jeder Punkt von E singulärer Punkt für $f(z)$ ist.

(Beachte: Es folgt, dass die Reihe für f sich nicht über den Rand ihres Konvergenzbereiches analytisch (holomorph) fortsetzen lässt.)

Im folgenden betrachten wir oBdA Potenzreihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ mit dem Konvergenzradius $R=1$.

1.4 DEFINITION

Als <u>FABRY - Lückenreihe</u> bezeichnen wir solche Potenzreihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{n_k}$, deren Indizes der folgenden FABRYschen Lückenbedingung genügen:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k}{n_k} = 0$$

Beispiele:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^{n!} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} z^{n^2}$$

1.5 DEFINITION

Als $\mathfrak{F}$ bezeichne man die Menge aller in $\Delta = \{z: |z| < 1\}$ holomorphen Funktionen, deren natürliche Grenze der Einheitskreis $E = \{z: |Z| = 1\}$ ist.

§ 2 BEISPIELE VON FUNKTIONEN AUS $\mathcal{F}$

1. $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^{n!} \quad \in \mathcal{F}$!

Beweis:

Es genügt zu zeigen, dass jeder Punkt der Form $z=e^{i2\pi\frac{p}{q}}$, $p,q \in \mathbb{N}$, $p \leq q$ ein singulärer Punkt für f ist.

Sei also $z=\rho e^{i2\pi\frac{p}{q}}$, $0<\rho<1$ vorgegeben. Wähle $m>q$;

Dann folgt : $\frac{n!}{q} \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq m$. Wir erhalten weiter:

$$|f(z)| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} z^{n!}\right| = \left|\sum_{n=1}^{m} z^{n!} + \sum_{n=m+1}^{\infty} z^{n!}\right| \geq \left|\sum_{n=m+1}^{\infty} z^{n!}\right| - \left|\sum_{n=1}^{m} z^{n!}\right| \geq$$

$$\geq \left|\sum_{n=m+1}^{\infty} \rho^{n!} e^{i2\pi\frac{p}{q}n!}\right| - \sum_{n=1}^{m} |z|^{n!} = \sum_{n=m+1}^{\infty} \rho^{n!} - \sum_{n=1}^{m} \rho^{n!} \geq \sum_{n=m+1}^{M} \rho^{n!} - \sum_{n=1}^{m} \rho^{n!}$$

für $M > 2m$ bel. gewählt.

$$\leadsto \left|f(\rho e^{i2\pi\frac{p}{q}})\right| \geq (M-m)\rho^{M} - m$$

$$\leadsto \liminf_{\rho \to 1^-} \left|f(\rho e^{i2\pi\frac{p}{q}})\right| \geq M-2m$$

Mit $M \to \infty$ folgt: $\lim_{\rho \to 1^-} f(\rho e^{i2\pi\frac{p}{q}}) = +\infty$

Damit kann $e^{i2\pi\frac{p}{q}}$ kein regulärer Punkt für f sein. $\square$

2. $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n} \quad \in \mathcal{F}$!

Beweis:

Der Beweis verläuft analog wie zuvor, indem man zeigt, dass jeder Punkt der Form $e^{i2\pi\frac{p}{2^q}}$ $p,q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ singulärer Punkt ist.

(Beachte: $\left\{ \frac{p}{2^q} : p,q \in \mathbb{N} \cup \{0\} \right\} \cap [0,1]$ liegt dicht in $[0,1]$; siehe dazu LEMMA 4.2)

Ich will hier aber noch einen weiteren Beweis an= geben, indem ich davon ausgehe, dass $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$ der Funktionalgleichung (F) genügt:

(F) $\quad f(z^2) = f(z) - z$

Beweis: $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n} \curvearrowright f(z^2)=\sum_{n=0}^{\infty}(z^2)^{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^{n+1}} =$
$=\sum_{m=1}^{\infty} z^{2^m} = f(z)-z^{2^0} = f(z)-z$ für $|z|<1$.

Sei $z_{k,n} = e^{i2\pi\frac{k}{2^n}}$, $k=0,1,2,\ldots,2^n-1$ $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$

Beh: $|f(z_{k,n})| \overset{!}{=} \infty$ für $0\leq k\leq 2^n-1$ $k\in\mathbb{N}$ $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$

Bew: (vollständige Induktion nach n)

a) $\underline{n=0}$ Annahme $z_{00}=1$ sei regulärer Punkt für $f \curvearrowright f$ stetig in 1 . Wegen (F) gilt weiter: $f(1)=\lim_{r\to 1^-} f(r^2) = \lim_{r\to 1^-} f(r)-r = f(1)-1 \curvearrowright |f(1)|=\infty$

b) Es gelte $|f(z_{k,n})| = \infty$ für ein n und alle k mit $0\leq k\leq 2^n-1$, also: $\exists\, r_o=r_o(n,M)$; $|f(r e^{i2\pi\frac{k}{2^n}})| \geq M$ für $1>r\geq 1-r_o$,M bel vorg.

c) $\underline{n\curvearrowright n+1}$ Angenommen $z_{k,n+1}= e^{i2\pi\frac{k}{2^{n+1}}}$ sei ein regulärer Punkt von f , dann ist f stetig in $z_{k,n+1}$ .Also: $\lim_{z\to z_{k,n+1}} f(z)=f(z_{k,n+1})$.

Nach (F) :

$f(r^2 e^{i2\pi\frac{k}{2^n}})=f(r e^{i2\pi\frac{k}{2^{n+1}}})- r e^{i2\pi\frac{k}{2^{n+1}}} \curvearrowright$

$\lim_{r\to 1^-} f(r^2 e^{i2\pi\frac{k}{2^n}})=f(z_{k,n+1})-z_{k,n+1} \curvearrowright$

$|f(z_{k,n+1})| \geq \lim_{r\to 1^-}|f(r^2 e^{i2\pi\frac{k}{2^n}})|-1$ $0\leq k\leq 2^{n+1}-1$

Sei nun M bel. vorg. Nach b) gilt dann:

Aus $0\leq k\leq 2^n-1$,folgt: $|f(r^2 e^{i2\pi\frac{k}{2^n}})| \geq M$ für $1>r^2\geq 1-r_o$.

Falls $2^n\leq k\leq 2^{n+1}-1$, setze $k=2^n+j$ mit $0\leq j\leq 2^n-1$ $\curvearrowright e^{i2\pi\frac{k}{2^n}} = e^{i2\pi(1+\frac{j}{2^n})} = e^{i2\pi\frac{j}{2^n}}$

$\curvearrowright |f(r^2 e^{i2\pi\frac{k}{2^n}})| = |f(r^2 e^{i2\pi\frac{j}{2^n}})| \geq M$ für $1>r^2\geq 1-r_o$.

In beiden Fällen folgt also: $|f(z_{k,n+1})| \geq M- 1$

Da M bel. ,folgt : $|f(z_{k,n+1})| = \infty$, $0\leq k\leq 2^{n+1}-1$ □

Damit ist also bewiesen, dass jeder Punkt der Form $e^{i2\pi\frac{k}{2^n}}$ ein singulärer Punkt für f ist, da dort f unendlich wird. Weil aber nach LEMMA 4.2 die Menge $\left\{\frac{k}{2^n},\, n\in\mathbb{N}\cup\{0\},\ 0\le k\le 2^n-1\right\}$ dicht in $[0,1]$ liegt, folgt, dass die der Funktionalgleichung (F) genü= genden holomorphen Funktionen, also insbesondere $f(z)=\sum_{n=0} z^{2^n}$, aus $\mathcal{F}$ sind. □

3. Wie wir später (4.7) zeigen werden, ist jede Fabrylückenreihe aus $\mathcal{F}$.

4. Es gibt aber auch Potenzreihen, die keine Lücken haben und dennoch aus $\mathcal{F}$ sind . ZB:

$$\underline{f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} t(n) z^n}$$

wobei $t(n)$ die Anzahl der Teiler von n ist.

(Insbesondere gilt: $2 \le t(n) \le n \leadsto R=1$)

Wir zeigen jetzt: $f \in \mathcal{F}$

Beweis:

* Betrachte die Reihe $\sum_{j=1}^{\infty}\frac{z^j}{1-z^j}$. Sei $|z|<1$. Dann gilt nach dem Quotientenkriterium :

$$\lim_{j\to\infty}\left|\frac{z^{j+1}}{1-z^{j+1}}\right|\left|\frac{1-z^j}{z^j}\right| \le \lim_{j\to\infty}|z|\,\frac{1+|z|^j}{1-|z|^{j+1}} = |z|<1$$

$\leadsto \sum_{j=1}^{\infty}\frac{z^j}{1-z^j}$ absolut konvergent für $|z|<1$.

Da $\frac{z^j}{1-z^j} = \sum_{k=1}^{\infty}(z^j)^k$ folgt : $\sum_{j=1}^{\infty}\frac{z^j}{1-z^j} = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} z^{jk}$ $\quad |z|<1$

Diese Doppelreihe, absolut konvergent für $|z|<1$, können wir daher in beliebiger Reihenfolge aufsummieren. Nach dem Anordnen nach Potenzen von z, erhalten wir :

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{z^j}{1-z^j} = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} z^{jk} = \sum_{n=1}^{\infty} t(n) z^n = f(z) .$$

(denn betrachte alle (j,k) mit $jk=n$, deren gibt es aber genau $t(n)$ Stück) .

Jetzt zeigen wir, dass sich $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{1-z^n}$ nicht über den Einheitskreis fortsetzen lässt , (und damit auch $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} t(n)z^n$) .

* Betrachte den festen Punkt $\hat{z} := e^{i2\pi p/q}$, $p,q \in \mathbb{N}$ $q>1$, p,q teilerfremd. Zerlege nun $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{1-z^n}$ in zwei Reihen $\sum_1 + \sum_2$, wobei in der ersten Reihe nur Indizes n auftreten mit $n \equiv 0 \bmod q$, in der zwei= ten Reihe alle anderen Indizes. (Diese Aufspaltung können wir ohne Bedenken tun, denn alle auftretenden Reihen konvergieren absolut) .

Wir erhalten damit folgende Abschätzungen:

A) $n \not\equiv 0 \bmod q$ $\qquad z = re^{i2\pi p/q} = r\hat{z} \qquad 0<r<1$

$$|1-z^n|^2 = \left|1-r^n\cos 2\pi\tfrac{p}{q}n - ir^n\sin 2\pi\tfrac{p}{q}n\right|^2 =$$

$$=(1-r^n\cos 2\pi\tfrac{p}{q}n)^2 + r^{2n}\sin^2 2\pi\tfrac{p}{q}n = \underset{\geq 2r^n}{\underline{1+r^{2n}}} - 2r^n\cos 2\pi\tfrac{p}{q}n \geq$$

$$\geq 2r^n(1-\cos 2\pi\tfrac{p}{q}n) = 4r^n\sin^2\pi\tfrac{p}{q}n \underset{(1)}{\geq} 4r^n\sin^2\tfrac{\pi}{q} > 0$$

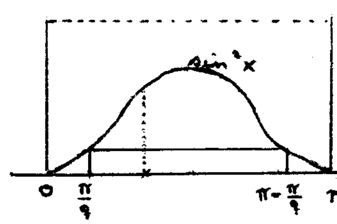
(1) denn: $\quad p,q$ teilerfremd, $n \not\equiv 0 \bmod q$

$$\leadsto qk+1 \leq pn \leq q(k+1)-1 \qquad k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$$

$$\leadsto \pi k+\tfrac{\pi}{q} \leq \pi\tfrac{p}{q}n \leq \pi(k+1)-\tfrac{\pi}{q}$$

$$\leadsto \pi k+\tfrac{\pi}{q} \leq \pi\tfrac{p}{q}n \leq \pi k+(\pi-\tfrac{\pi}{q})$$

$$\overset{\text{Skizze}}{\leadsto} \sin^2\tfrac{\pi}{q} \leq \sin^2\pi\tfrac{p}{q}n$$



$$\leadsto (1-r)\left|\sum_{n\not\equiv 0}^{\infty}\frac{z^n}{1-z^n}\right| \leq (1-r)\sum_{n\not\equiv 0}^{\infty}\frac{|z|^n}{|1-z^n|} \leq (1-r)\sum_{n\not\equiv 0}^{\infty}\frac{r^n}{2|\sin\frac{\pi}{q}|r^{n/2}} \leq$$

$$\frac{1-r}{2|\sin\frac{\pi}{q}|}\sum_{n\geq 0}^{\infty} r^{n/2} = \frac{1-r}{2|\sin\frac{\pi}{q}|}\,\frac{1}{1-\sqrt{r}} = \frac{1+\sqrt{r}}{|2\sin\frac{\pi}{q}|} \leq \frac{1}{|\sin\frac{\pi}{q}|}$$

damit ist $\qquad \lim_{r\to 1^-}(1-r)\left|\sum_2\right| < \infty$

B) $n\equiv 0 \mod q$ $\qquad z=re^{i2\pi p/q}$ $\qquad 0<r<1$

$\curvearrowright n=mq \quad m\in N$ und $z^n=r^{mq}(e^{i2\pi p/q})^{qm}=r^{mq}e^{i2\pi mp}=r^n$

$$\curvearrowright (1-r)\sum_{n\equiv 0}\frac{z^n}{1-z^n} = (1-r)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{r^{mq}}{1-r^{mq}} = \frac{1-r}{1-r^q}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1-r^q}{1-r^{mq}}\,r^{mq} =$$

$$= \frac{1}{1+r+\dots+r^{q-1}}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{1+r^q+r^{2q}+\dots+r^{(m-1)q}}\,r^{mq}$$

$$\curvearrowright (1-r)\sum_{n\equiv 0}\frac{z^n}{1-z^n} \geq \frac{1}{q}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(r^q)^m}{m} = \frac{1}{q}\log\frac{1}{1-r^q} \xrightarrow[r\to 1^-]{} \infty$$

$$\curvearrowright \lim_{r\to 1^-}(1-r)\sum\nolimits_1 = +\infty .$$

Damit ist $\displaystyle\lim_{r\to 1^-}(1-r)\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{1-z^n}\right| = +\infty$ für $z=re^{i2\pi p/q}$

$\curvearrowright \displaystyle\lim_{r\to 1^-}\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{1-z^n}\right| = +\infty$ für $z=re^{i2\pi p/q}$

$\curvearrowright z=e^{i2\pi p/q}$ ist singulärer Punkt. $\square$

5. Nun ist es keineswegs so , wie man anhand der drei vorherigen Beispielen annehmen könnte,dass es stets eine dichte Teilmenge von E gibt,mit den Eigenschaften : $f\in\mathfrak{F}$, $\lim_{r\to 1^-} f(re^{it})=\infty$ für $e^{it}\in E$. Es kann sogar vorkommen,dass f stetig auf E ist und trotzdem jeder Punkt von E singulärer Punkt i s t .

ZB : $\underline{f(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{t(n)}{n^3}z^n \in \mathfrak{F}}$

Beweis: $R=1$. Sei $e^{it}\in E \curvearrowright e^{it}$ singulärer Punkt von $g(z)=\sum_{n=1}^{\infty}t(n)z^n \curvearrowright e^{it}$ singulärer Punkt für $f(z)$ (denn $z(z(zf'(z))')'=g(z)$ und nach LEMMA 5.1 sind mit f auch $f^{(i)}$ $i=1,2,\cdots$ in e^{it} singulär.)

Weiter ist $\sum_{n=1}^{\infty}n^{-2}$ eine konvergente Majorante von $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t(n)}{n^3}z^n$ für $|z|\leq 1 \curvearrowright f$ stetig auf $\{z: |z|\leq 1\}$ $\square$

6. Ein noch weitergehendes Resultat zeigt die Reihe

$$f(z) = \sum \frac{z^{n^2}}{2^n} \in \mathcal{F}$$

Es gilt R=1 denn : $\sqrt[n^2]{2^{-n}} = 2^{-\frac{1}{n}} \underset{n\to\infty}{\to} 1$

Nach dem FABRYschen Lückensatz ist $f \in \mathcal{F}$, aber trotzdem lassen sich $f(z)$ und sämtliche Ableitungen $f^{(i)}(z)$ auf $E = \{z: |z| = 1\}$ stetig fortsetzen .

(Beachte dazu die gleichmässige Konvergenz der Reihen

$\sum\limits_{n: n^2 \geq m} z^{n^2-m} \prod\limits_{j=0}^{m-1} (n^2-j) 2^{-n}$ $\quad m = 1, 2, \dots$ für $|z| \leq 1$

wegen $2^{-n} \prod\limits_{j=0}^{m-1} (n^2-j) \leq n^{2m} 2^{-n}$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^{2m} 2^{-n} < \infty$) □

7. Ein weiteres Beispiel der Bauart von Beispiel 4 folgt nun:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n z^n \in \mathcal{F}$$

wobei Q_n die Quersumme von n ist. Bsp: $Q_{785} = 20$.

Beweis:

Da $1 \leq Q_n \leq n$ ist R=1 $\rightsquigarrow$ f(z) holomorph in Δ .

Weiter gilt: $Q_{n-1} - Q_n = -1 + 9A_n$,wobei A_n die Anzahl der Nullen am Ende der Zahl n ist. (siehe ANHANG A)

Damit erhalten wir: $\quad (Q_0 := 0 \;,\; |z| < 1 \;)$

$$(1-z)f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (Q_n - Q_{n-1}) z^n = \sum_{n=1}^{\infty} (1 - 9A_n) z^n = \sum_{n=1}^{\infty} z^n - 9\sum_{n=1}^{\infty} A_n z^n$$

Wegen der absoluten Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n z^n$ können wir die Glieder beliebig umordnen:

$$\rightsquigarrow (1-z)f(z) = \frac{z}{1-z} - 9 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{10^k}}{1-z^{10^k}}$$

denn:

$A_n = s$ für $n = m10^s$, $m \in \mathbb{N}$ $m \not\equiv 0 \mod 10$, $s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

Für $|z| < 1$ gilt damit:

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n z^n = \sum_{s=0}^{\infty} s \sum_{m \not\equiv 0} z^{m10^s} = \sum_{s=0}^{\infty} s \Big(\sum_{m=1}^{\infty} z^{m10^s} - \sum_{\substack{m \equiv 0 \\ m \neq 0}} z^{m10^s} \Big) =$$

$$= \sum_{s=1}^{\infty} s \Big(\sum_{m=1}^{\infty} (z^{10^s})^m - \sum_{k=1}^{\infty} (z^{10^s})^{10k} \Big) =$$

$$\sum_{s=1}^{\infty} s \Big(\frac{z^{10^s}}{1-z^{10^s}} - \frac{z^{10^{s+1}}}{1-z^{10^{s+1}}} \Big) \underset{(*)}{=} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{z^{10^s}}{1-z^{10^s}}$$

(Zu $(*)$: siehe ANHANG B)

Betrachte nun die LAMBERT-Reihe $\sum_{s=1} \frac{z^{10^s}}{1-z^{10^s}} =: g(z)$

Daraus sieht man leicht, dass jede

10^s-te Wurzel von 1 ein singulärer Punkt von $g(z)$ ist.

(den genauen Beweis in etwas verallgemeinerter Form findet man in 4.13.)

Da weiterhin $\{ e^{i2\pi m 10^{-k}}, \ m,k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \}$ dicht in E liegt, ist $g \in \mathcal{F}$. Daraus ergibt sich aber gleich, dass auch $f(z) = \frac{z}{1-z} - 9g(z)$ nicht fortsetzbar über den Einheitskreis ist . □

Die nächsten beiden Beispiele werden eine Anwendung des FABRYschen Lückensatzes sein.

8. $f(z) = \sum_{p \text{ prim}} z^p \in \mathcal{F}$

Beweis: Es ist R=1 .Wegen der absoluten Konvergenz in $|z| < 1$ können wir die Primzahlen der Grösse nach ordnen, ohne den Wert der Reihe zu ändern.

Da weiterhin nach einem bekannten Satz aus der Zahlen=theorie [9] gilt, dass $\pi(n) \sim \frac{n}{\log n}$, wobei $\pi(n)$ die Anzahl der Primzahlen kleiner gleich n ist, folgt dass die auftretenden Reihenindizes der FABRYschenLücken= bedingung genügen:

$\frac{n_k}{k} \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty$ (denn n_k := k-te Primzahl $\curvearrowright \Pi(n_k)=k \curvearrowright$

$$\frac{n_k}{k} = \frac{n_k}{\Pi(n_k)} \sim \log n_k \quad)$$ □

9. $\underline{f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \Pi(n) z^n \in \mathcal{F}}$

Beweis: Da $1 \leq \Pi(n) \leq n$ gilt $R=1$. Setze $\Pi(0):=0 \curvearrowright$

$(1-z)f(z) = \sum_{n\geq 1} \{\Pi(n)-\Pi(n-1)\} z^n \qquad |z|<1$

Es gilt $\Pi(n)-\Pi(n-1) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n \text{ prim} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Also:

$(1-z)f(z) = \sum_{p \text{ prim}} z^p =: g(z)$

Nach 8 ist $g \in \mathcal{F} \curvearrowright f \in \mathcal{F}$ □

10. $\underline{f(z) = \sum_{n=3}^{\infty} [\log n]\, z^n \in \mathcal{F}}$

Auch hier wird der FABRYsche Lückensatz zum Ziel führen!

Beweis:

Da $1 \leq [\log n] \leq n \quad (n \geq 3)$ folgt $R=1$

$(1-z)f(z) = \sum_{n=2}^{\infty} \left([\log n] - [\log(n-1)]\right) z^n \quad =: g(z)$

Es gilt $[\log n] - [\log(n-1)] \underset{(*)}{=} 1$ falls $\exists\, m \in \mathbb{N}$: $\log(n-1) < m < \log n$

$= 0$ sonst

Also: $[\log n] - [\log(n-1)] = 1$ falls $\exists\, m \in \mathbb{N}$: $n-1 < e^m < n$

$= 0$ sonst

Sei $m \in \mathbb{N}$ beliebig, fest. Definiere n_m als die natürliche Zahl welche die Bedingung $n_m - 1 < e^m < n_m$ erfüllt.

Dann gilt nach obiger Überlegung:

$$g(z) = \sum_{m=1}^{\infty} z^{n_m}$$

Dies ist jedoch eine FABRY-Lückenreihe denn:

$$\lim_{m\to\infty} \frac{n_m}{m} \geq \lim_{m\to\infty} \frac{e^m}{m} = \infty \curvearrowright \lim_{m\to\infty} \frac{n_m}{m} = \infty \qquad \square$$

Zu (*) Man beachte:

$$\log n - \log(n-1) = \log \frac{n}{n-1} = \log(1+ \frac{1}{n-1}) \leq \frac{1}{n-1} \leq 1$$

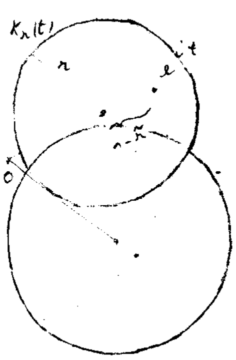
$$\curvearrowright [\log n] - [\log(n-1)] \in \{0,1\}, \quad n \geq 2.$$

§ 3 SINGULARITATSKRITERIEN

3.1 SATZ

Vor: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$

Beh: Dann gibt es mindestens einen singulären Punkt z_o mit $|z_o|=1$.

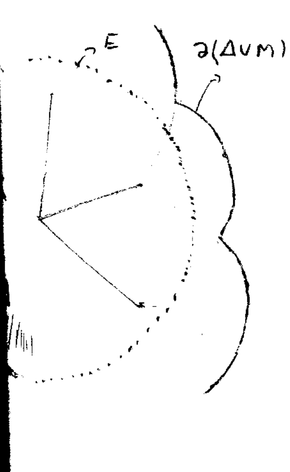


Bew: Annahme $f(z)$ wäre in jedem Punkt z , $|z|=1$ regulär. Dann gäbe es zu jedem $z=e^{it}$ $0\leq t<2\pi$, einen Kreis $K_r = K_{r(t)} = K_r(t)$ mit $K_r = \{z: |z-\tilde{r}e^{it}|<r\}$ mit $r > 1-\tilde{r}$, $0<\tilde{r}<1$,so dass sich f in diesen Kreis analytisch fortsetzen liesse.

Damit erhält man eine offene Uberdeckung der kompakten Menge $E=\{z: |z|=1\}$ .Nach dem Überdeckungssatz von Heine-Borel können wir ein endliches System aus der obigen Überdeckung auswählen,welches seinerseits bereits E überdeckt,etwa $E \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} K_r(t_i)=:M$

Nach Konstruktion hat man nun f in die Menge M analytisch fortgesetzt,denn: (oBdA)

Sei $K_r(t_1)\cap K_r(t_2) \neq \emptyset$, $f_i(z)$ die Fortsetzungen von f in $K_r(t_i)$, $i=1,2$.



Def: $\tilde{f}(z):= \begin{cases} f_1(z) , & z \in K_r(t_1) \\ f_2(z) , & z \in K_r(t_2) \end{cases}$

Dann ist $\tilde{f}$ wohldefiniert und $\tilde{f}$ ist die Fortsetzung von f in die Menge $K_r(t_1)\cup K_r(t_2)$!

Bew: Wegen der Überdeckungseigenschaft folgt aus $K_r(t_1)\cap K_r(t_2) \neq \emptyset$ dass auch $K_r(t_1)\cap K_r(t_2)\cap\Delta \neq \emptyset$

$\sim \begin{cases} \tilde{f}(z) = f_1(z) = f(z) , & z \in K_r(t_1)\cap K_r(t_2) \cap \Delta \\ \tilde{f}(z) = f_2(z) = f(z) , & z \in K_r(t_2)\cap K_r(t_1) \cap \Delta \end{cases}$

Weiter gilt für $z \in \left(K_r(t_1) \cap K_r(t_2)\right) \setminus \Delta$ dass $f_1(z) = f_2(z)$,

denn f_1 , f_2 holomorph in $K_r(t_1) \cap K_r(t_2)$,
$f_1 \equiv f_2$ in $K_r(t_1) \cap K_r(t_2) \cap \Delta$, offen , $\Big\} \leadsto$ Beh (Identitätssatz)

Sei nun $R := d(E, \partial(\Delta \cup M))$. Es ist $R > 0$ wegen $E, \partial(\Delta \cup M)$ kompakt mit leerem Durchschnitt. Damit ist $\tilde{f}$ als analytische Fortsezung von f holomorph in $\{z : |z| < R+1\}$ und lässt sich um den Nullpunkt in eine Potenzreihe entwickeln mit dem Konvergenzradius $R+1 > 1$: $\tilde{f}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tilde{f}^{(n)}(0)}{n!} z^n$

Da aber $\tilde{f}^{(n)}(0) = f^{(n)}(0)$, weil $\tilde{f}$ mit f in Δ übereinstimmt, hätte die anfangs gegebene Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tilde{f}^{(n)}(0)}{n!} z^n$ einen Konvergenzradius der grösser als 1 ist . $\lightning$

Damit gibt es auf E mindestens einen singulären Punkt. $\square$

3.2 SATZ

Vor: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \qquad \overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 1 \qquad a_n \geq 0$

Beh: $z=1$ ist singulärer Punkt für f .

Bew:

Annahme $f(z)$ wäre regulär in $z=1$. Nach 1.2 wäre damit der Konvergenzradius der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\frac{1}{2})}{n!} (z-\frac{1}{2})^n$ echt grösser als $\frac{1}{2}$. Also gibt es ein $d > 0$ mit $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\frac{1}{2})}{n!} (z-\frac{1}{2})^n$ konvergiert im Punkt $z=1+d$.

Da $f^{(j)}(\frac{1}{2}) = \sum_{n=j}^{\infty} a_n n(n-1)\ldots(n-j+1) \, (\frac{1}{2})^{n-j}$ erhält man beim Einsetzen die Doppelreihe

$$(1) \quad \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \sum_{n=j}^{\infty} a_n \, n(n-1)\ldots(n-j+1) \, (\tfrac{1}{2})^{n-j} \right\} (z-\tfrac{1}{2})^j \frac{1}{j!}$$

welche konvergent ist im Punkt $z=1+d$.

Da alle Glieder dieser Doppelreihe positiv sind, konvergiert sie absolut in z=1+d, damit kann nach dem Weierstrasschen Doppelreihensatz umgeordnet werden:

Es ergibt sich dann aus (1) :

$$\infty > \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left\{ \sum_{j=0}^{n} n(n-1)\ldots(n-j+1) \left(\frac{1}{2}+d\right)^j \frac{1}{j!} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-j} \right\} \qquad (*)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left\{ \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \left(\frac{1}{2}+d\right)^j \left(\frac{1}{2}\right)^{n-j} \right\}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{1}{2}+d+\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (d+1)^n = \infty$$

Damit ist z=1 singulärer Punkt □

3.3 KOROLLAR

Vor: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \qquad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Re} a_n \, z^n$

$\operatorname{Re} a_n \geqslant 0 \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\operatorname{Re} a_n} = 1$

Beh: z=1 ist singulärer Punkt für f .

Bew:

Nach obigem Satz 3.2 ist z=1 singulärer Punkt für g

Damit divergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(\frac{1}{2})}{n!} (z-\frac{1}{2})^n =$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{Re} f^{(n)}(\frac{1}{2})}{n!} (z-\frac{1}{2})^n$ für $z = 1+d \quad d > 0$.

Damit divergiert aber auch $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\frac{1}{2})}{n!} (z-\frac{1}{2})^n$ für z=1+d (Bea: Reihe konvergiert genau dann wenn der Realteil und der Imaginärteil konvergieren)

Da $d > 0$ beliebig ,folgt die Behauptung. □

Zu (*): Setze für $j=0$: $n(n-1)\ldots(n-j+1)! := 1$

3.4 SATZ

Geg: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$

Vor: • $a_n \in \mathbb{R}$

• $s_n := \sum_{j=0}^{n} a_j \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$

Beh: $z=1$ ist singulärer Punkt für f .

Bew:

* Für $|z|<1$ gilt:

$$\frac{1}{1-z}\, f(z) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{n} a_j \cdot 1\right) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} s_n z^n$$

$$\curvearrowright\quad f(z) = (1-z)\sum_{n=0}^{\infty} s_n z^n$$

* Sei nun $M>0$ beliebig vorgegeben. Da $s_n \to +\infty$ gibt es ein n_0 mit $s_n > 4M \quad \forall n \geq n_0$

$$\curvearrowright\quad f(z) = (1-z)\sum_{n=0}^{n_0} s_n z^n + (1-z)\sum_{n=n_0+1}^{\infty} s_n z^n =: f_1(z) + f_2(z)$$

* Wähle nun z_0 so dass:

1) $z^{n_0+1} > \frac{1}{2} \qquad \forall z > z_0 \qquad (z<1)$

2) $|f_1(z)| \leq M \qquad 1 > z > z_0$

Diese Wahl ist möglich da: 1) $z^{n_0} \xrightarrow[z\to 1]{} 1$ und

2) $\left|\sum_{n=0}^{n_0} s_n z^n\right|$ beschränkt sowie $1-z \xrightarrow[z\to 1]{} 0$

* Damit erhält man für $1 > z > z_0$: (z, z_0 also reell)

$$|f(z)| = |f_1(z)+f_2(z)| \geq |f_2(z)| - |f_1(z)| \overset{(A)}{=} f_2(z) - |f_1(z)| =$$
$$(1-z)\sum_{n_0+1}^{\infty} s_n z^n - |f_1(z)| \geq (1-z)\sum_{n_0+1}^{\infty} 4Mz^n - M =$$
$$(1-z)4M\,\frac{z^{n_0+1}}{1-z} - M = 4Mz^{n_0+1} - M \geq 4M\frac{1}{2} - M = M$$

* Somit gilt: $|f(z)| \xrightarrow[\substack{z\to 1^- \\ z\in\mathbb{R}}]{} \infty \curvearrowright z=1$ singulärer Punkt für f □

Bem: Die Bedingung $|s_n| \to \infty$ ist nicht hinreichend!

Bsp: $f(z) = (1+z)^{-3} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-3}{n}\cdot z^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,\frac{(n+2)(n+1)}{2}\, z^n$

Es gilt: $z=1$ ist regulärer Punkt obwohl $|s_n| \sim \frac{n^2}{4} \to \infty$

Bew: $s_n = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\,(j+2)(j+1) = \begin{cases}(n+2)^2/4 & n \text{ gerade}\\ -\{(n+2)^2-1\}/4 & n \text{ ungerade}\end{cases}$

denn: $n=0$: $\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 1 = 1 = (0+2)^2/4$

$n=1$: $\frac{1}{2}(2\cdot 1 - 3\cdot 2) = -2 = -(3^2-1)/4$

$n \to n+1$: n gerade: $s_{n+1} = s_n - \frac{1}{2}(n+3)(n+2) = (n+2)^2/4 - \frac{1}{2}(n+2)(n+3)$

$= (n+2)\{(n+2)-2(n+3)\}/4 = -\{[(n+1)+2]^2-1\}/4$

$n \to n+1$: n ungerade: $s_{n+1} = s_n + \frac{1}{2}(n+3)(n+2) =$

$= -[(n+2)^2-1]/4 + \frac{1}{2}(n+3)(n+2) = \frac{1}{4}(n^2+6n+3) = \frac{1}{4}[(n+1)+2]^2$

3.5 KOROLLAR

Geg: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$

Vor: $\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Re} a_n = +\infty$ oder $\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Im} a_n = +\infty$

Beh: $z=1$ ist singulärer Punkt für f .

Bew:

Analog wie zuvor! Ersetze in Gleichung (A) $f_2(z)$ durch

$|f_2(z)| = (1-z)\left|\sum_{n_0+1}^{\infty} s_n z^n\right| \geq (1-z)\sum_{n_0+1}^{\infty} (\operatorname{Re} s_n)\, z^n$ bzw $\sum_{n_0+1}^{\infty} (\operatorname{Im} s_n)\, z^n$.

$\square$

3.6 SATZ

Geg: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$

Vor: $|\arg a_n| \leq T < \frac{\pi}{2}$ $\forall n$ falls $a_n \neq 0$

Beh: $z=1$ ist singulärer Punkt für f .

Bew:

Es gilt $\operatorname{Re} a_n = |a_n| \cos(\arg a_n) \geq |a_n| \cos T > 0$

Weiter divergiert $\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{n=j}^{\infty} |a_n|\, n(n-1)\ldots(n-j+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-j}\left(d+\frac{1}{2}\right)^j \frac{1}{j!}$

da nach 3.2 $z=1$ singulärer Punkt von $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| z^n$, $d > 0$.

Also divergiert auch die Reihe

$$\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{n=j}^{\infty}(\mathrm{Re}\, a_n)\, n(n-1)\ldots(n-j+1)\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-j}\left(d+\tfrac{1}{2}\right)^j \frac{1}{j!}\,,$$

denn $\mathrm{Re}\, a_n \geqslant |a_n| \cos T$. Damit divergiert erst recht

$$\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{n=j}^{\infty} a_n\, n(n-1)\ldots(n-j+1)\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-j}\left(d+\tfrac{1}{2}\right)^j \frac{1}{j!} =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}\left(\frac{1}{2}\right)}{j!} \left((1+d)-\tfrac{1}{2}\right)^j \qquad \forall\, d > 0$$

$\curvearrowright$ z=1 ist singulärerPunkt für f. $\square$

Bem: Die Bedingung $|\arg a_n| < \frac{\pi}{2}$ ist nicht hinreichend!

Beispiel:

$a_n = e^{-n}+i(-1)^n \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$

Es gilt: $\mathrm{Re}\, a_n = e^{-n} > 0 \qquad \forall n$

$\curvearrowright |\arg a_n| < \frac{\pi}{2}$

Weiter: $\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|} = 1$ denn:

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \left(e^{-2n}+1\right)^{1/2n} \begin{cases} \leqslant 2^{1/2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \\ \geqslant 1 \end{cases}$$

Aber: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{e}\right)^n + i\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n = \frac{e}{e-z} + \frac{i}{1+z} \qquad |z| < 1$

$\curvearrowright$ z=1 ist regulärer Punkt! $\square$

Weitere Singularitätskriterien findet man in [0], [4], [II.3] . Sie alle sind jedoch äusserst unhandlich!

§ 4 NICHTFORTSETZBARE REIHEN

Hauptsatz dieses vierten Paragraphen wird der FABRYsche Lückensatz sein,der ein wichtiges Hilfsmittel beim Beweis der Nichtfortsetzbarkeit gewisser Reihen ist,die selbst keine FABRY-Lückenreihen sind.
Weiter werden die Beweisverfahren zur Nichtfortsetzbarkeit, die bei den neun Beispielen in § 2 auftraten,verallgemeinert, so dass sie auf ganze "Klassen" von Funktionen anwendbar sind.
Es wird sich rausstellen,dass alle hier betrachteten nichtfortsetzbare Reihen sich "irgendwie" auf FABRY-Lücken=reihen bzw auf LAMBERT-Lückenreihen transformieren lassen. Ob das jedoch für eine beliebige nichtfortsetzbare Reihe gilt,wird im Rahmen dieser Arbeit ungelöst bleiben.
(Zuerst müsste man sich natürlich überlegen,welche Trans=formationen überhaupt zulässig sind!)

Als Ergänzung zu diesem Paragraphen seien dem Leser die Bücher von BIEBERBACH [0] und ILIEFF [10] empfohlen.

4.1. DEFINITION

Die in $\Delta = \{z : |z| < 1\}$ holomorphe Funktion $f(z)$ gehöre zur Menge $\mathcal{E}$, wenn es ein Paar $((n_j), D)$; (n_j) Teilfolge von (n) , $D \subseteq \mathbb{Q} \cap [0,1]$; gibt mit den Eigenschaften

i) $\overline{D} = [0,1]$; d.h. D liegt dicht in $[0,1]$

ii) $\forall \frac{p}{q} \in D \quad \exists j_o \in \mathbb{N} : n_j \frac{p}{q} \in \mathbb{N} \quad \forall j \geq j_o \quad ; \quad j_o = j_o(\frac{p}{q})$

iii) $f(z) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j z^{n_j} \qquad \overline{\lim\limits_{j\to\infty}} \sqrt[n_j]{|a_j|} = 1$.

4.2 LEMMA

Beh: $\mathcal{E} \neq \emptyset$

Bew:

$f(z) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} z^{2^j} \in \mathcal{E}$ denn:

Setze $D = \{p/2^m \text{ , } m,p \in \mathbb{N} \cup \{0\}\} \cap [0,1]$; $n_j = 2^j$

Dann gilt:

i) $\overline{D} \overset{!}{=} [0,1]$

Bew: Sei $t \in [0,1)$, $\varepsilon > 0$, oBdA $\varepsilon < 1-t$.

Wähle $m \in \mathbb{N}$ so dass $2^{-m} < \varepsilon$ .Dann gilt:

$$t = \frac{t \cdot 2^m}{2^m} < \frac{[t \cdot 2^m + 1]}{2^m} \leq \frac{t \cdot 2^m + 1}{2^m} = t + 2^{-m} < t + \varepsilon < t + 1 - t = 1$$

$$\rightsquigarrow \frac{[t \cdot 2^m + 1]}{2^m} \in (t, t+\varepsilon) \cap D$$

Da weiter $1 \in D$ folgt: $\overline{D} = [0,1]$.

ii) Sei $p/2^m \in D$ fest $\rightsquigarrow 2^j p/2^m \in \mathbb{N}$ für $j \geq m =: j_o$ $\square$

4.3 SATZ

Geg: $f \in \mathcal{E}$

Vor: $\sum_{j=1}^{n} \operatorname{Re} a_j \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ (bzw $\sum_{j=1}^{n} \operatorname{Im} a_j \longrightarrow +\infty$)

Beh: $f \in \mathcal{F}$

Bew:

OBdA gelte $\sum_{j=1}^{\infty} \operatorname{Re} a_j = +\infty$

Annahme $\exists\, \tilde{z} \in E$ mit $\tilde{z}$ ist kein singulärer Punkt von f.

Dann gibt es einen Bogen $B \subseteq E$ mit $\tilde{z} \in B$ und B enthält keine singulären Punkte. Insbesondere gilt also:

$\lim_{r\to 1^-} |f(re^{it})| < \infty \ \forall t \in \mathbb{R}$ mit $e^{it} \in B$. (*)

Da D dicht in $[0,1]$ liegt, gibt es ein $p/q \in D$ mit $e^{i2\pi p/q} \in B$. Für $z = re^{i2\pi p/q}$, $0<r<1$, gelten folgende Abschätzungen:

$$|f(z)| = \left|\sum_{j=1}^{\infty} a_j z^{n_j}\right| = \left|\sum_{j=1}^{j_0} a_j z^{n_j} + \sum_{j_0+1}^{\infty} a_j z^{n_j}\right| \geq \text{(} j_0 \text{ nach 4.1 ii))}$$

$$\geq \left|\sum_{j_0+1}^{\infty} a_j z^{n_j}\right| - \left|\sum_{1}^{j_0} a_j z^{n_j}\right| \geq \left|\sum_{j_0+1}^{\infty} a_j z^{n_j}\right| - \sum_{1}^{j_0} |a_j| r^{n_j} =$$

$$= \left|\sum_{j_0+1}^{\infty} a_j r^{n_j} e^{i2\pi p/q \cdot n_j}\right| - \sum_{1}^{j_0} |a_j| r^{n_j} =$$

$$= \left|\sum_{j_0+1}^{\infty} a_j r^{n_j}\right| - \sum_{1}^{j_0} |a_j| r^{n_j} \geq \left|\operatorname{Re}\left(\sum_{j_0+1}^{\infty} a_j r^{n_j}\right)\right| - j_0 \cdot \max_{1\leq j\leq j_0} |a_j| =$$

$$= \left|\sum_{j_0+1}^{\infty} (\operatorname{Re} a_j)\, r^{n_j}\right| - j_0 \cdot A =: |g(r)| - j_0 \cdot A \quad \text{wobei } A := \max_{1\leq j\leq j_0} |a_j|$$

Wende jetzt Satz 3.4 an (oder auch Korollar 3.5):

Dazu setze $\begin{cases} b_n = \operatorname{Re} a_j & \text{für } n = n_j \quad j \geq j_0+1 \\ b_n = 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Damit erhalten wir: $\sum_{n=0}^{\infty} b_n r^n = g(r)$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = +\infty$

Nach 3.4 gilt aber: $\lim_{r\to 1^-} |g(r)| = +\infty$

$\rightsquigarrow \lim_{r\to 1^-} |f(re^{i2\pi p/q})| \geq \lim_{r\to 1^-} |g(r)| - j_0 \cdot A = +\infty$

$\rightsquigarrow \lim_{r\to 1^-} |f(re^{i2\pi p/q})| = +\infty$ $\lightning$ zu (*)

Damit ist jeder Punkt $\tilde{z} \in E$ singulärer Punkt von f(z)

$\rightsquigarrow f \in \mathcal{F}$ $\square$

4.4 SATZ

Geg: $f \in \mathcal{E}$

Vor: $|\arg a_j| \leq T < \frac{\pi}{2} \quad \forall j$ falls $a_j \neq 0$

Beh: $f \in \mathcal{F}$

Bew:

Sei $z = re^{i2\pi p/q}$ mit $0<r<1$, $p/q \in D$ fest gewaählt.

$\curvearrowright f(z) = \sum_{j=1}^{j_0} a_j z^{n_j} + \sum_{j=j_0+1}^{\infty} a_j r^{n_j}$ $\quad j_0$ nach 4.1 ii)

$=: f_1(z) + f_2(z)$

* $f_1(z)$ ist holomorph in C .

*Setze $\begin{cases} b_n = a_j & \text{für } n=n_j \quad j \geq j_0+1 \\ b_n = 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Damit gilt: $\sum_{n=0}^{\infty} b_n r^n = f_2(re^{i2\pi p/q}) \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|b_n|} = 1$

$|\arg b_n| \leq T < \frac{\pi}{2}$ falls $b_n \neq 0$.

Nach Satz 3.6 folgt : $r=1$ ist singulärer Punkt von

$\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \curvearrowright e^{i2\pi p/q}$ ist singulärer Punkt von f_2

$\curvearrowright e^{i2\pi p/q}$ ist singulärer Punkt von $f_1 + f_2 = f$.

Da D dicht in $[0,1]$ liegt, folgt dass jeder Punkt

$\tilde{z} \in E$ singulärer Punkt von $f(z)$ ist $\curvearrowright f \in \mathcal{F}$ $\square$

Bei den vorherigen Sätzen 4.3 , 4.4 hat man also für spezielle $f \in \mathcal{E}$ leicht die Nichtfortsetzbarkeit zeigen können. Um aber den allgemeinen Fall zu behandeln, nämlich dass $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{F}$, braucht man aber ein sehr tiefgehendes Resultat, etwa den FABRYschen Lückensatz. Bevor ich nun diesen FABRYschen Lückensatz beweisen werde, hier noch einige Lemmata.

4.5 LEMMA

Beh: α) Aus 4.1 ii) folgt: $\lim\limits_{j\to\infty}(n_{j+1}-n_j) = +\infty$

β) Aus $\lim\limits_{j\to\infty}(n_{j+1}-n_j) = +\infty$ folgt: $\lim\limits_{j\to\infty} n_j/j = +\infty$

Bew:

a) Annahme $\lim\limits_{j\to\infty} \inf\,(n_{j+1}-n_j) = M < \infty$ $(M > 0$ klar)

<u>1.Fall:</u> $M \geq 1$

Wähle $p/q \in D$ mit $p/q < 1/M \leq 1$ (möglich da D dicht in $[0,1]$)

Nach 4.1 ii) $\exists\, j_o \in \mathbb{N}$ mit $n_j \cdot \frac{p}{q} \in \mathbb{N}$, $n_{j+1} \frac{p}{q} \in \mathbb{N}$ $\forall j \geq j_o$

$\curvearrowright m_j := n_{j+1} \frac{p}{q} - n_j \frac{p}{q} \in \mathbb{N}$ $\forall j \geq j_o$

$\curvearrowright \lim\limits_{j\to\infty} \inf\, m_j \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Aber: $\lim\limits_{j\to\infty} \inf\, m_j = \frac{p}{q} \lim\limits_{j\to\infty} \inf(n_{j+1}-n_j) = \frac{p}{q} M < \frac{1}{M} M = 1$

$\curvearrowright \lim\limits_{j\to\infty} \inf\, m_j \notin \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ $\lightning$

<u>2.Fall:</u> $0 < M < 1$

Wähle $p/q \in D$ mit $p/q < M$ und verfahre analog .

Der Widerspruch ergibt sich dadurch,dass $\frac{p}{q} M < M^2 < 1$

$\curvearrowright \frac{p}{q} M \notin \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ $\square$

b)Sei $M>0$ beliebig .Nach Voraussetzung gibt es ein

$j_o = j_o(M) \in \mathbb{N}$ mit $n_{j+1}-n_j > 2M$ $\forall j \geq j_o$

Für $j \geq 2j_o$ gilt nun:

$$\frac{1}{j} n_j > \frac{1}{j}(n_j - n_{j_o}) = \frac{1}{j}\left\{(n_j-n_{j-1})+(n_{j-1}+n_{j-2})+\ldots+(n_{j_o+1}-n_{j_o})\right\} >$$

$$> \frac{1}{j}(j-j_o)\, 2M = 2M - \frac{1}{j}\, 2j_o M \geq 2M - 2j_o M \frac{1}{2j_o} = M$$

$\square$

Damit erfüllt jedes $f \in \mathcal{E}$ die FABRYsche Lückenbedingung .

Nach 4.7 folgt dann: $f \in \mathcal{F}$ $\curvearrowright$ $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{F}$ $\square$

4.6 TURAN sches LEMMA

Vor: i) $P(z) = \sum_{j=1}^{N} a_j z^{n_j}$ mit $a_j \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, $0 < n_1 < \dots < n_N \in \mathbb{N}$

ii) B_s sei ein (zusammenhängender) Teilbogen von E der Länge s

Beh: $\operatorname{Max}_{z\in E} |P(z)| \leq \left(\frac{C}{s}\right)^N \max_{z\in B_s} |P(z)|$

(C unabhängig von P !)

Bew: (nach [II.2])

OBdA nehme P das Maximum ausserhalb B_s an, (sonst Beh trivial) etwa in $z=1$.

Setze $z = e^{ix} \rightsquigarrow P(z) = \sum_{j=1}^{N} a_j e^{in_j x} =: f(x)$

B_s geht nun über in $[a,b]$ mit $0 < a < b$.

Es genügt also zu zeigen dass:

(A) $\quad |f(0)| \leq \left(\frac{2e^2 b}{b-a}\right)^N \max_{a\leq x\leq b} |f(x)|$

Zwischenbehauptung

a) $f(0)$ lässt sich darstellen in der Form $f(0) = \sum_{k=1}^{N} b_k f(x_k)$ mit äquidistanten Stützstellen $x_k \in [a,b]$ und geeigneten Gewichten b_k .

b) Für diese Gewichte gilt: $|b_k| \leq \left(\frac{2eb}{b-a}\right)^N$ $\quad k=1,2,\dots,N$

Beweise:

a) Setze $d := \frac{b-a}{N}$ $\quad m := \left[\frac{a}{d}\right]$ $\quad c := md$

Wähle schliesslich als Stützstellen

$x_k := c+kd \qquad k=1,2,\dots,N$

Nach Wahl von c gilt:

$x_1 = c+d = md+d = \left[\frac{a}{d}\right]d+d > \left(\frac{a}{d} - 1\right)d+d$

$x_N = c+Nd = md+Nd = \left[\frac{a}{d}\right]d+Nd \leq a+Nd$

Also: $a < x_1 < \dots < x_n \leq b$

Notwendig zur Erfüllung von $f(0) = \sum_{k=1}^{N} b_k f(x_k)$ ist demnach:

$$f(0) = \sum_{j=1}^{N} a_j = \sum_{k=1}^{N} b_k \sum_{j=1}^{N} a_j e^{in_j x_k} = \sum_{j=1}^{N} a_j \left(\sum_{k=1}^{N} b_k e^{in_j x_k} \right)$$

also: $\sum_{k=1}^{N} b_k e^{in_j x_k} = 1 \qquad j=1,2,\dots,N \qquad$ (da a_j bel)

mit $x_k = md+kd$ folgt:

$$\sum_{k=1}^{N} b_k (e^{in_j d})^m (e^{in_j d})^k = 1 \qquad j=1,2,\dots,N$$

$$\sum_{k=1}^{N} b_k z_j^{k+m} = 1 \qquad z_j := e^{in_j d} \qquad j=1,2,\dots,N$$

(Dies ist ein lineares inhomogenes System in b_k $k=1,2,\dots,N$)

Lösungsansatz: Konstruiere Polynom $Q(z)=\sum_{k=1}^{N} b_k z^{m+k}$ mit $Q(z_j)=1$

$Q(z) := 1 - R(z)S(z)$ mit

$$R(z) = \prod_{j=1}^{N} \left(1-\frac{z}{z_j}\right) =: \sum_{k=0}^{N} r_k z^k \qquad S(z) = \sum_{k=0}^{m} s_k z^k$$

Da die ersten m Koeffizienten von Q verschwinden sollen, ist notwendig dass

$$(*) \begin{cases} 0 = \sum_{k=0}^{j} s_k r_{j-k} & j=1,2,\dots,m \\ 1 = s_o r_o & j=0 \end{cases}$$

Daraus kann man nun bei bekannten r_i die s_k $k=0,1,\dots,m$ eindeutig bestimmen.Sie berechnen sich nach $(*)$ wie die m+1-ten Koeffizienten von $\frac{1}{R(z)}$ .Weiter gilt für $j=1,\dots,N$: $Q(z_j) = 1-0=1$;damit ist das gefundene Q tatsächlich Lösung !

b)Damit hat man die b_k bestimmt,sie lauten:

(beachte: b_k ist der Koeffizient zu z^{k+m} von $Q(z)$)

$$b_k = \sum_{j=0}^{m} s_{m-j} r_{k+j} \qquad k=1,2,\dots,N$$

$$\curvearrowright |b_k| \leq \max_{0\leq j\leq m} |s_j| \sum_{j=0}^{N} |r_j|$$

Es gilt: $|r_j| \leq \binom{N}{j}$ (siehe ANHANG C)

$$\curvearrowright \sum_{j=0}^{N} |r_j| \leq \sum_{j=0}^{N} \binom{N}{j} = 2^N$$

Weiter gilt: $|s_j| \leq \left|\binom{-N}{j}\right|$ (siehe ANHANG C)

Mit Hilfe der Ungleichungen

i) $\frac{(m+N)^{N-1}}{(N-1)!} \cdot \frac{N!}{(m+N)^N} = \frac{N}{m+N} < 1$ und

ii) $e^N \geqslant \frac{N^N}{N!} \iff N! \geqslant \left(\frac{N}{e}\right)^N$

können wir $\left|\binom{-N}{j}\right|$ weiter abschätzen:(bea: $j \leq m$)

$$\left|\binom{-N}{j}\right| = \frac{1}{j!} \left|(-N)(-N-1)\ldots(-N-j+1)\right| =$$

$$= \frac{1}{j!} N(N+1)\ldots(N+j-1) \frac{(N-1)!}{(N-1)!} =$$

$$= \frac{1}{(N-1)!} (j+1)\ldots(j+N-1) \leqslant \frac{1}{(N-1)!} (m+N)^{N-1} \underset{(i)}{<}$$

$$< \frac{(m+N)^N}{N!} \leqslant \frac{(m+N)^N}{(N/e)^N} = \left(\frac{e(m+N)}{N}\right)^N$$

Damit erhält man:

$$|b_k| \leq \left(\frac{e(m+N)}{N}\right)^N \cdot 2^N \leq \left(\frac{2e(a/d+N)}{N}\right)^N = \left(\frac{2e(\ aN(b-a)^{-1}+N\ )}{N}\right)^N$$

$$= \left(\frac{2ebN}{(b-a)N}\right)^N = \left(2e \frac{b}{b-a}\right)^N \qquad \square$$

Zum Beweis von (A).

Nach der Zwischenbehauptung gilt:

$$f(0) = \sum_{k=1}^{N} b_k f(x_k)$$

$$\leadsto |f(0)| \leq \sum_{k=1}^{N} |b_k| |f(x_k)| \leq N\left(2e \frac{b}{b-a}\right)^N \max_{a \leq x \leq b} |f(x)| \leq$$

$$\leq e^N \left(2e \frac{b}{b-a}\right)^N \max_{a \leq x \leq b} |f(x)| = \left(\frac{2e^2 b}{b-a}\right)^N \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$$

$\square$

Die Aussage des TURANschen Lemmas gilt natürlich auch falls wir anstelle des Einheitskreises E einen beliebigen Kreis betrachten.

4.7 FABRYscher LÜCKENSATZ

Geg: $f(z) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j z^{n_j}$ $\qquad \overline{\lim_{j\to\infty}} \sqrt[n_j]{|a_j|} = 1$

Vor: $\lim_{j\to\infty} n_j/j = \infty$

Beh: $f \in \mathfrak{F}$

Ehe wir zum eigentlichen Beweis kommen, der mit Hilfe des TURANschen Lemmas 4.6 geführt wird, hier noch einige Bemerkungen und Hilfssätze.

1. BEMERKUNG

Es genügt zu zeigen, dass $z=1$ singulärer Punkt von f ist, denn:

Sei $\tilde{z}=1$ singulärer Punkt von f, dann setze $z=re^{it}$

$\curvearrowright \sum_{j=1}^{\infty} a_j z^{n_j} = \sum_{j=1}^{\infty} (a_j e^{itn_j}) r^{n_j}$.

Da $\overline{\lim_{j\to\infty}} \sqrt[n_j]{|a_j e^{itn_j}|} = \overline{\lim_{j\to\infty}} \sqrt[n_j]{|a_j|} = 1$ und $n_j/j \xrightarrow[j\to\infty]{} \infty$

sind auch für diese neue Reihe in r die Bedingungen des FABRYschen Lückensatzes erfüllt

$\curvearrowright$ $r=1$ singulärer Punkt von $\sum_{j=1}^{\infty} a_j e^{itn_j} r^{n_j}$

$\curvearrowright$ $z=e^{it}$ singulärer Punkt von $\sum_{j=1}^{\infty} a_j z^{n_j}$ $\qquad \square$

2. HILFSSATZ

Vor: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ $\qquad \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$

$s_k(z) := \sum_{n=0}^{k} a_n z^n$

$S_n(z) := 2^{-n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} s_k$ $\qquad$ (EULER-Mittel)

Beh: $S_n(z) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(z)$ lokal gleichmässig in Δ

Bew:

Sei $z_o \in \Delta$, $z_o \neq 0$ fest gewählt.

Setze $K := \left\{ w \in \mathbb{C}: w = \frac{|z_o| + 1}{2} \right\} \curvearrowright K \subseteq \Delta$

Es gilt daher für die a_n die folgende Darstellung:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{f(w)}{w^{n+1}}\, dw$$

$$\curvearrowright s_k = \sum_{n=0}^{k} a_n z^n = \sum_{n=0}^{k} \Big(\frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{f(w)}{w^{n+1}}\, dw \Big) z^n = \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{f(w)}{w} \sum_{n=0}^{k} \left(\frac{z}{w}\right)^n dw =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{f(w)}{w} \; \frac{1-(z/w)^{k+1}}{1-z/w}\, dw =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{f(w)}{w-z}\, dw - \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{f(w)}{w-z} \left(\frac{z}{w}\right)^{k+1} dw =$$

$$= f(z) - \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{f(w)}{w-z} \left(\frac{z}{w}\right)^{k+1} dw \qquad |z| < 1$$

$$\curvearrowright S_n(z) = 2^{-n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left\{ f(z) - \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{f(w)}{w-z} \left(\frac{z}{w}\right)^{k+1} dw \right\} =$$

$$= f(z)\, 2^{-n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} - \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{f(w)}{w-z} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{z}{w}\right)^{k+1} 2^{-n} \cdot dw =$$

$$= f(z) - \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{f(w)}{w-z} \; \frac{z}{w} \left(\frac{z+w}{2w}\right)^n dw \qquad |z| < 1$$

Sei nun $|z| \leq |z_o|$, $w \in K$ $\quad M := \max_{w \in K} |f(w)| \quad$ $\varepsilon > 0$ bel .

Dann gilt:

$$\left|\frac{w+z}{2w}\right| \leq \frac{|z|+|w|}{2|w|} \leq \frac{|z_o|+|w|}{|z_o|+1} = \frac{|z_o| + (|z_o|+1)/2}{|z_o|+1} =: Z_o < \frac{|z_o|+1}{|z_o|+1} = 1$$

Wähle nun n_o so gross,dass $Z_o^{\,n} \leq \dfrac{\varepsilon\pi(1-|z_o|)^2}{2M|z_o|}$ $\quad \forall n \geq n_o$

Es gilt weiter:

$$|z-w| \geq |w| - |z| \geq \frac{|z_o|+1}{2} - |z_o| = \frac{1-|z_o|}{2} > 0$$

Für diese $n \geq n_o$ gilt nun:

$$\left|S_n(z) - f(z)\right| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{f(w)}{w-z} \; \frac{z}{w} \left(\frac{z+w}{2w}\right)^n dw \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_K \frac{|f(w)|}{|w-z|} \; \frac{|z|}{|w|} \left|\frac{z+w}{2w}\right|^n |dw| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \; \frac{M\,|z_o|}{\frac{-|z_o|+1}{2}} \; \frac{1}{\frac{1-|z_o|}{2}} \; \frac{\pi(1-|z_o|)^2}{2M\,z_o}\, \varepsilon = \varepsilon \qquad |z| \leq |z_o|$$

$$\curvearrowright \lim_{n\to\infty} S_n(z) = f(z) \qquad \text{lokal gleichmässig in } \Delta$$

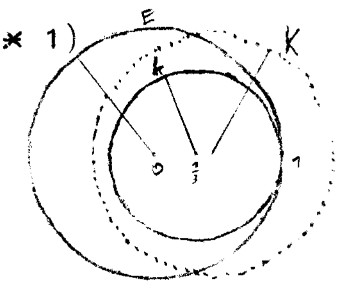
$\square$

BEWEIS von 4.7

Annahme $f(z) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j z^{n_j}$ $\quad n_j/j \longrightarrow \infty \quad \overline{\lim_{j\to\infty}} \sqrt[n_j]{|a_j|} = 1$

sei in z=1 regulär .(Die Fortsetzung der Potenzreihe über z=1 sei wieder mit f bezeichnet)

* 1)



Betrachte die Möbiustransformation T definiert durch

$$T: \begin{cases} \hat{\mathbb{C}} \longrightarrow \hat{\mathbb{C}} \\ w \longmapsto \dfrac{1+w}{2w} =: z \end{cases}$$ (siehe ANHANG D)

Das Urbild bezüglich T des Einheitskreises E ist der Kreis $k = \{w \in \mathbb{C} : |w - \frac{1}{3}| = \frac{2}{3}\}$, wobei wegen $T^{-1}(0) = -1$ das Innere von E bijektiv auf das Aussere von k abgebildet wird (bezüglich T^{-1}) ,das heisst es gilt:

$\left|\frac{1+w}{2w}\right| = 1$ auf k und $\left|\frac{1+w}{2w}\right| < 1$ ausserhalb k

* 2) Wähle nun $\frac{1}{2} < q_1 < 1$ so, dass das Urbild $K := T^{-1}(E_{q_1})$ des Kreises $E_{q_1} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = q_1\}$ noch im Regularitätsbereich von f liegt (siehe ANHANG D)

Innerhalb K ist f also regulär und es gilt:

$\left|\frac{1+w}{2w}\right| = q_1 < 1$ auf K .

* 3) Bezüglich des Kreises K haben die a_j die Darstellung

$$a_j = \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{f(w)}{w^{n_j+1}}\, dw$$ (beachte: 0 im Innern von K!)

Damit gilt (wie in Hilfssatz 2) für z innerhalb K:

$$S_{n_k}(z) = f(z) - \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{f(w)}{w-z} \, \frac{z}{w} \left(\frac{z+w}{2w}\right)^{n_k} dw$$

* 4) Für z=1 $w \in K$ ist $\left|\frac{z+w}{2w}\right| = q_1 < 1$

Ausserdem gilt $|w| > \frac{1}{3}$ (siehe ANHANG D)

Wähle nun $r := \frac{1-q_1}{3} > 0$, $|z-1| < r$

Daraus folgt:

$$\left|\frac{z+w}{2w}\right| \leq \frac{|z-1| + |1+w|}{2|w|} \leq \frac{r}{2|w|} + q_1 < \frac{\frac{1-q_1}{3}}{2\cdot\frac{1}{3}} + q_1 =$$

$$= \frac{1-q_1}{2} + q_1 = \frac{q_1+1}{2} =: q < 1$$

Damit gibt es eine Umgebung von $z=1$,wir nennen sie U, U innerhalb K,mit:

$$\left|\frac{z+w}{2w}\right| \leq q < 1 \qquad z \in U \qquad w \in K \quad .$$

∗ 5) Aus 3) und 4) folgt damit:

$$S_{n_k}(z) = f(z) + O(q^{n_k}) \qquad k \to \infty \qquad z \in U$$

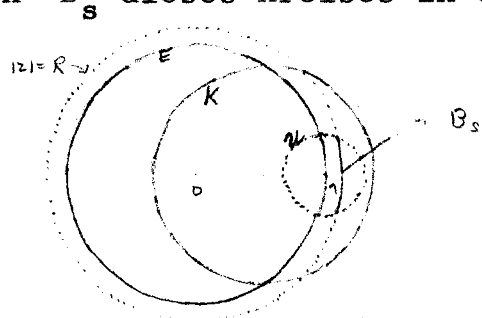
Nach Definition von S_{n_k} ist ersichtlich,dass diese Eulermittel nur dieselben Potenzen wie f aufweisen, so dass das S_{n_k} ein Polynom mit höchstens k Gliedern ist.

∗ 6) Betrachte jetzt die Polynome $P_k(z) := S_{n_{k+1}}(z) - S_{n_k}(z)$ welche also höchstens k+1 Glieder haben.

Weiter gilt nach 5) $P_k(z) = O(q^{n_k}) \qquad z \in U$

(siehe ANHANG D)

∗ 7) Auf diese Polynome wenden wir jetzt das TURANsche Lemma an! Dazu wählen wir ein Kreis $|z| = R > 1$ so dass ein Teilbogen B_s dieses Kreises in U liegt (Skizze!)



Dann folgt:

$$\max_{|z|=R}|P_k(z)| \leq \left(\frac{C}{s}\right)^{k+1} \max_{z\in B_s}|P_k(z)| \overset{(6)}{\leq} C_1\left(\frac{C}{s}\right)^{k+1} q^{n_k} =$$

$$= \frac{C}{s}\, C_1 \left[\left(\frac{C}{s}\right)^{k/n_k} q\right]^{n_k} =: C_2 \left[\left(\frac{C}{s}\right)^{k/n_k} q\right]^{n_k}$$

Da nun nach Voraussetzung $k/n_k \to o$ und $q < 1$ gilt:

$$\left(\frac{C}{s}\right)^{k/n_k} q \xrightarrow[k\to\infty]{} q \qquad \curvearrowright$$

$$\left(\frac{C}{s}\right)^{k/n_k} q \leq \tilde{q} < 1 \qquad \text{für } k \geq k_o \;.$$

$$\curvearrowright \max_{|z|\leq R} |P_k(z)| = \max_{|z|\leq R} |P_k(z)| \leq C_2 \; \tilde{q}^{n_k} \;, \quad k \geq k_o \,, \quad \tilde{q} < 1$$

Nach Weierstrass gilt damit:

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} P_k(z)$ konvergiert auf $|z| \leq R$ gleichmässig gegen eine in $|z|<R$ holomorphe Funktion $F(z)$.

Für $|z|<1$ gilt aber: $S_{n_k}(z) \xrightarrow[k\to\infty]{} f(z)$ (lokal gleichmässig)

(nach Hilfssatz 2)

Da nun $\sum\limits_{k=1}^{\infty} P_k(z)$ eine Teleskopsumme ist, gilt für $|z|<1$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} P_k(z) = \lim_{k\to\infty} \left\{ S_{n_k}(z) - S_{n_1}(z) \right\} = f(z) - S_{n_1}(z)$$

Damit ist $F(z)$ eine analytische Fortsetzung von $f(z) - S_{n_1}(z)$ in das Gebiet $|z|<R$,

Damit wäre aber $f(z)$ regulär in $|z|<R$.

Das ist aber ein Widerspruch zu der Tatsache dass der Konvergenzradius der Reihe $\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j z^{n_j} = f(z)$ gleich $1 < R$ ist !

Damit ist also unsere Annahme, dass $z=1$ ein regulärer Punkt der FABRY-Lückenreihe $\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j z^{n_j}$ $\quad n_j / j \to \infty \quad \overline{\lim\limits_{j\to\infty}} \sqrt[n_j]{|a_j|} = 1$ sei, zum Widerspruch geführt.

Mit Hilfe der Bemerkung 1 ergibt sich schliesslich die Behauptung des FABRYschen Lückensatzes!

Mit anderen Worten: Jede FABRY-Lückenreihe ist nicht fortsetzbar über den Rand ihres Konvergenzkreises.

$\square$

Dèr nächste Satz wird uns zeigen,dass das vorherige Ergebnis in einem gewissen Sinne das bestmögliche ist. In der Tat gilt:

4.8 SATZ (POLYA)

Sei (n_k) Teilfolge von (n) mit $\liminf\limits_{k\to\infty} n_k/k < \infty$, Dann gibt es eine Potenzreihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k z^{n_k}$ mit dem Konvergenzradius R=1 und welche über den Einheits=kreis fortsetzbar ist.

Zum Beweis verweise ich auf die Literatur:
[II.7.ii)] [II.5] [II.13]
Dabei sei insbesondere der Beitrag von ERDÖS [II.5] hervorgehoben,der im Gegensatz zu dem von POLYA in [II. 7.ii)] einen konstruktiven Beweis dieses Satzes bringt.

4.9 SATZ

Geg: $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$

Vor: i) $\exists\, n_j \quad j=1,2,\ldots$ mit $\lim_{j\to\infty} n_j/j = \infty$

ii) $a_{n_j} = a_{n_j+1} = \ldots = a_{n_{j+1}-1} \qquad j=1,2,\ldots$

Beh: a) $A := \overline{\lim_{j\to\infty}} \sqrt[n_j]{|a_{n_j} - a_{n_j-1}|} \leq 1$

b1) Falls $A=1$, dann ist $f \in \mathcal{F}$

b2) Falls $A<1$, dann ist $z=1$ einzige singuläre Stelle in $\{z: |z| \leq 1\}$ für $f(z)$; es ist $z=1$ dann ein einfacher Pol.

Bew:

a) Annahme $\overline{\lim_{j\to\infty}} \sqrt[n_j]{|a_{n_j} - a_{n_j-1}|} > 1$, dann gibt es unendlich viele Indizes j mit: $|a_{n_j} - a_{n_j-1}| > (1+\varepsilon)^{n_j}$ für ein geeignetes $\varepsilon > 0$.

Weiter gilt für diese j:

$$2 \max\{|a_{n_j}|, |a_{n_j-1}|\} \geq |a_{n_j} - a_{n_j-1}| > (1+\varepsilon)^{n_j}$$

Es folgt daher:

$$\sqrt[n_j]{2}\, \sqrt[n_j]{\max\{|a_{n_j}|, |a_{n_j-1}|\}} > (1+\varepsilon) \qquad \text{für } \infty \text{ viele } j$$

$$\rightsquigarrow \sqrt[k]{2}\, \sqrt[k]{|a_k|} > (1+\varepsilon) \qquad \text{für } \infty \text{ viele } k$$

$$\rightsquigarrow \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|a_k|} > 1 \quad \lightning .$$

b) Setze $g(z) := (1-z)f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n-1}) z^n \quad , \quad a_0 := 0$

Beachte:

$$a_n - a_{n-1} = \begin{cases} a_{n_j} - a_{n_j-1} \underset{(ii)}{=} a_{n_j} - a_{n_{j-1}} & \text{falls } n = n_j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Damit erhalten wir:

$$g(z) = \sum_{j=1}^{\infty} (a_{n_j} - a_{n_{j-1}}) z^{n_j} \qquad \text{OBdA} \quad n_1 = 1 \quad n_0 := 0$$

Der Konvergenzkreis dieser Reihe ist $A^{-1} \geq 1$

b1) $A^{-1}=1$: dann ist $g(z)$ eine FABRY-Lückenreihe,

denn $\lim_{j\to\infty} n_j/j = \infty \curvearrowright g \in \mathcal{F} \curvearrowright f(z)=\frac{g(z)}{1-z} \in \mathcal{F}$.

b2) $A^{-1}>1$: dann ist $g(z)$ holomorph in $|z|<1+\varepsilon$, $\varepsilon>0$

$\curvearrowright f(z)=\frac{g(z)}{1-z}$ hat als einzige singuläre Stelle

in $|z|\leq 1$ den einfachen Pol $z=1$.

(bea: $g(1)$ kann nicht Null sein ,sonst wäre $f(z)$

regulär auf ganz E !)

$\square$

BEISPIELE

Zu b1) (siehe auch Beispiele 9,10 in §2)

$f(z):=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sqrt[p]{n}\right]z^n \in \mathcal{F}$! $p\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$

Bew: $1\leq\left[\sqrt[p]{n}\right]\leq n \curvearrowright R=1$

$(1-z)f(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left[\sqrt[p]{n}\right]-\left[\sqrt[p]{n-1}\right]\right\} z^n = \sum_{j=1}^{\infty} z^{j^p} =: g(z)$

denn: $\left[\sqrt[p]{n}\right]-\left[\sqrt[p]{n-1}\right] = \begin{cases} 1 & \text{falls } n=j^p \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

(bea: $\sqrt[p]{n}-\sqrt[p]{n-1} = \frac{1}{\sqrt[p]{n}^{p-1}+\dots+\sqrt[p]{n-1}^{p-1}} \leq 1$)

Diese neue Reihe ist eine FABRY-Lückenreihe mit R=1

denn $j^p/j = j^{p-1} \xrightarrow[j\to\infty]{} \infty$ $(p>1)$

Aus 4.7 folgt dann: $g\in\mathcal{F} \curvearrowright f(z)=\frac{g(z)}{1-z} \in \mathcal{F}$ $\square$

Zu b2)

Setze $a_{n_k} = (\frac{1}{2})^{n_k}+(\frac{1}{2})^{n_{k-1}}+\dots+(\frac{1}{2})^{n_1}$ $n_k/k \longrightarrow \infty$

$f(z):=\sum_{m=0}^{\infty}a_m z^m$ $a_{n_j}=a_{n_j+1}=\dots=a_{n_{j+1}-1}$ $j=1,2,\dots$

Sei r der Konvergenzradius von $\sum_{m=0}^{\infty}a_m z^m$.

Es ist $r\geq 1$ (folgt aus $|a_{n_k}|\leq C$)

Bilde $(1-z)f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}(a_{n_k}-a_{n_{k-1}})z^{n_k} = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-n_k}z^{n_k} =: g(z)$

Der Konvergenzradius dieser Reihe ist $R=2$.

Damit ist g holomorph in $|z|<2$

$\curvearrowright f(z)=\frac{g(z)}{1-z}$ holomorph in $\{z: |z|<2\}\setminus\{1\}$

Damit konvergiert die Reihe $\sum_{m=0}^{\infty} a_m z^m$ für $|z|<1 \rightarrow r=1$

und die durch diese Reihe dargestellte Funktion hat als einzigen singulären Punkt in $|z|\leq 1$ den einfachen Pol $z=1$. Ausserdem ist $f(z)$ als Fortsetzung der Reihe $\sum_{m=0}^{\infty} a_m z^m$ nicht über den Kreis $|z|= 2$ fortsetzbar, da $g(z)$ es nach dem FABRYschen Lückensatz nicht ist.

$\square$

Der nächste Satz ist eine Verallgemeinerung des vorherigen Nichtfortsetzbarkeits-Kriterium!

Auch hier wird der FABRYsche Lückensatz nach einigen Umformungen die Nichtfortsetzbarkeit liefern.

Das Ganze wird dann durch ein Beispiel verdeutlicht werden.

4.10 SATZ

Geg: • $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 1 \qquad p \in \mathbb{N}$

• Δ^p sei der p-te Differenzenoperator definiert

durch: $\Delta^p(a_m) = \Delta\left(\Delta^{p-1}(a_m)\right)$

$\Delta^1(a_m) = a_m - a_{m-1}$

(Es gilt: $\Delta^p(a_m) = \sum_{n=0}^{p} (-1)^n \binom{p}{n} a_{m-n}$)

Vor: i) $\exists\, n_j \quad j=1,2,\ldots \quad$ mit $\lim_{j\to\infty} n_j/j = \infty$

ii) $\Delta^p a_m = 0$ für $m \notin \{n_j : j \in \mathbb{N}\}$

Beh: a) $A := \overline{\lim} \sqrt[n_j]{|\Delta^p(a_{n_j})|} \leq 1$

b1) Falls $A=1$, dann ist $f \in \mathcal{F}$

b2) Falls $A<1$, dann ist $z=1$ einzige singuläre Stelle in $\{z : |z| \leq 1\}$ für $f(z)$;

es ist $z=1$ ein Pol höchstens p-ter Ordnung .

Bew:

a) Vollständige Induktion nach p:

Für p=1 erfüllt (siehe Satz 4.9)

$p \to p+1$: Verfahre wie beim vorherigen Satz, beachte dabei:

$$2 \max\left\{\left|\Delta^{p-1}(a_{n_j})\right|, \left|\Delta^{p-1}(a_{n_j-1})\right|\right\} \geq$$
$$\geq \left|\Delta^{p-1}(a_{n_j}) - \Delta^{p-1}(a_{n_j-1})\right| = \left|\Delta\left(\Delta^{p-1} a_{n_j}\right)\right| = \left|\Delta^p(a_{n_j})\right|$$

b) Setze $g(z) := (1-z)^p f(z) \overset{!}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\Delta^p a_n\right) z^n \qquad a_{-n} := 0 \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

Mit $\Delta^p a_n = \begin{cases} \Delta^p a_{n_k} & \text{falls } n = n_k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

erhalten wir:

$$g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\Delta^p a_{n_k}\right) z^{n_k}$$

Für den Konvergenzradius dieser Reihe gelte

b1) $A^{-1}=1$: Dann ist $g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} (\Delta^{p} a_{n_k}) z^{n_k}$ eine FABRY-Lückenreihe wegen $n_k/k \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty \curvearrowright g \in \mathcal{F} \curvearrowright$ $f(z)= \frac{g(z)}{(1-z)^p} \in \mathcal{F}$.

b2) $A^{-1}>1$: Dann ist $g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} (\Delta^{p} a_{n_k}) z^{n_k}$ holomorph in $|z|<1+\varepsilon$ $\curvearrowright f(z)= \frac{g(z)}{(1-z)^p}$ hat in $|z|\leq 1$ nur die singuläre Stelle $z=1$, welches ein Pol von höchstens p-ter Ordnung ist. $\square$

Dass es tatsächlich solche Reihen gibt, mit dem im Satz genannten Voraussetzungen, zeigt folgendes Beispiel:

BEISPIEL

Geg: $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ $\qquad \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 1 \qquad p \in \mathbb{N}$

Vor: i) $\exists\, m_j \quad j=1,2,\ldots$ mit $\lim_{j\to\infty} m_j/j = \infty$ wobei

$m_j+p < m_{j+1} \quad \forall j$

ii) $a_n = P_k(n)$ für $n=m_k, m_k+1, \ldots, m_{k+1}-1 \qquad k=1,2,\ldots$

wobei P_k ein Polynom vom Grade $G \leq p-1$ ist.

Beh: f erfüllt die Voraussetzungen des vorherigen Satzes.

Bew:

Es gilt $\Delta^{p}(a_n) = 0$ für $n=m_j+p, m_j+p+1, \ldots, m_{j+1}-1$

Definieren wir nun eine neue Indexfolge n_k durch:

$n_1=m_1$	$n_{p+1}=m_2$	...	$n_{(k-1)p+1}=m_k$
$n_2=m_1+1$	$n_{p+2}=m_2+1$	...	$n_{(k-1)p+2}=m_k+1$
......	......	...	......
$n_p=m_1+p-1$	$n_{2p}=m_2+p-1$	...	$n_{kp}=m_k+p-1$

Es gilt für $j=kp+v$, $0 \leq v < p$:

$$\frac{m_j}{j} = \frac{n_{kp+v}}{kp+v} = \frac{m_{k+1}+v-1}{kp+v} = \frac{m_{k+1}}{kp+v} + \frac{v-1}{kp+v} =$$

$$= \frac{m_{k+1}}{k+1} \cdot \frac{k+1}{kp+v} + \frac{v-1}{kp+v}$$

Mit $j \to \infty \Leftrightarrow k \to \infty$ folgt:

$\lim\limits_{j\to\infty} n_j/j = \infty \cdot 1/p + 0 = \infty$

Also $\exists\, n_j$ mit $n_j/j \to \infty$ und $\Delta^p a_m = 0$

für $m \notin \{n_j : j \in \mathbb{N}\}$

$\square$

Es folgen zwei Sätze welche nach dem Modell von Beispiel 10 in §2 neue Klassen von nichtfortsetz=baren Funktionen liefern.

Man beachte den Zusammenhang von Satz 4.11 mit Satz 4.9.

4.11 SATZ

Geg: $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} [g(n)]\, z^n$

Vor: i) $g(t) \in C^1[1,\infty)$

ii) $g(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} +\infty$

iii) $g'(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0^+$, $g'(t) \neq 0$ für $t \geq t_1$

Beh: $f \in \mathcal{F}$

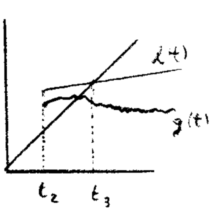
Ehe ich zum eigentlichen Beweis komme, gebe ich noch einige Folgerungen an, welche sich aus den Voraussetzungen ergeben.

a) $g(t) \leq t$ für $t \geq t_0$!

Bew:

Wegen iii) gilt: zu $\varepsilon < 1$ $\exists\, t_2 : g'(t) \leq \varepsilon \quad \forall t > t_2$

$\curvearrowright\ g(t) = g'(\tilde{t})\,(t-t_2) + g(t_2) \leq \varepsilon\,(t-t_2) + g(t_2) =: l(t)$



Fall $g(t_2) \leq t_2$ $\curvearrowright$ $g(t) \leq \varepsilon(t-t_2)+t_2 < t-t_2+t_2 = t \quad (t > t_2)$

Fall $g(t_2) > t_2$ Setze $t_3 := \dfrac{g(t_2) - \varepsilon t_2}{1-\varepsilon}$

$\curvearrowright\ t_3 \geq \dfrac{t_2 - \varepsilon t_2}{1-\varepsilon} = t_2$ $\curvearrowright$

$l(t_3) = t_3$ und $l(t) \leq t \quad \forall t \geq t_3 \curvearrowright g(t) \leq t \quad \forall t \geq t_3$

b) $g(t) \nearrow$ für $t \geq t_1$!

Bew:

Wegen iii) folgt: $g'(t) > 0 \quad \forall t \geq t_1 \curvearrowright g(t) \nearrow \quad (t \geq t_1)$

c) $\forall\, t \geq t_1$ existiert $g^{-1}(t)$ und es gilt:

$g^{-1}(t) \nearrow$; $g^{-1}(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} \infty$ (nach ii) und b))

d) $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{g^{-1}(t)}{t} \underset{l'Hosp}{=} \lim\limits_{t\to\infty} (g^{-1})'(t) = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{1}{g'(g^{-1}(t))} =$

$= \dfrac{1}{\lim\limits_{t\to\infty} g'(t)} = +\infty$

Jetzt zum eigentlichen Beweis von 4.11 :

Nach den Vorbemerkungen gelte oBdA: $0 < g'(t) < 1$

sowie $t \geq g(t) \geq 1 \qquad \forall t \geq 1$

* i) Der Konvergenzradius der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} [g(n)]\, z^n$ ist

R=1, denn es gilt: $1 \leq [g(n)] \leq n \leadsto [g(n)]^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

* ii) $(1-z)f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \{[g(n)] - [g(n-1)]\}\, z^n \qquad g(0):=0$

Wegen $g(n) - g(n-1) = g'(\tilde{t}) < 1 \qquad n-1 < \tilde{t} < n$ folgt:

$$[g(n)] - [g(n-1)] = \begin{cases} 1 & \text{falls } \exists\, m \in \mathbb{N} : g(n-1) < m \leq g(n) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Sei nun $m \in \mathbb{N}$ beliebig, wähle $n_m \in \mathbb{N}$ so dass

$n_m - 1 < g^{-1}(m) \leq n_m \iff g(n_m - 1) < m \leq g(n_m)$

Man beachte: n_m ist eindeutig bestimmt!

Diese Zuordnung ist ausserdem injektiv, es gilt sogar:

$m_1 < m_2 \leadsto n_{m_1} < n_{m_2}$

Bew: Annahme $n_{m_1} \geq n_{m_2} \leadsto n_{m_1} - 1 < g^{-1}(m_1) < g^{-1}(m_2) \leq n_{m_2} \leq n_{m_1} \leadsto$

$g^{-1}(m_2) - g^{-1}(m_1) < 1$

Nun gilt:

$$1 > g^{-1}(m_2) - g^{-1}(m_1) = (g^{-1})'(\tilde{t})\,(m_2 - m_1) \qquad (m_1 < \tilde{t} < m_2)$$

$$= \frac{m_2 - m_1}{g'(\underbrace{g^{-1}(\tilde{t})}_{=:\,\xi})} \geq \frac{1}{g'(\xi)} \leadsto g'(\xi) > 1 \quad ↯ \qquad \square$$

Aus der Konstruktion der n_m ergibt sich jetzt:

$$[g(n)] - [g(n-1)] = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = n_m \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\leadsto \quad (1-z)f(z) = \sum_{m=1}^{\infty} z^{n_m} := h(z)$$

* iii) $h(z)$ ist nun aber eine FABRY-Lückenreihe denn:

$$\infty \xleftarrow[m\to\infty]{} \frac{g^{-1}(m)}{m} \leq \frac{n_m}{m} = \frac{n_m - 1}{m} + \frac{1}{m} < \frac{g^{-1}(m)}{m} + \frac{1}{m} \xrightarrow[m\to\infty]{} \infty$$

$$\leadsto \lim_{m\to\infty} n_m/m = \infty \leadsto h \in \mathcal{F} \leadsto f(z) = \frac{h(z)}{1-z} \in \mathcal{F}$$

$\square$

4.12 SATZ

Geg: $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} P([g(n)])z^n$

Vor: i) $\cdot\, g(t) \in C^1[1,\infty)$

$\cdot\, g(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} +\infty$

$\cdot\, g'(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0^+ \qquad g'(t) \neq 0$ für $t \geq t_0$

ii) P Polynom vom Grade $p \geq 1$, $P(t) \in \mathbb{C}$

Beh: $f \in \mathcal{F}$

Bew:

a) Der Konvergenzradius der Reihe ist R=1 denn

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|P([g(n)])|} = 1 \qquad \text{(siehe ANHANG E)}$$

(beachte: $1 \leq [g(n)] \leq n$, $g(n) \nearrow \infty$, $n \geq n_0$)

b) Setze $x_n := [g(n)]$ OBdA gelte: $0 < g'(t) < 1$

sowie $1 \leq g(t) \leq t$ (siehe 4.11)

Nach Satz 4.11 gilt dann:

$$x_n - x_{n-1} = \begin{cases} 1 & \text{für } n=n_m \quad \text{mit} \quad \lim_{m\to\infty} n_m/m = \infty \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

c)
$$P(x_n) - P(x_{n-1}) = \begin{cases} P'(y_n)\,(x_n - x_{n-1}) & \text{falls } n=n_m \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
$$= \begin{cases} P'(y_n) & \text{falls } n=n_m \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

wobei $x_{n-1} < y_n < x_n$

d) Da P' wieder ein Polynom ist,gilt : (Teil a))

$$\lim_{m\to\infty} \sqrt[n_m]{|P'(y_{n_m})|} = 1$$

(beachte: $1 \leq y_{n_m} \leq n_m$, $y_{n_m} \nearrow \infty$)

e) Mit $P(g(0)) := 0$ erhalten wir:

$$(1-z)f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ P([g(n)]) - P([g(n-1)]) \right\} z^n =$$
$$= \sum_{m=1}^{\infty} P'(y_{n_m}) \, z^{n_m} =: g(z)$$

Diese Reihe ist nunmehr eine FABRY-Lückenreihe mit dem Konvergenzradius R=1 (nach b), d))

$$\rightsquigarrow \; g(z) \in \mathcal{F} \rightsquigarrow f(z) = \frac{g(z)}{1-z} \in \mathcal{F}$$

$\square$

BEBERKUNG 1

Weitere Sätze des obigen Typs findet man in
[II.1] [II.8] [II.10]

ZB:

Geg: $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} P([g(n)])z^n$

Vor: $P(x)$ Polynom mit komplexen Koeffizienten, Grad ≥ 1

$g(x)$ Polynom mit reellen Koeffizienten, Grad ≥ 1

Beh: a) $f(z) \in \mathcal{F} \Longleftrightarrow g(x)-g(0)$ hat mindestens einen irrationalen Koeffizienten

b) $f(z)$ rational $\Longleftrightarrow g(x)-g(0)$ hat nur rationale Koeffizienten

Auf die Beweise, welche mit dem WIENERschen Fortsetzungs=kriterium (siehe 5.4) geführt werden, gehe ich jedoch nicht ein.

BEMERKUNG 2

Als Vertreter der in Satz 4.11 und Satz 4.12 auftretenden Funktionen $g(t)$ kämen ZB $g(t) = t^a(\log t)^b$ $0 \leq a < 1$ $b \geq 0$ in Frage. $(a,b) \neq (0,0)$.

Nach einem einleitenden Beispiel werden wir jetzt TAYLOR-Reihen betrachten, welche sich in nichtfortsetz= bare LAMBERT-reihen transformieren lassen.
Man vergleiche hierzu auch 2.7.

4.13 BEISPIEL

Geg: $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_p(n)\, z^n \qquad p \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ wobei

$A_p(n)$ die Häufigkeit des Teilers p von n ist,

also:

$A_p(n) = v$ für $n = p^v m \quad , \quad m \not\equiv 0 \mod p \quad , \quad v \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

Beh: $f \in \mathcal{F}$

Bew:

a) Der Konvergenzradius der Reihe ist R=1 denn

für $n \equiv 0 \mod p$ ist $\quad 1 \leq A_p(n) = v \leq n$

$\sim \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{A_p(n)} = 1$

b) $$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_p(n)\, z^n = \sum_{v=0}^{\infty} v \sum_{m \not\equiv 0} z^{p^v m} = \sum_{v=0}^{\infty} v \sum_{m \not\equiv 0} \left(z^{p^v}\right)^m =$$

$$= \sum_{v=0}^{\infty} v \left\{ \sum_{m\geq 1}^{\infty} \left(z^{p^v}\right)^m - \sum_{m \equiv 0\ (m\neq 0)} \left(z^{p^v}\right)^m \right\} =$$

$$= \sum_{v=0}^{\infty} v \left\{ \frac{z^{p^v}}{1-z^{p^v}} - \frac{z^{p^{v+1}}}{1-z^{p^{v+1}}} \right\} = \qquad \text{(ANHANG B)}$$

$$= \sum_{v=1}^{\infty} \frac{z^{p^v}}{1-z^{p^v}} \qquad |z| < 1$$

c) Wir zeigen nun, dass jeder Punkt der Form $e^{i2\pi n/p^m}$

$n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\quad p \in \mathbb{N}$ $\quad$ ein singulärer Punkt für f ist.

Sei $z = re^{i2\pi n/p^m} \qquad 0 < r < 1 \qquad \sim$

$z^{p^v} = r^{p^v} e^{i2\pi n p^v/p^m} = r^{p^v}$ für $\quad v \geq m$

$$\curvearrowright f(z) = \sum_{v=1}^{m-1} \frac{z^{p^v}}{1-z^{p^v}} + \sum_{v=m}^{\infty} \frac{r^{p^v}}{1-r^{p^v}} =: f_1(z) + f_2(z)$$

- $\lim\limits_{\lambda\to 1^-} |f_1(z)| = |f_1(e^{i2\pi n/p^m})|$ $\quad m\neq 0,\ n\neq kp^v,\ v\in\mathbb{N}\ .\quad (*)$
- $f_2(z) \geq \sum\limits_{v=m}^{N} \frac{r^{p^v}}{1-r^{p^v}} \geq \sum\limits_{v=m}^{N} r^{p^v} \curvearrowright$

$$\underline{\lim_{\lambda\to 1^-}}\, f_2(z) \geq \underline{\lim_{\lambda\to 1^-}} \sum_{v=m}^{N} r^{p^v} = N-m+1 \overset{N\ \text{bel}}{\curvearrowright} \lim_{\lambda\to 1^-} f_2(z) = +\infty \curvearrowright$$

$$\lim_{\lambda\to 1^-} |f(z)| \geq \lim_{\lambda\to 1^-} f_2(z) - \lim_{\lambda\to 1^-}|f_1(z)| = +\infty \curvearrowright$$

$\hat{z} = e^{i2\pi n/p^m}$ singulärer Punkt von f.

Da nach 4.2 $\{ n/p^m ,n,m\in\mathbb{N}\}$ dicht in $\mathbb{R}^+$ liegt,

liegt $\{ e^{i2\pi n/p^m} ,n,m\in\mathbb{N}\}$ dicht in E. (mit Zusatz(*) sogar)

Damit ist jeder Punkt von E singulärer Punkt von f

$\curvearrowright f \in \mathcal{F}$

$\square$

<u>BEMERKUNG</u>

Die $A_p(j)$ haben folgende Eigenschaft:

$A_p(j) = A_p(j-p^n) \qquad$ für $\quad j\in [p^n+1, p^{n+1}-1]\cap\mathbb{N}$

Bew:

Sei $j\in [p^n+1, p^{n+1}-1]\cap\mathbb{N} \curvearrowright j = p^v m$ mit $v\leq n$ $\ m\not\equiv 0 \mod p$

$\curvearrowright j-p^n = p^v m - p^n = p^v(m - p^{n-v}) =: p^v k$

Es gilt: $p\nmid k$ denn sonst gelte

i) p / m für $v<n$ $\quad\lightning\quad$ da $m\not\equiv 0 \mod p$

ii) $p / m-1$ für $v=n$ $\quad\lightning\quad$ da $m < p$

Also hat $j-p^n$ die eindeutige Darstellung $p^v k$ $\quad k\not\equiv 0 \mod p$

$\curvearrowright A_p(j-p^n) = v = A_p(j)$

$\square$

4.14 SATZ

Geg: • $f(z) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j z^j$ $\qquad p \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$

• $g: \mathbb{N} \cup \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$

Vor: i) $a_{p^v} = g(v) \qquad v=0,1,2,\ldots$

$a_j = a_{j-p^n} \qquad$ für $j \in [p^n+1, p^{n+1}-1] \cap \mathbb{N}$

ii) $\overline{\lim\limits_{v\to\infty}} \sqrt[v]{|g(v)|} = 1$

iii) $\sum_{v=n}^{\infty} \{g(v)-g(v-1)\} \frac{1}{p^v} \neq 0$ für ∞ viele n

(siehe hierzu auch Bemerkung 1 Seite 51)

Beh: $f \in \mathcal{F}$

Den Beweis gliedern wir in 5 Teile auf:

LEMMA 1

Beh: Die in obiger Voraussetzung i) definierte Folge

$(a_n)_{n>0}$ erfüllt folgendes:

$a_j = g(v)$ falls $j=p^v q \qquad q \not\equiv 0 \mod p$

Bew:

a) Sei $j \in \mathbb{N}$ fest gewählt. Dann gibt es genau ein $v \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und genau ein $q \in \mathbb{N}$ mit:

$j=p^v q \qquad q \not\equiv 0 \mod p$

b) 1.Fall $\quad q=1$

$\curvearrowright j=p^v \curvearrowright a_j = a_{p^v} = g(v)$

2.Fall $\quad q > 1$

$\curvearrowright q-1 \in \mathbb{N}$. Nun hat $q-1$ die eindeutige Darstellung

$q-1 = \sum_{k=0}^{m} P_k p^k$ (Transformation von Basis 10 in p)

mit $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $P_k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $0 \leq P_k < p$, $P_m \neq 0$

c) Damit erhält man: (im Fall 2)

$$j = p^v q = p^v(1+\sum_{k=0}^{m} P_k p^k) \curvearrowright p^v q - \sum_{k=0}^{m} P_k p^{k+v} = p^v$$

Weiter gilt:

$$p^{m+v} < j < p^{m+v+1}$$

denn: i) $j > p^{m+v}$ klar

ii) $j = (1+P_o)p^v + P_1 p^{v+1} + \ldots + P_{m-1}p^{m+v-1} + P_m p^{m+v}$

$$\leq pp^v + (p-1)(p^{v+1} + \ldots p^{m+v-1} + p^{m+v})$$

$$= p^{v+1} + (p-1)p^{v+1}(1+p+\ldots p^{m-1})$$

$$= p^{v+1} + (p-1)p^{v+1}(p^m-1)\frac{1}{p-1} =$$

$$= p^{v+1}(1+p^m-1) = p^{m+v+1}$$

$\curvearrowright j \leq p^{m+v+1}$,da aber im Fall 2 $j \neq p^r$,$r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

folgt : $j < p^{m+v+1}$

d) Nach Voraussetzung i) haben wir daher: (im Fall 2)

$$a_j = a_{j-p^{m+v}}$$

So fortfahrend erhalten wir schliesslich:

$$a_j = a_{j-\sum_{k=0}^{m} P_k p^{k+v}} = a_{p^v}$$

$$\curvearrowright a_j = a_{p^v} = g(v) .$$

$\square$

LEMMA 2

Beh: Aus Voraussetzung i) und ii) folgt:

$$\overline{\lim_{j\to\infty}} \sqrt[j]{|a_j|} = 1$$

Bew:

Aus $\overline{\lim_{v\to\infty}} \sqrt[v]{|g(v)|} = \overline{\lim_{v\to\infty}} \sqrt[v]{|a_{p^v}|} = 1$ folgt:

Zu $\varepsilon > 0$ gibt es ein v_o mit $|a_{p^v}| \leq (1+\varepsilon)^v \quad \forall v \geq v_o$

Sei nun $j \geq p^{v_o}$ fest, aber beliebig gewählt.

Dann gibt es genau ein $v = v(j)$ mit $p^{v_0} \leq p^v \leq j < p^{v+1}$

$\curvearrowright j = p^k q \quad , \quad k \leq v \qquad q \not\equiv 0 \mod p$

$\curvearrowright a_j = g(k)$ nach Lemma 1

1.Fall $\quad a_j = g(k)$ für ein $k \geq v_0 \qquad$ (beachte: $k \leq j$)

$$\curvearrowright |a_j| = |g(k)| = |a_{p^k}| \leq (1+\varepsilon)^k \leq (1+\varepsilon)^j$$

2.Fall $\quad a_j = g(k)$ für ein $k < v_0$

Wähle nun $j_0 \geq p^{v_0}$ so gross dass

$$\max_{0 \leq k \leq v_0 - 1} |g(k)| \leq (1+\varepsilon)^{j_0}$$

Damit gilt in beiden Fällen für $j \geq j_0 \geq p^{v_0}$;

$$|a_j| \leq (1+\varepsilon)^j \curvearrowright \sqrt[j]{|a_j|} \leq 1+\varepsilon \curvearrowright$$

$$\overline{\lim_{j \to \infty}} \sqrt[j]{|a_j|} \leq 1 \qquad \text{(A)}$$

Weiter gilt:

$$\sqrt[v_j]{|a_{p^{v_j}}|} \xrightarrow{j \to \infty} 1 \qquad \text{für eine gewisse Folge } v_j$$

$$\sqrt[p^{v_j}]{|a_{p^{v_j}}|} = \exp(\log|a_{p^{v_j}}| / p^{v_j}) =$$

$$= \exp(\{\log|a_{p^{v_j}}| / v_j\} \cdot \{v_j / p^{v_j}\}) \xrightarrow[j \to \infty]{} e^0 = 1$$

$$\curvearrowright \overline{\lim_{j \to \infty}} \sqrt[j]{|a_j|} \geq 1 \qquad \text{(B)}$$

Aus (A) und (B) folgt die Behauptung.

$\square$

LEMMA 3

Beh: Die im Satz angegebene Reihe $f(z) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j z^j$ lässt sich umschreiben in:

$$f(z) = \sum_{v=0}^{\infty} \left(g(v) - g(v-1)\right) \frac{z^{p^v}}{1 - z^{p^v}}$$

für $|z| < 1$

Bew: Nach Lemma 2 ist R=1 der Konvergenzradius von $\sum_{j=1}^{\infty} a_j z^j$. Sei also in der Folge $|z|<1$.

Nach Lemma 1 ist $a_j = g(v)$ für $j = p^v q$ $\quad q \not\equiv 0 \bmod p \quad v \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Wegen der absoluten Konvergenz können wir beliebig umordnen:

$$\curvearrowright f(z) = \sum_{v=0}^{\infty} g(v) \sum_{q \not\equiv 0} z^{p^v q} = \sum_{v=0}^{\infty} g(v) \left\{ \sum_{q=1}^{\infty} (z^{p^v})^q - \sum_{\substack{q \equiv 0 \\ q \neq 0}} (z^{p^v})^q \right\}$$

$$= \sum_{v=0}^{\infty} g(v) \left\{ \sum_{q=1}^{\infty} (z^{p^v})^q - \sum_{m=1}^{\infty} (z^{p^v})^{pm} \right\} =$$

$$= \sum_{v=0}^{\infty} g(v) \left\{ \frac{z^{p^v}}{1-z^{p^v}} - \frac{z^{p^{v+1}}}{1-z^{p^{v+1}}} \right\} = \quad \text{(ANHANG B)}$$

$$= \sum_{v=0}^{\infty} \{g(v)-g(v-1)\} \frac{z^{p^v}}{1-z^{p^v}} \qquad \text{mit} \qquad g(-1):=0$$

Beachte:

A) $g(v) \dfrac{z^{p^v}}{1-z^{p^v}} \xrightarrow[v\to\infty]{} 0$ $\qquad$ lokal glm in $|z|<1$

denn: Sei $|z| \leq r < 1$ $\quad \curvearrowright$

$$0 \leq \left| g(v) \frac{z^{p^v}}{1-z^{p^v}} \right| \leq |g(v)| \frac{r^{p^v}}{1-r^{p^v}} \overset{!}{\leq} 2|g(v)|\, r^{p^v} \leq 2\,|g(v)|\, r^v$$

für $v \geq v_0$ $\qquad$ (denn $1-r^{p^v} \geq \frac{1}{2}$, $v \geq v_0$)

Weil aber $\sum_{v=0}^{\infty} g(v)\, r^v$ konvergiert (x) (bea: $\overline{\lim\limits_{v\to\infty}} \sqrt[v]{|g(v)|} = 1$)

folgt: $g(v)\, r^v \xrightarrow[v\to\infty]{} 0$.

B) Die zuletzt erhaltene Reihe konvergiert für $|z|<1$!

(beachte dazu: $|g(v)-g(v-1)| \left| \dfrac{z^{p^v}}{1-z^{p^v}} \right| \leq 2\{|g(v)| + |g(v-1)|\} r^{p^v}$

$v \geq v_0$ $\quad$ sowie (A)(x))

$\square$

LEMMA 4

Beh: Für $z = e^{-i2\pi m/p^n}$, $o < m < p^n$, n so, dass iii) erfüllt ist, $k, j \in \mathbb{N}$, $m \neq kp^j$, gilt:

$$\lim_{r \to 1^-} |f(rz)| = +\infty$$

Bew:

Setze $w := \frac{1}{rz}$. Für $|w| > 1$ gilt dann:

$$f(rz) = \tilde{f}(w) = \sum_{v=0}^{\infty} h(v) \frac{1}{w^{p^v} - 1} \qquad \text{mit} \quad h(v) := g(v) - g(v-1)$$

Sei nun $w = se^{i2\pi m/p^n}$ m, n wie oben, $s > 1$

$$\rightsquigarrow w^{p^v} = s^{p^v} \quad \text{für} \quad v \geq n$$

$$\rightsquigarrow \tilde{f}(w) = \sum_{v=0}^{n-1} h(v) \frac{1}{w^{p^v} - 1} + \sum_{v=n}^{\infty} h(v) \frac{1}{s^{p^v} - 1} =: f_1(w) + f_2(w)$$

Nun gilt:

- $\lim_{s \to 1^+} |f_1(w)| = |f_1(e^{i2\pi m/p^n})|$ falls $m \neq kp^j$ $k, j \in \mathbb{N}$ (A)
- $(s-1) f_2(w) = \sum_{v=n}^{\infty} h(v) \frac{1}{1+s+\ldots+s^{p^v-1}} \xrightarrow[s \to 1^+]{} \sum_{v=n}^{\infty} h(v)\, p^{-v}$ (B)

(siehe hierzu ANHANG F)

Da $\overline{\lim_{v \to \infty}} \sqrt[v]{|h(v)|} \leq 1$ (Beweis wie in 4.9 a))

ist $\sum h(v) p^{-v}$ konvergent und nach Voraussetzung

iii) gilt: $\sum_{v=n}^{\infty} h(v) p^{-v} \neq 0$ für ∞ viele n .

Aus (B) folgt dann:

- $\lim_{s \to 1^+} |f_2(w_n)| = +\infty$ für ∞ viele $w_n = se^{i2\pi m/p^n}$ (C)

Aus (A) und (C) folgt schliesslich :

$\lim_{s \to 1^+} |\tilde{f}(w_n)| \geq \lim_{s \to 1^+} \{|f_2(w_n)| - |f_1(w_n)|\} = \infty$ für ∞ viele w_n

wobei $w_n = se^{i2\pi m/p^n}$, n so, dass iii) gilt, $m \neq kp^j$ $k, j \in \mathbb{N}$

Weil nun $\frac{1}{w_n} = \frac{1}{s} z_n$, z_n wie oben definiert, folgt mit $\frac{1}{s} =: r$

$\lim_{r \to 1^-} |f(rz_n)| = +\infty$

□

LEMMA 5

Beh: $M_p := \{ m/p^n : 0 < m < p^n \; ; \; m \neq kp^j, k, j \in \mathbb{N} \; ; \; n \text{ so, dass iii) gilt} \}$
liegt dicht in $[0,1]$.

Bew:

Die ∞ vielen n mit iii) seien mit $n_1, n_2, \ldots$ bezeichnet.

A) Sei $t \in [0,1)$, $\varepsilon > 0$, oBdA $\varepsilon < 1-t$.

Wähle n_j so gross, dass $1/p^{n_j} < \frac{\varepsilon}{2}$. Dann gilt:

$$\frac{[tp^{n_j}]+1}{p^{n_j}} =: T \in (t, t+\tfrac{\varepsilon}{2}) \qquad \text{(siehe Lemma 4.2)}$$

1) Falls nun $[tp^{n_j}]+1 \neq kp^v$, dann ist $T \in (t, t+\frac{\varepsilon}{2}) \cap M_p$ und Fall A ist erledigt.

2) Falls nun aber $[tp^{n_j}]+1 = kp^v$, dann wähle man weiter ein $r \in \mathbb{N}$ mit $1/p^r < \frac{\varepsilon}{2}$ und $n_j + r \in \{n_1, n_2, \ldots\}$ $\curvearrowright$

$$\frac{\{[tp^{n_j}]+1\}p^r + 1}{p^{n_j} \cdot p^r} = T + \frac{1}{p^{r+n_j}} < T + \frac{\varepsilon}{2} < t + \varepsilon .$$

sowie

$$N := \{[tp^{n_j}]+1\}p^r + 1 \neq kp^s \quad s \in \mathbb{N} \quad \text{,denn sonst gelte:}$$

$$N = kp^v p^r + 1 = kp^s \curvearrowright p \,/\, 1 \quad \lightning .$$

Damit haben wir ein T gefunden mit $T \in (t, t+\varepsilon) \cap M_p$

B) Sei $t=1$. Wähle n_j so dass $1/p^{n_j} < \varepsilon$

$$\curvearrowright \frac{p^{n_j}-1}{p^{n_j}} \in (1-\varepsilon, 1) \cap M_p$$

Damit haben wir also in einer beliebig kleinen ε-Umgebung U_ε von $t \in [0,1]$ ein $T \in M_p \cap U_\varepsilon$ gefunden, was zeigt, dass M_p dicht in $[0,1]$ liegt.

$\square$

Beweis von SATZ 4.14

Nach Lemma 2 ist R=1 der Konvergenzradius der Reihe

$f(z) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j z^j$.

Nach Lemma 4 folgt, dass jeder Punkt der Menge

$E(M_p) := \{ e^{-i2\pi m/p^n} : 0 < m < p^n \ ; \ m \neq kp^v \ v \in \mathbb{N} \ , \ n_j$ wie in Lemma 5 $\}$

ein singulärer Punkt für f ist.

Da aber nach Lemma 5 M_p dicht in $[0,1]$ liegt, ist $E(M_p)$ dicht in E.

Damit ist jeder Punkt der Einheitskreislinie E singulärer Punkt für f, $\curvearrowright$ $f \in \mathcal{F}$.

$\square$

BEMERKUNG 1

Die Bedingung iii) $\sum_{v=n}^{\infty} \{g(v)-g(v-1)\} \frac{1}{p^v} \neq 0$ für ∞ viele n ist äquivalent mit der Bedingung

iii') $g(v) \neq g(v-1)$ für ∞ viele v .

Beweis:

iii) $\Rightarrow$ iii') Es gelte iii). Annahme $g(v) \neq g(v-1)$ für nur endlich viele v $\curvearrowright$ $g(v)-g(v-1) = 0$ für $v \geq n_o$ $\curvearrowright$

$\sum_{v=n}^{\infty} \{g(v)-g(v-1)\} \frac{1}{p^v} = 0 \quad \forall n \geq n_o$ $\lightning$ zur Vor. iii) .

iii') $\Rightarrow$ iii) Es gelte iii'). Annahme $\sum_{v=n}^{\infty} \{g(v)-g(v-1)\} \frac{1}{p^v} \neq 0$ für nur endlich viele n $\curvearrowright$ $\sum_{v=n}^{\infty} \{g(v)-g(v-1)\} \frac{1}{p^v} = 0 \ \forall n \geq n_o$

$\curvearrowright$ $g(v)=g(v-1)$ für $v \geq n_o$ (A) $\lightning$ zu iii'). (A) gilt, denn: Annahme $g(n_1) \neq g(n_1-1)$ für ein $n_1 \geq n_o$ (B)

$$\curvearrowright \ 0 = \sum_{n_1} \{g(v)-g(v-1)\} \frac{1}{p^v} =$$
$$= \{g(n_1)-g(n_1-1)\} \frac{1}{p^{n_1}} + \underbrace{\sum_{v=n_1+1} \{g(v)-g(v-1)\} \frac{1}{p^v}}_{=0}$$
$$\curvearrowright \ g(n_1) = g(n_1-1) \quad \lightning \text{ zu (B)}$$

$\square$

BEMERKUNG 2

Ein interessantes Phänomen tritt auf, falls zusätzlich

$$\sum_{v=0}^{\infty} |g(v)-g(v-1)| = \sum_{v=0}^{\infty} |h(v)| < \infty$$

Dann gilt nämlich:

$$\sum_{v=0}^{\infty} h(v) \frac{z^{p^v}}{1-z^{p^v}}$$ stellt in $|z|<1$ eine Funktion

$f_1(z)$ dar, in $|z|>1$ eine davon verschiedene Funktion $f_2(z)$ dar, welche beide den Einheitskreis als natürliche Grenze haben.

Insofern finde ich den Begriff "nicht fortsetzbar" allein nicht gerechtfertigt, denn $f_1(z)$ und $f_2(z)$ lassen sich zum Beispiel in $z=e^{i2\pi r/s}$; r,s teilerfremd , s teilt nicht p^v $v=1,2,\ldots$, $r,s \in \mathbb{N}$ erklären und dort gilt $f_1(z) = f_2(z)$. Aber nach wie vor sind f_1 und f_2 keine analytischen Fortsetzungen voneinander.

Ausserdem gilt unter obiger Voraussetzung :

$$f_1(z) + f_2\left(\frac{1}{z}\right) = -\sum_{v=0}^{\infty} h(v) \quad \text{für } |z|<1 .$$

Beweis:

a) $f_1(z) = \sum_{v=0}^{\infty} h(v) \frac{z^{p^v}}{1-z^{p^v}}$ stellt nach dem vorherigen Satz in $|z|<1$ eine Funktion dar, die den Einheitskreis als natürliche Grenze hat.

b) $f_2(z) = \sum_{v=0}^{\infty} h(v) \frac{z^{p^v}}{1-z^{p^v}}$ ist wohldefiniert für $|z|>1$, denn dort konvergiert die Reihe lokalgleichmässig!

Bew:

$$\left|\sum_{v=n}^{m} h(v) \frac{z^{p^v}}{1-z^{p^v}}\right| \leq \sum_{v=n}^{m} |h(v)| \frac{|z|^{p^v}}{|z|^{p^v}-1} \overset{!}{\leq} \sum_{v=n}^{m} |h(v)| (1+\delta) \leq \varepsilon$$

für $m,n \geq n_0$

Die vorletzte Ungleichung gilt deshalb,weil

$$\frac{|z|^{p^v}}{|z|^{p^v}-1} \xrightarrow{v\to\infty} 1 \qquad \text{gleichmässig in } z \text{ falls } 1 < r \leq |z|$$

(siehe dazu ANHANG G)

Mit Hilfe der Abschätzung $\dfrac{s^{p^v}}{s^{p^v-1}+\ldots+s+1} \leq 2$

für $1 \leq s \leq 2$ zeigt man wie in ANHANG F und LEMMA 4 (Punkt A,B,C) dass Punkte der Form $e^{i2\pi m/p^n}$ singuläre Punkte für $f_2(z)$ sind.

Damit ist der Einheitskreis E auch natürliche Grenze für $f_2(z)$.

c) Ich zeige jetzt,dass $\sum\limits_{v=0}^{\infty} h(v) \dfrac{z^{p^v}}{1-z^{p^v}}$ in den Punkten

$z=e^{i2\pi r/s}$ r,s teilerfremd , s teilt nicht p^v , $v\in\mathbb{N}$

konvergiert!

Setze $q=r/s$. Dann gilt:

$$\left|\sum_{v=n}^{m} h(v)\frac{e^{i2\pi qp^v}}{1-e^{i2\pi qp^v}}\right| \leq \sum_{v=n}^{m}|h(v)|\left|1/\left(1-e^{i2\pi qp^v}\right)\right| =$$

$$\sum_{v=n}^{m}|h(v)|\,1/|2\sin \pi qp^v| \leq \sum_{v=n}^{m}|h(v)|\quad 1/\,2|\sin\tfrac{\pi}{s}| \leq \varepsilon,\ m,n \geq n_o$$

(die vorletzte Ungleichung erhält man genauso wie in Beispiel 4 §2)

Beachte weiter ,dass $|1-e^{it}| = |e^{it/2}|\,|(e^{-it/2}-e^{it/2})|$

$$= 2|\sin t/2| \ .$$

Das CAUCHY-Kriterium liefert jetzt die Behauptung.

d) $$f_1(z)+f_2(1/z) = \sum_{v=0}^{\infty} h(v)\left\{\frac{z^{p^v}}{1-z^{p^v}} + \frac{z^{-p^v}}{1-z^{-p^v}}\right\}$$

$$=\sum_{v=0}^{\infty} h(v)\,\frac{z^{p^v}-1}{1-z^{p^v}} = -\sum_{v=0}^{\infty} h(v) \qquad \text{für } |z|<1$$

□

4.15 SATZ

Geg: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ $\qquad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$

$s_n := \sum_{v=0}^{n} b_v$

Vor: i) $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ $\qquad \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|b_n|} < 1$

ii) $g(1) \neq 0$

iii) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n s_n z^n \in \mathfrak{F}$

Beh: $f \in \mathfrak{F}$

Bew:

Zunächst gilt $\dfrac{g(z)}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} s_n z^n$ für $|z| < 1$.

Weil $g(z)$ holomorph in $|z| \leq R$ mit $R > 1$, $g(1) \neq 0$, hat die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} s_n z^n =: S(z)$ nur in $z=1$ eine Singularität .

Nach dem HADAMARDschen Multiplikationssatz (vgl [0]) befinden sich die Singularitäten von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n s_n z^n$ unter denen von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

Damit muss nach Voraussetzung iii) jeder Punkt $|z| = 1$ singulärer Punkt für $f(z) = \sum a_n z^n$ sein $\curvearrowright f \in \mathfrak{F}$

□

Dieser Satz angewandt auf die vorherigen konstruierten Funktionen aus $\mathfrak{F}$ gibt uns nun die Möglichkeit die Menge dieser $\mathfrak{F}$-Funktionen bedeutend zu erweitern.

BEISPIEL

Geg: $(a_n)_{n>0}$ wie in 4,14 , $(b_j)_{j>0}$ $\qquad s_n = \sum_{j=1}^{n} b_j$

Vor: $\overline{\lim_{j\to\infty}} \sqrt[j]{|b_j|} = r < 1$ $\qquad \lim_{n\to\infty} s_n \neq 0$

Beh: $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n / s_n)\, z^n \in \mathfrak{F}$

Bew:

Ersetze in 4.15 a_n durch a_n/s_n und bea: $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\dfrac{|a_n|}{|s_n|}} = 1$

□

Zum Schluss dieses Paragraphen gehe ich noch auf einen besonders wichtigen Spezialfall des FABRYschen-Lücken=satzes ein:

4.16 HADAMARD scher -Lückensatz

Geg: $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{n_k}$ $\qquad \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[n_k]{|a_k|} = 1 \qquad a_k \neq 0$

Vor: $\exists\ d > 0$ mit $\frac{n_{k+1}}{n_k} > 1+d \qquad \forall\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

Beh: $f \in \mathfrak{F}$

Bew:

1. Aus $\frac{n_{k+1}}{n_k} > 1+d$ folgt:

$$\frac{n_k}{k} = \frac{n_k}{n_{k-1}} \frac{n_{k-1}}{n_{k-2}} \frac{n_{k-2}}{\cdots} \cdots \frac{\cdots}{n_1} \frac{n_1}{k} > \frac{(1+d)^{k-1}}{k} n_1$$

$$\leadsto \lim_{k\to\infty} \frac{n_k}{k} \geq \lim_{k\to\infty} \frac{(1+d)^{k-1}}{k} n_1 = +\infty$$

$$\leadsto \lim_{k\to\infty} \frac{n_k}{k} = \infty$$

Damit ist jede HADAMARD-Lückenreihe eine FABRY-Lücken=reihe $\leadsto$ Behauptung. □

2. Einen einfachen direkten Beweis, also unabhängig vom FABRYschen-Lückensatz hat MORDELL in [II.14] gegeben:

Setze $z = aw^p + bw^{p+1} \qquad 0 < a < 1 \qquad a+b=1 \qquad p \in \mathbb{N} \qquad p > \frac{1}{d}$

Dann gilt: i) $|w| \leq 1, w \neq 1 \leadsto |z| < 1$

ii) $w = 1 \leadsto z = 1$

Bew: i) $\cdot\ |w| < 1 \leadsto |z| \leq a|w|^p + b|w|^{p+1} < a+b = 1$

$\cdot\ |w| = 1,\ w \neq 1 \leadsto W := 1 \cdot a + w \cdot b \qquad 0 < a < 1 \qquad a+b=1$

liegt innerhalb der Strecke $\overline{1,w}$ d.h. $|W| < 1$

$\leadsto |z| = |w|^p |a+bw| = 1|W| < 1$

ii) $w=1 \leadsto z=a+b=1$

Setze $g(w) := f(z) = f(aw^p+bw^{p+1}) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(aw^p+bw^{p+1})^{n_k}$

$= \sum_{k=0}^{\infty} a_k w^{pn_k}(a+bw)^{n_k} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k w^{pn_k} \sum_{v=0}^{n_k} \binom{n_k}{v} b^v a^{n_k-v} w^v$

$= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left\{ \sum_{v=0}^{n_k} \binom{n_k}{v} a^{n_k-v} b^v w^{v+pn_k} \right\}$ für $|w| < 1$

Nun gilt:

$n_k+pn_k < pn_{k+1}$ (denn $\frac{n_{k+1}}{n_k} > 1+d > 1+\frac{1}{p}$)

(man beachte: n_k+pn_k ist die höchste Potenz von w zum Glied a_k

pn_{k+1} ist die kleinste Potenz von w zum Glied a_{k+1})

Damit tritt in der letzten Reihe keine Potenz von w zweimal auf;wir können daher diese Reihe schreiben als $\sum_{n=0}^{\infty} b_n w^n$ (bei konvergenten Reihen darf man Klammern setzen , und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n w^n$ konvergiert ja für $|w| < 1$ (vgl ANHANG H).

$g(w) = \sum_{w=0}^{\infty} b_n w^n$ ist sogar regulär für $|w| \leq 1$ und vorerst $w \neq 1$. (denn aus $|w| \leq 1$,$w \neq 1$ folgt $|z| < 1$ und $g(w) = f(z)$)

Nun divergiert die Reihe für $\tilde{w} = 1+\varepsilon$, $\varepsilon > 0$,denn sonst würde auch $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(a\tilde{w}^p+b\tilde{w}^{p+1})^{n_k} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \tilde{w}^n$ konvergieren,das ergibt jedoch ein Widerspruch wegen

$|a\tilde{w}^p+b\tilde{w}^{p+1}| = a(1+\varepsilon)^p+b(1+\varepsilon)^{p+1} = (1+\varepsilon)^p(a+b+\varepsilon b) > 1$

und $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{n_k}$ divergent für $|z| > 1$!

Damit ist R=1 der Konvergenzradius der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} b_n w^n$.

Da jedoch jeder Punkt $|w| = 1$, $w \neq 1$ regulärer Punkt von $\sum_{n=0}^{\infty} b_n w^n$ ist,und es mindestens einen singulären Punkt auf dem Einheitskreis geben muss,ist $w = 1$ singulärer Punkt für $g(w)$. Damit ist aber auch $z=1$ singulärer Punkt für $f(z)$ (bea: $w=1 \curvearrowright z=1$) .

Damit ist auch jeder Punkt z mit $|z|=1$ singulärer Punkt für f (vgl Vorbemerkung zum Satz von FABRY) $\curvearrowright f \in \mathcal{F}$

$\square$

§ 5 HÄUFIGKEIT DER NICHTFORTSETZBAREN POTENZREIHEN

5.1 HILFSSATZ

Vor: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ $\qquad \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$

$f \in \mathcal{F}$

Beh: $f^{(n)} \in \mathcal{F} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Bew:

OBdA sei n=1

Nach Voraussetzung und 1.1,1.2 hat für $z_o \in \Delta$ die Reihe

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_o)}{n!} (z-z_o)^n$ den Konvergenzradius $1-|z_o|=:R$

dh $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|f^{(n)}(z_o) \;/\; n!|} = \frac{1}{R}$ und es gilt für $|z-z_o|<R$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_o)}{n!} (z-z_o)^n = f(z) \curvearrowright f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_o)}{n!} n\,(z-z_o)^{n-1}$$

Der Konvergenzradius dieser Reihe ist wiederum

$$1/ \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n-1]{\left|\frac{f^{(n)}}{n!}(z_o)\; n\right|} = R$$

Nach 1.1,1.2 ist damit $e^{i\arg z_o}$ ein singulärer Punkt für f'. Da z_o beliebig war, ist $f' \in \mathcal{F}$.

$\square$

BEMERKUNG

Die Umkehrung gilt ebenso: $f' \in \mathcal{F} \curvearrowright f \in \mathcal{F}$

Beweis: analog.

Es folgen jetzt einige Bezeichnungen und Definitionen, insbesondere aus der LEBESGUEschen Integrationstheorie.

5.2 DEFINITION

Sei $t \in [0,1]$, t habe die Dualentwicklung

$t = \sum_{n=0}^{\infty} t_n 2^{-n}$ $\qquad t_n \in \{0,1\}$

Dann heisst $r_n(t) = (-1)^{t_n}$ die n-te RADEMACHER-Funktion.

Damit $r_n(t)$ wohldefiniert ist,setze man oBdA voraus,dass gilt: $\forall n \quad \exists v_n > n \quad$ mit $\quad t_{v_n} = 0$.

5.3 DEFINITIONEN , BEMERKUNGEN

1) Mit $L_2(E)$ bezeichne man die Menge aller quadratisch LEBESGUE integrierbaren Funktionen auf E.

λ sei das LEBESGUE Maß .

2) $\|f\|_2 := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \, dt$ ist eine „Norm" auf $L_2(E)$ mit der Konvention $f=g :\Longleftrightarrow f=g$ fast überall (fü)

(siehe ANHANG I)

3) Sei h_N , $h \in L_2$. Dann schreiben wir

$h = \underset{N \to \infty}{\text{l.i.m.}}\, h_N$ (WIENER-Symbolik)

falls $\|h_N - h\|_2 \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$

4) Aus der Theorie der Hilberträume ist bekannt,dass gilt:

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{int}$ konvergent im Sinne der L_2 Norm $\Longleftrightarrow$

$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2$ konvergent .

Es folgt jetzt ein wenig bekanntes Fortsetzungskriterium, das N. WIENER 1926 aufgestellt hat.Den etwas länglichen Beweis werde ich hier aber nur skizzieren,den vollständigen Beweis findet man in [II. 11] .

5.4 WIENERsche FORTSETZUNGSKRITERIUM

Geg: $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$

$\forall\, p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ soll folgender Grenzwert existieren:

$$b_p := \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} a_{n+p}\, \overline{a_n}$$

Setze: i) $b_{-n} := \overline{b_n} \qquad n \in \mathbb{N}$

$$\varphi(t) := \underset{N\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}} \sum_{\substack{-N<n<N \\ n\neq 0}} \frac{1}{in}\, b_n\, e^{int} \qquad \text{(reellwertig)}$$

ii) $A(t) := b_0 t + \varphi(t)$

Vor: $A(t)$ streng wachsend , $t \in [0, 2\pi)$

Beh: $g \in \mathcal{F}$

Beweisidee:

A) Dass $\varphi(t)$ im obigen Sinn tatsächlich existiert,folgt aus $|b_p| \leq b_0 \quad \forall p$ und 5.3.4) !

Bew:

$$\Big|\sum_{n=0}^{N-1} a_{n+p}\overline{a_n}\Big| \leq \Big\{\sum_{n=0}^{N-1}|a_{n+p}|^2\Big\}^{1/2}\Big\{\sum_{n=0}^{N-1}|a_n|^2\Big\}^{1/2} \leq \Big\{\sum_{n=0}^{N+p-1}|a_n|^2\Big\}^{1/2}\Big\{\sum_{n=0}^{N+p-1}|a_n|^2\Big\}^{1/2}$$

$$\sim \frac{1}{N}\Big|\sum_{n=0}^{N-1} a_{n+p}\,\overline{a_n}\Big| \leq \Big\{\frac{1}{N+p}\sum_{n=0}^{N+p-1}|a_n|^2\Big\}\cdot\frac{N+p}{N}$$

$$\sim |b_p| = \Big|\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} a_{n+p}\,\overline{a_n}\Big| = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\Big|\sum_{n=0}^{N-1} a_{n+p}\,\overline{a_n}\Big| \leq$$

$$\leq \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N+p}\sum_{n=0}^{N+p-1}|a_n|^2 \cdot \lim_{N\to\infty}\frac{N+p}{N} = b_0 \cdot 1 = b_0 \qquad \square$$

B) Auch $f(x) := \underset{N\to\infty}{\mathrm{l.i.m}} \sum_{j=1}^{N} \frac{a_j e^{ijx}}{j}$ existiert!

Bew:

Nach 5.3.4) genügt es zu zeigen ,dass $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{|a_j|^2}{j^2} < \infty$!

$$\sum_{j=1}^{N}\frac{|a_j|^2}{j^2} = \sum_{j=1}^{N}|a_j|^2\int_j^{\infty}\frac{2}{x^3}\,dx \leq \sum_{j=1}^{N}|a_j|^2\sum_{n=j}^{\infty}\frac{2}{n^3} \leq$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^3}\sum_{j=1}^{n}|a_j|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2}\Big(\frac{\sum_1^n|a_j|^2}{n}\Big) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2}M$$

mit $M := \sup_{n\in\mathbb{N}}\Big\{\frac{\sum_1^n|a_j|^2}{n}\Big\}$

$M < \infty$ nach Voraussetzung da $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n}|a_j|^2$ existiert.

Setze nun $\varphi_x(t) := f(x+t) - f(x-t)$

$$\Phi_h(t) := \int_0^h \varphi_x(t)\, dt$$

Es gilt $\Phi_h(t) \in L_2(E) \quad \forall h \geq 0$

C) Unter der Voraussetzung dass $A(t)$ streng wächst, wird nun gezeigt, dass gilt:

$$\lim_{h \to 0} \frac{3}{4\pi h^3} \int_I |\Phi_h(x)|^2\, dx > 0 \qquad \text{für jedes Intervall}$$

$I \subseteq (0,2\pi)$

(ohne Beweis hier)

D) Dann kann $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} z^n$ aber nicht über den Einheitskreis fortgesetzt werden, denn sonst wäre $f(e^{ix}) := f(x) \in C^{\infty}(I)$ (!) für ein $I \subseteq (0,2\pi)$, etwa $I = (a,b)$.

Daraus ergibt sich aber folgender Widerspruch:

$|f'(x)| \leq C$ auf $[a+\varepsilon, b-\varepsilon] =: J$. Setze $K := [a+2\varepsilon, b-2\varepsilon]$

$\sim \varphi_x(t) = f'(\xi_x)\, 2t$; $\xi_x \in (x-t, x+t) \subseteq J$ für $0 < t < \varepsilon$, $x \in K$

$\sim |\Phi_h(x)| \leq C \int_0^h 2t\, dt = C \cdot h^2$; $h < \varepsilon$, $x \in K$

$\sim \int_K |\Phi_h(x)|^2\, dx \leq C^2 h^4 |K|$

$\rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{3}{4h^3 \pi} \int_K |\Phi_h(x)|^2\, dx = 0$.

E) Nach 5.1 ist damit auch $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{F}$.

$\square$

5.5 SATZ

Geg: $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ $\qquad \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$

$r_n(t)$ RADEMACHER-Funktion

Vor: i) $|a_n| = O(n^p)$, $n \to \infty$; $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

ii) $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} |a_n|^2 \frac{1}{n^{2p}} > 0$

Beh: $F_t(z) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, r_n(t)\, z^n \in \mathcal{F}$ für λ-fast alle $t \in [0,1]$

Bew:

a) Setze $c_n := \frac{a_n}{n^p}$ $\curvearrowright$ $|c_n| = \frac{|a_n|}{n^p} \leq K$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}$

und betrachte im folgenden die Reihe

$g(z) = \sum_{n=1}^{\omega} c_n z^n$

OBdA sei K=1, sonst $\frac{c_n}{K}$ betrachten.

b) Nach dem WIENERschen Fortsetzungskriterium genügt es zu zeigen, dass die dort auftretenden Mittel

$b_p = b_p(t)$, $p \geq 1$, für fast alle $t \in [0,1]$ Null sind;

(denn nach ii) ist $b_o(t) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} |c_n|^2 > 0$

$\curvearrowright$ $A(t) = b_o \cdot t$ streng wachsend.)

c) Es gilt:

$$\left|\sum_{i=1}^{N} x_i\right|^4 = \left|\sum_{\substack{0 \leq i_j \leq 4 \\ (*)}} (x_1)^{i_1} (x_2)^{i_2} \cdots (x_N)^{i_N} \binom{4}{i_1, \dots, i_N}\right|$$

mit $\binom{4}{i_1, \dots, i_N} := \frac{4!}{i_1! \cdot \dots \cdot i_N!}$ $\qquad (* \sum_{j=1}^{N} i_j = 4)$

d) Weiter gilt:

$$\int_0^1 r_{n_1}^{v_1}(t) \cdot \ldots \cdot r_{n_m}^{v_m}(t)\, dt = \begin{cases} 1 \iff & \text{alle } v_j \text{ gerade} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(zum Beweis siehe ANHANG J)

e) Setze $G_N(t) := \frac{1}{N^4} \left| \sum_{n=1}^{N} c_{n+s}\ r_{n+s}(t)\ \overline{c_n}\ r_n(t) \right|^4 \geqslant 0$

für $s \geqslant 1$ fest gewählt.

Nach c), d) gilt dann:

$$\int_0^1 G_N(t)\ dt \leq \frac{1}{N^4}\left\{ \sum_{n=1}^{N} |c_{n+s}\ \overline{c_n}|^4 + \binom{4}{2} \sum_{\substack{1\leq i,k\leq N \\ i<k}} |c_{i+s}\ \overline{c_i}\ c_{k+s}\ \overline{c_k}|^2 \right\} \leq$$

$$\leq N^{-4}\left(N+6\binom{N}{2}\right) = N^{-4}\left\{N+3N(N-1)\right\} \leq N^{-4}(N^2+3N^2) = \frac{4}{N^2}$$

$$\int_0^1 \left(\sum_{N=1}^{\infty} G_N(t) \right) dt \overset{\text{Lebesgue}}{=} \sum_{N=1}^{\infty} \left(\int_0^1 G_N(t)\ dt \right) \leq \sum_{N=1}^{\infty} \frac{4}{N^2} < \infty$$

$\overset{\text{Lebesgue}}{\leadsto} \sum_{N=1}^{\infty} G_N(t)$ fü endlich $\leadsto G_N(t) \to 0$ für fast alle $t \in [0,1]$

$\leadsto |b_s(t)|^4 = \lim_{N\to\infty} G_N(t) = 0 \quad \forall t \in [0,1] \setminus N_s,\ \lambda(N_s) = 0$

f) Da s beliebig war, erhält man abzählbar viele Nullmengen

$N_s,\ s \geqslant 1$

Setze $N := \bigcup_{s\geq 1} N_s \leadsto \lambda(N) = 0$

Damit gilt:

$b_s(t) = 0 \quad \forall s \geqslant 1$ und für fast alle $t \in [0,1] =: I$

g) Nach b) und e) ist also $H_t(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{c}_n z^n \in \mathfrak{F},\ \tilde{c}_n := c_n\ r_n(t)$, (A)

für fast alle $t \in I$; mit 5.1 gilt: $\left(\tilde{a}_n := a_n\ r_n(t) \right)$

$$\mathfrak{F} \ni z\ H_t'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n\tilde{c}_n z^n =: H_1(z)$$

$$\mathfrak{F} \ni z\ H_1'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2\tilde{c}_n z^n =: H_2(z)$$

....

$$\mathfrak{F} \ni z\ H_{p-1}'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^p\tilde{c}_n z^n = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n z^n \quad (p \geqslant 1)$$

$\leadsto F_t(z) = \sum_{n=1}^{\infty} r_n(t)\ a_n z^n \in \mathfrak{F}$ für fast alle $t \in [0,1]$

Für $p=0$ ist $a_n = c_n$ und wir sind nach der Zeile (A) bereits fertig.

Insgesamt haben wir also gezeigt, dass $F_t(z) = \sum_{n=1}^{\infty} r_n(t) a_n z^n$ für fast alle $t \in [0,1]$ aus $\mathfrak{F}$ ist.

$\square$

5.6 SATZ

Geg: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ $\qquad \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$

$r_n(t)$ RADEMACHER-Funktion

Vor: i) $a_n = O(n^{-p}) \qquad n \to \infty \qquad p \in \mathbb{N}$

ii) $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |a_n|^2 n^{2p} > 0$

Beh: $F_t(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n r_n(t) z^n \in \mathfrak{F}$ für λ-fast alle $t \in [0,1]$

Bew:

Setze $c_n = a_n n^p \quad \sim \quad |c_n| \leq K \quad \forall n \in \mathbb{N}$

OBdA sei $K=1$.

Nach ii) gilt: $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |c_n|^2 > 0$

Wie im Beweis von 5.5 erhält man $\sum_{n=0}^{\infty} c_n r_n(t) z^n \in \mathfrak{F}$

für fast alle t $[0,1]$; mit der Bemerkung zu 5.1 gilt:

$$\mathfrak{F} \ni H_0(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{c}_n z^n =: z H_1'(z) \qquad \tilde{c}_n := c_n r_n(t)$$

$$\mathfrak{F} \ni H_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} \tilde{c}_n z^n =: z H_2'(z) \qquad \tilde{a}_n := a_n r_n(t)$$

$$\mathfrak{F} \ni H_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} \tilde{c}_n z^n =: z H_3'(z)$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\mathfrak{F} \ni H_p(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-p} c_n z^n = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n z^n$$

$$\sim F_t(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r_n(t) z^n \in \mathfrak{F} \text{ für fast alle } t \in [0,1].$$

$\square$

Dieser Satz zeigt also, dass unter gewissen Vorbedingungen die überwiegende Mehrheit der Potenzreihen nicht über ihren Konvergenzkreis hinaus fortsetzbar ist.

Falls wir keine Bedingungen an die Koeffizienten a_n stellen, (ausser der, dass $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$) dann gilt immerhin noch der folgende Satz :

5.7 SATZ von FATOU , POLYA , HURWITZ (1916)

Geg: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ $\quad \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$

Beh: $\exists\ t \in [0,1]$ mit $F_t(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r_n(t)\, z^n \in \mathcal{F}$

Bew: nach [4]

Da $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ gibt es eine Teilfolge n_j ,

$n_{j+1} > 2n_j$ mit $\lim_{j\to\infty} \sqrt[n_j]{|a_{n_j}|} = 1$

Setze $R(z) := \sum_{j=0}^{\infty} a_{n_j} z^{n_j}$ $\quad f_0(z) := f(z) - R(z)$

Nach dem HADAMARDschen - Lückensatz ist $R(z) \in \mathcal{F}$.

Zerlege jetzt $R(z)$ in unendlich viele Potenzreihen $f_m(z)$ mit jeweils unendlich vielen Gliedern,und zwar so,dass jedes $a_{n_j} z^{n_j}$ genau einem $f_m(z)$, $m \geq 1$ angehört.

$\sim R(z) = \sum_{m=1}^{\infty} f_m(z) \qquad |z| < 1$

(Verfahre etwa nach folgendem Schema:

$n_1\ n_2\ n_4\ n_7 \ldots\ldots \quad f_1$

$n_3\ n_5\ n_8 \ldots\ldots\ldots \quad f_2$

$n_6\ n_9 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad f_3$

$n_{10} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad f_4$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots$

$$f_m(z) = \sum_{j=1}^{\infty} a_{n_{v_{m_j}}} z^{n_{v_{m_j}}} \qquad v_{m_j} = \frac{1}{2} j^2 + \frac{2m-3}{2} j + \frac{m^2-m+2}{2}$$)

Weiter gehört jedes $a_n z^n$ genau einem $f_m(z)$, $m \geq 0$ an

Betrachte nun die Familie $\mathcal{R}$ von Potenzreihen der Form:

$$\mathcal{R} = \left\{ F_t(z) : F_t(z) = f_0(z) + \sum_{m=1}^{\infty} r_m(t) f_m(z) \quad , \ t \in [0,1] \right\}$$
$$= \left\{ F_t(z) : F_t(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n a_n z^n , \quad \varepsilon_n = \pm 1 \right\}$$

Beh: Mindestens ein $F(z) \in \mathcal{R} \cap \mathcal{F}$!

Bew: Annahme jedes $F(z) \in \mathcal{R}$ sei über den Einheitskreis fortsetzbar;dann existiert für jedes $F(z) \in \mathcal{R}$ eine Einheitswurzel in der $F(z)$ regulär ist.

(Beachte:die Menge der Einheitswurzeln $\{e^{i2\pi k/n}, \ 0 < k \leq n, \ k,n \in \mathbb{N}\}$ liegt dicht in E)

Weil nun $\mathcal{R}$ die Mächtigkeit des Kontinuums hat, und es aber nur abzählbar viele Einheitswurzeln gibt, gäbe es ein $F_{t_1}(z)$ und $F_{t_2}(z) \in \mathcal{R}$,die in ein und derselben Einheitswurzel $e^{i2\pi k/n}$:=W regulär wären.

Damit wäre aber auch $F_{t_2}(z) - F_{t_1}(z) =: D(z)$ (*)

regulär in W.Es gilt aber:

$$F_{t_2}(z) - F_{t_1}(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \{r_m(t_2) - r_m(t_1)\} f_m(z)$$

mit $r_m(t_2) - r_m(t_1) \in \{0,2,-2\}$ und

$r_{m_0}(t_2) - r_{m_0}(t_1) \neq 0$ für ein $m_0 \in \mathbb{N}$ (weil sonst $F_{t_2}(z) = F_{t_1}(z)$ wäre)

D(z) ist nun aber von der Form $D(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{p_\nu} z^{p_\nu}$

mit $p_{\nu+1} > 2p_\nu$, $\overline{\lim_{\nu \to \infty}} \sqrt[p_\nu]{|b_{p_\nu}|} = \lim_{\nu \to \infty} |a_{n_{j_\nu}}|^{\frac{1}{n_{j_\nu}}} = 1$

Nach dem HADAMARDschen Lückensatz wäre damit auch $D(z) \in \mathcal{F}$,was im Widerspruch zu (*) steht .

$\square$

Wir haben also gezeigt,dass man zu einer beliebig vorgegebenen Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $\overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ durch geeignetes Umändern der Vorzeichen der a_n stets eine nichtfortsetzbare Reihe erhalten kann.

Eine sehr viel stärkere Aussage,in einem gewissen Sinn bestmögliche sogar,erhält man,wenn man die Bedingung $\overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ durch die "etwas" stärkere Bedingung $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ ersetzt.

5.8 SATZ von HAUSDORFF (1919)

Geg: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$

Vor: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ für die a_n welche nicht verschwinden

Beh: Es gibt höchstens abzählbar viele Potenzreihen der Form $\sum_{n=0}^{\infty} c_n a_n z^n$ $\quad c_n \in \mathbb{Z}$ welche über den Einheitskreis fortsetzbar sind.

Zum Beweis dieses interessanten Ergebnisses verweise ich auf die Literatur; siehe dazu die Originalarbeit von HAUSDORFF [II . 6]

Dass bei diesem Satz von HAUSDORFF die Bedingung $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ nicht hinreicht, damit die volle Aussage erhalten bleibt, zeigt folgendes Beispiel:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{mit} \quad a_n = \begin{cases} 1/2^n & \text{falls } n=2v \quad v \in \mathbb{N} \cup \{0\} \\ 1 & \text{falls } n=2v+1 \quad v \in \mathbb{N} \cup \{0\} \end{cases}$$

Es gilt $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 1 \qquad \underline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{2}$, damit existiert $\lim_{n\to\infty} \sqrt{|a_n|}$ nicht.

Bilde die Reihen $f_2(z) = \sum_{v=0}^{\infty} a_{2v} z^{2v}$

$f_1(z) = \sum_{v=0}^{\infty} a_{2v+1} z^{2v+1}$

Es gilt:

a) $R(f_1) = 1 \qquad R(f_2) = 2$

b) $f(z) = f_1(z) + f_2(z) \qquad$ für $|z| < 1$

c) $f_1(z) = \frac{z}{1-z^2} \quad |z| < 1 \qquad f_2(z) = 1/\left(1-\frac{z^2}{4}\right) \quad |z| < 2$

Aus der geschlossenen Darstellung c) folgt, dass die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $\sum_{v=0}^{\infty} a_{2v+1} z^{2v+1}$ über den Einheitskreis fortsetzbar sind, was für $\sum_{v=0}^{\infty} a_{2v} z^{2v}$ trivial ist.

Bilde jetzt die überabzählbar vielen Reihen

$$f_{2,\varepsilon}(z) = \sum_{v=0}^{\infty} \varepsilon_v a_{2v} z^{2v} \quad , \quad \varepsilon_v = \pm 1 \quad , \quad \varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots)$$

Die sind alle in $|z| < 2$ holomorph.

Daraus folgt, dass die Reihen

$$f_\varepsilon(z) = f_1(z) + f_{2,\varepsilon}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(\varepsilon)} z^n$$

mit $$b_n^{(\varepsilon)} = \begin{cases} 1 & \text{falls } n=2v+1 \qquad v=0,1,\dots \\ \varepsilon_v \frac{1}{2} & \text{falls } n=2v \qquad v=0,1,\dots \end{cases}$$

in $|z| < 1$ holomorph sind.

Ausserdem sind die $f_\varepsilon(z)$ über den Einheitskreis fortsetzbar, denn f_1 und $f_{2,\varepsilon}$ sind es.

Damit hat man überabzählbar viele $f_\delta(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n a_n z^n$ konstruiert, welche über den Einheitskreis fortsetzbar sind. (a_n also fest, $\delta_n = \pm 1$, $\delta = (\delta_1, \delta_2, \dots)$)

Allerdings gilt nach Satz 5.5, dass die bei den so konstruierten $f_\delta(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n a_n z^n$ $\quad a_n = \frac{1+(-1)}{2} \frac{1}{2^n} + \frac{1-(-1)}{2} 1$ auftretenden t's eine LEBESGUE-Nullmenge bilden

(wobei $t = \sum_{n=0}^{\infty} t_n 2^{-n}$ mit $t_n = \begin{cases} 0 & \text{falls } \delta_n = 1 \\ 1 & \text{falls } \delta_n = -1 \end{cases}$

Man beachte, dass die "Bedingung"

$$\forall n \; \exists v_n > n \quad \text{mit} \quad t_{v_n} = 0$$

welche man zur Wohldefiniertheit der $r_n(t)$ braucht, hier wegen $\delta_n = 1 \Longleftrightarrow t_n = 0$ für $n=2v+1$ erfüllt ist.

BEMERKUNG

Die Aussage, dass die oben konstruierten t's eine LEBESGUE-Nullmenge bilden, kann man auch direkt zeigen:

Die Menge der auftretenden t's hat die Gestalt:

$$M := \left\{ t: \ t = \sum_{n=0}^{\infty} t_n \, 2^{-n} \ , \quad t_{2v} = 0,1 \ ; \ t_{2v+1} = 0 \right\}$$
$$= \left\{ t: \ t = \sum_{n=0}^{\infty} r_n \, 4^{-n} \ , \quad r_n = 0,1 \right\}$$

Es gilt für ein festes $t \in M$:

$$s_n := \sum_{v=0}^{n} r_v \, 4^{-v} \leq t = \sum_{v=0}^{\infty} r_v \, 4^{-v} \leq s_n + \sum_{v=n+1}^{\infty} 1 \cdot 4^{-v} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Daraus folgt:

$$M \subseteq \bigcup_{s_n \in E_n} \left[s_n \ , \ s_n + 1/\ 3 \cdot 4^{n} \right] =: I_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

wobei für ein festes n s_n die endliche Menge

$$\left\{ \sum_{v=0}^{n} r_v \, 4^{-v} \ , \ r_v = 0,1 \right\} =: E_n$$

durchläuft.

I_n hat nun ein LEBESGUE-Maß $\lambda(I_n) \leq \frac{1}{3 \cdot 4^n} \cdot 2^{n+1} = 2^{-n+1} \cdot 1/3$

Damit gilt:

$$M \subseteq \bigcap_{n \geq 0} I_n \quad \curvearrowright$$
$$\curvearrowright \lambda^*(M) \leq \lambda^*\left(\bigcap_{n \geq 0} I_n\right) \leq \lambda(I_n) = 2^{-n+1} \cdot 1/3$$
$$\curvearrowright \lambda^*(M) \leq 2^{-n+1} \ 1/3 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$
$$\curvearrowright \lambda^*(M) = 0$$
$$\curvearrowright \lambda(M) = 0$$

wobei λ^* das äussere LEBESGUE-Maß ist.

Weitere interessante Ergebnisse über die Häufigkeit der nichtfortsetzbaren Potenzreihen findet man in der Arbeit [II 7.i)] von POLYA.
Dort zeigt POLYA unter Einführung eines geeigneten Umgebungssystem auf einer gewissen Quotientenmenge der Menge aller Potenzreihen mit Konvergenzradius R=1 , dass die Menge der fortsetzbaren Potenzreihen perfekt und nirgends dicht ist,sowie die Menge der nichtfortsetz= baren Potenzreihen nur innere Punkte hat ,und überall dicht ist.
(siehe hierzu auch die bereits zitierte Arbeit von HAUSDORFF [II. 6.])
Wie zu den vorhergegangenen Paragraphen sei auch zu diesem Paragraphen das Buch [0] von BIEBERBACH empfohlen.

§ 6 DAS VERHALTEN VON POTENZREIHEN AUF DEM RANDE IHRES KONVERGENZKREISES

6.1 PROPOSITION : lokales Verhalten

Im allgemeinen hat die Eigenschaft z=1 regulärer Punkt bzw z=1 singulärer Punkt der Reihe $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ nichts damit zu tun, ob diese Reihe nun im Punkt z=1 konvergiert oder divergiert, denn es können folgende Fälle auftreten: (lokal)

1) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ z=1 sing. Pkt Reihe div in z=1

2) $f(z) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{n(n-1)} =$ z=1 sing. Pkt Reihe konv in z=1

$= (1-z)\log(1-z) + z$

3) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n = \frac{1}{1+z}$ z=1 reg. Pkt Reihe div in z=1

4) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} z^n =$ z=1 reg. Pkt Reihe konv in z=1

$= \log(\frac{1}{1+z})$

In einer späteren Proposition werden wir auch auf das globale Verhalten eingehen.

Der nächste Satz von FATOU , M. RIESZ wird uns zeigen, dass unter gewissen Bedingungen die Reihen doch in ihren regulären Punkten auf dem Rande konvergieren.
Wenn wir z=1 einsetzen ,dann sehen wir, dass eine notwendige Bedingung zur Richtigkeit des Satzes von FATOU , M; RIESZ die Konvergenz der a_n gegen Null ist. Dass sie auch hinreichend ist , zeigt uns eben dieser Satz.

6.2 SATZ VON FATOU , M. RIESZ

Geg: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ $\qquad \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$

Vor: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Beh: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ konvergiert gleichmässig auf jedem Regularitätsbogen des Einheitskreises.

Bew: (nach [7], [II.12])

OBdA sei $z=1$ regulärer Punkt von $f(z)$, weiter sei $f(1)=0$

Nach dem Beweis eines früheren Satzes gilt für $|z|<1$:

$$\frac{f(z)}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} s_n z^n \qquad \text{mit} \qquad s_n = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu$$

Sei nun $0<r<1$.

Nach der CAUCHY-schen Integralformel gilt dann:

$$s_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{f(z)}{1-z} \frac{1}{z^{n+1}} \, dz$$

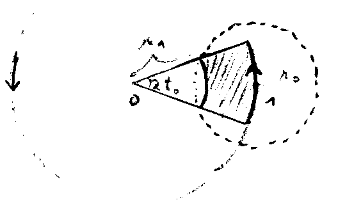
Setze $z=re^{it}$ $\curvearrowright$ $dz = re^{it}\, i\, dt \quad = iz\, dt$

$$\curvearrowright \quad s_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(re^{it})}{1-re^{it}} e^{-int} \, dt$$

A) Da nach Voraussetzung $f(z)$ in $z=1$ regulär ist,

gilt:

$$\left| \frac{f(z)-f(1)}{z-1} \right| \leq M \qquad \text{für} \quad |z-1| \leq r_o \; ,$$



also insbesondere

$$\frac{|f(re^{it})|}{|1-re^{it}|} \leq M \qquad \text{für} \quad r_1 \leq r \leq 1 \quad , \quad |t| \leq t_o$$

Mit diesem t_o wird das obige Integral nun folgender=maßen zerlegt:

$$2\pi r^n s_n = \int_{-t_o}^{t_o} \frac{f(re^{it})}{1-re^{it}} e^{-int} \, dt + \int_{t_o}^{2\pi-t_o} \frac{f(re^{int})}{1-re^{it}} e^{-int} \, dt$$

$$=: \; I_1 + I_2$$

Für I_1 erhält man nun folgende Abschätzung:

$$|I_1| \leq \int_{-t_o}^{t_o} \left|\frac{f(re^{it})}{1-re^{it}}\right| \, |e^{-int}| \, dt \quad \leq \quad 2Mt_o \qquad \text{für} \quad r_1 \leq r \leq 1$$

Die Abschätzung für I_2 wird sich jedoch als etwas schwieriger erweisen.

B) Dazu müssen wir eine Hilfsfunktion $g(t) = g_r(t)$ einführen, wobei $r_1 \leq r \leq 1$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Wir definieren also g wie folgt:

1) $g(t) = \dfrac{1}{1-re^{it}}$ für $t \in [-\pi, -t_o] \cup [t_o, \pi]$

2) $g(t)$, $g'(t)$ stetig auf $[-\pi, \pi]$

3) $g''(t)$ integrierbar auf $[-\pi, \pi]$

4) $|g^{(i)}(t)| \leq K$ gleichmässig in r, wobei $r_1 \leq r \leq 1$ und für alle $t \in [-\pi, \pi]$ ($i = 0,1,2$)

Solch eine Wahl ist möglich!

Mache zum Beispiel den Ansatz $g(t) = P(t)$ mit

$P(t) = \sum_{j=0}^{3} c_j \, e^{ijt}$ $\quad t \in [-t_o , t_o]$, $c_j = c_j(r)$

und beachte dass gilt:

$$\left|\frac{1}{1-re^{it_o}}\right| \leq \frac{1}{2 \sin t_o/2 \cdot \sqrt{r_1}} \qquad \text{für} \quad r_1 \leq r \leq 1$$

(siehe ANHANG K)

Damit erhalten wir: (für $r_1 \leq r \overset{!}{<} 1$)

$$I_2 = \int_{t_o}^{2\pi-t_o} \frac{f(re^{it})}{1-re^{it}} \, e^{-int} \, dt = \int_{-\pi}^{-t_o} \frac{f(re^{it})}{1-re^{it}} \, e^{-int} \, dt + \int_{t_o}^{\pi} \frac{f(re^{it})}{1-re^{it}} e^{-int} \, dt$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f(re^{it}) \, g(t) \, e^{-int} \, dt - \int_{-t_o}^{t_o} f(re^{it}) \, g(t) \, e^{-int} \, dt$$

$$=: I_3 - I_4$$

In den nächsten beiden Schritten werden wir nun I_3 und I_4 abschätzen.

$$\text{C) } I_3 = \int_{-\pi}^{\pi} g(t)\Big(\sum_{m=0}^{\infty} a_m r^m e^{imt}\Big)e^{-int}\,dt \overset{\text{glm Konvergenz} \downarrow \text{ in } t\,!}{=}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} a_m r^m \int_{-\pi}^{\pi} g(t)\, e^{i(m-n)t}\,dt =_{\pi}$$

$$= a_n r^n \int_{-\pi}^{\pi} g(t)\,dt - \sum_{\substack{m=0\\ m\neq n}}^{\infty} \frac{a_m}{(m-n)^2}\, r^m \int_{-\pi} g''(t)\, e^{i(m-n)t}\,dt$$

(dabei haben wir bei der letzten Gleichung zweimal partiell integriert,und die Tatsache verwendet,dass die Terme $g^{(k)}(t)\, e^{i(m-n)t}\Big|_0^{2\pi}$ für k=0,1 verschwinden.)

Damit erhalten wir folgende Abschätzung:

$$|I_3| \leq |a_n| \int_{-\pi}^{\pi} |g(t)|\,dt + \sum_{\substack{m=0\\ m\neq n}}^{\infty} \frac{|a_m|}{(m-n)^2} \int_{-\pi}^{\pi} |g''(t)|\,dt \leq$$

$$2\pi K \Big\{ |a_n| + \sum_{\substack{m=0\\ m\neq n}}^{\infty} \frac{|a_m|}{(m-n)^2} \Big\}$$

Setze $\varepsilon_v = \max\limits_{m \geq v} |a_m|$.

Nach Voraussetzung gilt dann: $\varepsilon_v \xrightarrow[v\to\infty]{} 0$ $\leadsto$

$$|I_3| \leq 2\pi K \Big\{ \varepsilon_n + \sum_{m<\frac{1}{2}n} \varepsilon_0 \frac{1}{(m-n)^2} + \sum_{\substack{m\geq\frac{1}{2}n\\ m\neq n}} \varepsilon_{[\frac{1}{2}n]} \frac{1}{(m-n)^2} \Big\} \leq$$

$$\leq 2\pi K \Big\{ \varepsilon_n + \varepsilon_0 \frac{n/2}{(n/2)^2} + \varepsilon_{[\frac{1}{2}n]}\, C \Big\} \qquad \text{mit } C = 2\pi^2/6$$

$$= 2\pi K \; (\varepsilon_n + 2\varepsilon_0/n + \varepsilon_{[\frac{1}{2}n]}\, C) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\text{D) } I_4 = g(t)\, f(re^{it})\, i/n \Big|_{-t_0}^{t_0} + \frac{1}{in} \int_{-t_0}^{t_0} \big(g(t) f(re^{it})\big)'\, e^{-int}\,dt$$

$\leadsto |I_4| \leq A/n + B/n = D/n$ wobei A,B,D Konstanten sind.

(Bea: $|f^{(k)}(re^{it})| \leq$ const für $|t| \leq t_0$, $r_1 \leq r \leq 1$, $k = 0,1$ weil f regulär in z=1)

E) Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben.

a) Wähle $t_o > 0$ so klein, dass $|I_1| \le 2Mt_o \le \varepsilon/3$

b) Dazu wähle man $n_o = n_o(t_o)$ so gross, dass:

$|I_3| = |I_3(n)| \le 2\pi K \left\{ \varepsilon_n + 2\varepsilon_0/n + \varepsilon_{[\frac{1}{2}n]} C \right\} \le \varepsilon/3$ für $n \geq n_o$

und

$|I_4| = |I_4(n)| \le D/n \le \varepsilon/3$ für $n \geq n_o$

Somit erhalten wir unsere gewünschte Abschätzung:

$|2\pi r^n s_n| \le |I_1| + |I_2| \le |I_1| + |I_3| + |I_4| \le \varepsilon$ für $n \geq n_o$

und alle r mit $r_1 \le r < 1$

Da n_o nicht von r abhängt, kann man $r \longrightarrow 1$ gehen lassen.

Man erhält schliesslich:

$|2\pi s_n| \le \varepsilon, \forall n \geq n_o$

$\leadsto \lim_{n \to \infty} s_n = 0$ $\square$

1. BEMERKUNG

Das Problem war, zu zeigen, dass $2\pi r^n s_n$ gleichmässig in r gegen Null strebt.

Die punktweise Konvergenz erhielte man nach dem Lemma von RIEMANN-LEBESGUE aus der Theorie der Fourieranalysis: (siehe [8])

$$\hat{H}_r(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(re^{it})\, e^{-int}\, dt \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \qquad H \in L_1([-\pi, \pi]), \quad 0 < r < 1 .$$

2. BEMERKUNG

Einen kürzeren Beweis findet man in [8] Seite 338/339 Dort wird aber ein sehr tiefgehendes Resultat, nämlich der Lokalisationssatz von RIEMANN für trigonometrische Reihen gebraucht, auf welches ich hier nicht eingehen kann.

Der vorhergehende Satz von FATOU , M. RIESZ gibt uns nun ein weiteres Kriterium um zu entscheiden,ob eine vorgegebene Potenzreihe den Rand als natürliche Grenze hat oder nicht.

6.3 KOROLLAR

Geg: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$

Vor: i) $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

ii) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{inx}$ divergiert für $x \in X$,

wobei $\overline{X} = [0,2\pi]$

Beh: $f \in \mathfrak{F}$

Bew:

Sei $x \in X$. Annahme e^{ix} sei regulärer Punkt für $f(z)$.

Nach dem Satz von FATOU , M. RIESZ müsste wegen $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{inx}$ konvergieren;was jedoch der Voraussetzung widerspricht.

Damit ist jeder Punkt e^{ix} , $x \in X$ singulärer Punkt von $f(z)$. Da X dicht in $[0,2\pi]$ liegt,folgt dass $f \in \mathfrak{F}$.

$\square$

Dass es tatsächlich solche Potenzreihen gibt ,welche die Voraussetzungen des obigen Korollars erfüllen, wird uns folgendes Beispiel zeigen.

Das Bemerkenswerte daran ist ,dass die noch anzugebene Reihe wirklich in jedem Punkt ihres Konvergenz= kreises divergiert.

6.4 BEISPIEL

Beh: $f(z) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{e^{-ik \log \log k}}{\log k} z^k \quad \in \mathcal{F}$

Bew:

1) Der Konvergenzradius dieser Reihe ist R=1 denn:

$$\left| \frac{e^{-ik \log \log k}}{\log k} \right| = \frac{1}{\log k} \qquad \text{und} \qquad \sqrt[k]{\log k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 1$$

2) Wir zeigen jetzt,dass $\operatorname{Re} S_N(e^{ix})$ für jedes $x \in [0,2\pi]$ divergiert! (wobei $S_N(e^{ix})$ die N-te Partialsumme der Reihe $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{e^{-ik \log \log k}}{\log k} e^{ikx}$ ist)

a) $$\operatorname{Re} S_N(e^{ix}) = \sum_{k=2}^{N} \operatorname{Re}\left(\frac{e^{-ik \log \log k}}{\log k} e^{ikx} \right)$$

$$= \sum_{k=2}^{N} \operatorname{Re}\left(\frac{e^{ik(x-\log \log k)}}{\log k} \right) = \sum_{k=2}^{N} \frac{\cos k(x-\log \log k)}{\log k}$$

b) Setze zur Abkürzung $l_n := [\log n]$ $\quad L_n := \log \log n$

und definiere die Intervalle I_n durch $I_n := (I_n, I_{n+1})$

Setze weiterhin für $n \geq 3$:

$$G_n := \sum_{k=n+1}^{n+l_n} 1/\log k \qquad G_n(x) := \sum_{k=n+1}^{n+l_n} \frac{\cos k(x-L_k)}{\log k}$$

c) Dann gilt:

$$G_n = \sum_{k=n+1}^{n+l_n} 1/\log k \geq \sum_{k=n+1}^{n+l_n} 1/\log (n+l_n) =$$

$$= l_n / \log (n+l_n) =: H_n$$

Nach ANHANG L gilt: $H_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

$$\rightsquigarrow \liminf_{n\to\infty} G_n \geq 1$$

d) Mit den obigen Bezeichnungen erhalten wir weiter:

$$G_n - G_n(x) = \sum_{k=n+1}^{n+l_n} \frac{1-\cos k(x-L_k)}{\log k} = \sum_{k=n+1}^{n+l_n} \frac{2 \sin^2(k(x-L_k)/2)}{\log k} \leq$$

$$\leq \frac{2}{\log n} \sum_{k=n+1}^{n+l_n} k^2 \left(\frac{x-L_k}{2} \right)^2 = \frac{1}{2 \log n} \sum_{k=n+1}^{n+l_n} k^2 (x-L_k)^2$$

e) Sei nun $x \in I_n$ $\quad n+1 \leq k \leq n+l_n$

$\curvearrowright \quad L_n < x < L_{n+1} \leq L_k \leq L_{n+l_n}$

$\curvearrowright \quad |x-L_k| \leq L_{n+l_n} - L_n \quad = \log\log(n+l_n) - \log\log n$

$$= l_n \cdot 1/(t \log t) \leq l_n \quad 1/(n \log n) = \frac{[\log n]}{n \log n} \leq \frac{1}{n}$$

(wobei t nach dem Mittelwertsatz gewonnen wurde)

f) Für $x \in I_n$ gilt also:

$$G_n - G_n(x) \leq \frac{1}{2 \log n} \sum_{k=n+1}^{n+l_n} k^2 \; 1/n^2 \leq \frac{1}{2 \log n} \frac{1}{n^2} \sum_{k=n+1}^{n+l_n} (n+l_n)^2$$

$$= \frac{l_n \; (n+l_n)^2}{2 \; n^2 \; \log n} \leq \frac{(n+l_n)^2}{2n^2} =: \tilde{H}_n$$

Nach ANHANG L gilt: $\tilde{H}_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1/2$

$\curvearrowright \quad \limsup\limits_{n\to\infty} (G_n - G_n(x)) \leq 1/2$

g) Wir erhalten dann folgende Abschätzung für $x \in I_n$:

Nach c) : $G_n \geq 1 - 1/4 = 3/4 \quad$ für $n \geq n_o$

Nach f) : $G_n - G_n(x) \leq 1/2 + 1/8 = 5/8 \quad$ für $n \geq n_o$

$\curvearrowright \quad G_n(x) = G_n - (G_n - G_n(x)) \geq 3/4 - 5/8 = 1/8 \quad$ für $n \geq n_o$

h) Da x in unendlich vielen dieser Intervallen I_n liegt, etwa I_{n_j} $\quad$ (mod 2π) , gilt für $e^{ix} = e^{i(x+2k\pi)}$:

$G_{n_j}(x) \geq 1/8 \quad j=1,2,\ldots \quad n_1 \geq n_o$

Nach dem CAUCHY-Kriterium kann die Folge $R_n(x) := \operatorname{Re} S_n(e^{ix})$ nicht konvergieren.

Damit divergiert erst recht $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{e^{-ik \log\log k}}{\log k} \; e^{ikx}$

Da x beliebig war ,folgt dass unsere Reihe für jedes z mit $|z| = 1$ divergiert.

i) Nach Korollar 6.3 ist damit $f \in \mathcal{F}$

$\square$

Entsprechend der Proposition 6.1 erhalten wir jetzt auch eine Aussage über das globale Verhalten einer Potenzreihe auf dem Rande ihres Konvergenzbereichs, für den interessanten Fall, dass die Glieder der Reihe eine Nullfolge bilden:

6.5 PROPOSITION : globales Verhalten

1) $f(z) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{e^{-ik \log \log k}}{\log k} z^k$ $\quad f \in \mathcal{F}$ Reihe div. in E

2) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n^2}}{2^n}$ $\quad f \in \mathcal{F}$ Reihe konv. in E

Die anderen beiden Fälle, dass f regulär auf ganz E ist, treten nicht auf, dann nach Satz 3.1 gibt es mindestens einen singulären Punkt auf dem Rande des Konvergenzkreises, der ja stets nach Vereinbarung in 1.3 der Einheitskreis sein soll.

□

Zum Schluss dieses Paragraphen wollen wir an einem weiteren Satz zeigen, dass sich bei HADAMARD-Reihen die Beweise mancher Aussagen erheblich einfacher gestalten, als dies bei anderen Reihen der Fall ist. Ein erstes Beispiel ist uns ja schon in 4.16 beim Beweis der Nichtfortsetzbarkeit von HADAMARD-Lückenreihen begegnet.

Zunächst das allgemeine Resultat:

6.6 THEOREM von CARLESON (1966)

Geg: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$

Vor: $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$

Beh: Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ konvergiert fast überall auf $E = \{ z : |z| = 1 \}$

Der Beweis, den man in [II. 15] findet, erstreckt sich über etwa 30 Seiten und kann hier verständlicherweise nicht wiedergegeben werden.

Falls man aber im obigen Satz "nur" HADAMARD-Lückenreihen zulässt, dann verkürzt sich der Beweis auf eine Seite. Dieses Ergebnis will ich in dem nun folgenden Satz beweisen:

6.7 SATZ

Geg: $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{n_k}$ $\overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[n_k]{|a_k|} = 1$

Vor: i) $n_{k+1}/n_k \geq 1+d \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad (d > 0)$

ii) $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 < \infty$

Beh: Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{n_k}$ konvergiert fast überall auf $E = \{ z : |z| = 1 \}$

Bew:

Nach einem Satz von RIESZ-FISCHER gibt es wegen ii) ein $g(x) \in L_2(E)$ mit $g(x) = \mathrm{l.i.m} \sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{in_k x}$, wobei also $\sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{in_k x}$ die FOURIER-Reihe von $g(x)$ ist.

Seien $S_N(x) = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} s_n(x)$ die arithmetischen Mittel der Partialsummen $s_m(x) = \sum_{n=0}^{m} b_n e^{inx}$ wobei

$$b_n = \begin{cases} 0 & \text{für } n \neq n_k \\ a_k & \text{für } n = n_k \end{cases}$$

Nach einem Satz von LEBESGUE (siehe ANHANG M) gilt:

$$S_N(x) \xrightarrow[N \to \infty]{} g(x) \qquad \text{für} \quad x \in [0,2\pi] \setminus N \quad \text{mit} \quad \lambda(N) = 0 \qquad (*)$$

Es gilt:

$$s_{n_k}(x) = s_{n_k+1}(x) = \ldots = s_{n_{k+1}-1}(x) \qquad (**)$$

A) Sei nun speziell $g(x) = 0$, $x \in [0,2\pi] \setminus N$ fest gewählt. Dann folgt aus (*):

$$S_N(x) = o(1) \qquad (N \to \infty)$$

Daraus ergibt sich nun folgendes:

$$(n_{k+1} - n_k)\, s_{n_k}(x) = s_{n_k}(x) + \ldots + s_{n_k}(x) =$$

$$= s_{n_k}(x) + s_{n_k+1}(x) + \ldots + s_{n_{k+1}-1}(x) =$$

$$= n_{k+1} S_{n_{k+1}-1} - n_k S_{n_k-1} = o(n_{k+1}) - o(n_k) =$$

$$= o(n_{k+1}) = o(n_{k+1} - n_k) \qquad (k \to \infty)$$

wobei die vorletzte Gleichung trivial ist $(n_{k+1} \overset{!}{>} n_k)$ und die letzte Gleichung aus folgenden Gründen richtig ist:

Sei $f(\cdot) = o(n_{k+1})$

$$\curvearrowright 0 \leq \frac{|f(\cdot)|}{n_{k+1} - n_k} = \frac{|f(\cdot)|}{n_{k+1}} \frac{n_{k+1}}{n_{k+1} - n_k} =$$

$$\frac{|f(\cdot)|}{n_{k+1}} \, 1/(1 - \frac{n_k}{n_{k+1}}) \leq \frac{|f(\cdot)|}{n_{k+1}} \, \frac{1+d}{d} = o(1)$$

Es folgt also: $s_{n_k}(x) = o(1)$ und damit auch $s_{n_{k+1}}(x) = o(1)$

Wegen (**) gilt demnach: $s_n(x) = o(1)$

B) Der allgemeine Fall $S_N(x) \xrightarrow[N\to\infty]{} g(x) \neq 0$ lässt sich nun bei jeweils festgehaltenem x leicht auf den obigen Fall zurückführen. ($x \in [0,2\pi] \setminus N$)

Insgesamt erhalten wir also:

$s_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} g(x)$ für $x \in [0,2\pi] \setminus N$ $\lambda(N) = 0$

d.h.

die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{in_k x} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n e^{inx}$ konvergiert fast überall .

Mit anderen Worten:

Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{n_k}$ konvergiert fast überall auf E .

$\square$

<u>BEMERKUNG</u>

Auch die Umkehrung des obigen Satzes gilt:

Falls die HADAMARD-Lückenreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{n_k}$ auf einer Teilmenge $T \subseteq E$, wobei T positives Maß hat, konvergiert, so ist $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$.

Der Beweis liegt sehr tief und vollzieht sich mit den notwendigen Hilfssätzen über mehrere Seiten.
Man kann ihn bei ZYGMUND [8] nachlesen.

In 6.7 haben wir also einen Spezialfall des Theorems von CARLESON beweisen können, indem wir voraussetzten, dass möglichst viele Koeffizienten verschwinden sollen. In dem nun nachfolgenden Satz werden wir ,als weiteren Spezialfall des Theorems von CARLESON, voraussetzen, dass sogar $\sum_{n=0}^{\infty} n|a_n|^2$ konvergiert:

6.8 SATZ

Geg: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ $\qquad \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$

Vor: $\sum_{n=0}^{\infty} n|a_n|^2 < \infty$

Beh: Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ konvergiert fast überall auf $E = \{ z : |z| = 1 \}$

Bew:

Aus $\sum_{n=0}^{\infty} n|a_n|^2 < \infty$ folgt $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$

Damit gibt es wieder nach dem Satz von RIESZ-FISCHER ein $g(x) \in L_2(E)$ mit $g(x) = \underset{N\to\infty}{\mathrm{l.i.m}} \sum_{n=0}^{N} a_n e^{inx}$.

Mit denselben Bezeichnungen wie in Satz 6.7 gilt wieder:

$S_N(x) \xrightarrow[N\to\infty]{} g(x)$ fast überall.

Setze $D_n(x) := s_n(x) - S_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{v=0}^{n} v a_v e^{ivx}$

$$\rightsquigarrow |D_n(x)| \leq \frac{1}{n+1} \sum_{v=0}^{n} v|a_v| = \frac{1}{n+1} \sum_{v=0}^{n} (v^{\frac{1}{2}}|a_v|)\, v^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \frac{1}{n+1} \left(\sum_{v=0}^{n} v|a_v|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{v=0}^{n} v\right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{n+1} \left(\sum_{v=0}^{n} v|a_v|^2\right)^{\frac{1}{2}} \frac{n+1}{\sqrt{2}} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{v=0}^{\infty} v|a_v|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig, Wähle n_0 so gross, dass $\sum_{v=n_0+1}^{\infty} v|a_v|^2 < \varepsilon^2$ (möglich da $\sum_{v=0}^{\infty} v|a_v|^2 < \infty$) und setze

$$\tilde{a}_v = \begin{cases} a_v & v \geq n_0+1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Damit erhalten wir:

$$\limsup_{n\to\infty} |D_n(x)| = \limsup_{n\to\infty} |\tilde{D}_n(x)| \leq \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \nu |\tilde{a}_\nu|^2\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$\left(\sum_{\nu=n_0+1}^{\infty} \nu |a_\nu|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \varepsilon$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt:

$$\limsup_{n\to\infty} |D_n(x)| = 0 \sim \lim_{n\to\infty} D_n(x) = 0 \qquad \forall x \in [0,2\pi]$$

Wegen $s_n(x) = \left(s_n(x) - S_n(x)\right) + S_n(x) = D_n(x) + S_n(x)$

gilt:

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = \lim_{n\to\infty} D_n(x) + \lim_{n\to\infty} S_n(x) = 0 + g(x) \quad \text{fast überall} .$$

Damit konvergiert dei Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{inx}$ fast überall.

$\square$

Diese Konvergenzkriterien könnte man nun weiter fortsetzen, insbesondere beschäftigt sich die FOURIER-Analysis mit der Konvergenz von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{inx}$.

Das würde den Rahmen dieser Arbeit aber sprengen.Näheres wird man in allen guten FOURIER-Analysis Büchern finden.

Auf den nächsten Seiten folgen nun noch die im Laufe dieser Arbeit zitierten Anhänge.

ANHANG A

Sei Q_n die Quersumme von n. Dann gilt:

$Q_n - Q_{n-1} = 1-9A_n$

wobei A_n die Anzahl der Nullen am Ende von n ist.

Bew:

$$n = \sum_{j=s}^{s+m} n_j \, 10^j \qquad n_s \neq 0 \qquad m \in \mathbb{N} \cup \{0\} \qquad 0 \leq n_j \leq 9$$

$$\curvearrowright A_n = s \qquad \text{und} \qquad Q_n = \sum_{j=s}^{s+m} n_j$$

$$n-1 = \sum_{j=s+1}^{s+m} n_j \, 10^j + (n_s-1)\,10^s + (10^s-1)$$

$$\curvearrowright Q_{n-1} = \sum_{j=s+1}^{s+m} n_j + (n_s-1) + 9s = Q_n - 1 + 9s$$

$$\curvearrowright Q_n - Q_{n-1} = 1-9A_n$$

$\square$

ANHANG B

Es gelte $a_n b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, $a_0 := 0$

Falls dann eine der Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} b_n\,(a_n - a_{n-1})$ oder $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\,(b_n - b_{n+1})$ konvergiert, so konvergiert auch die andere und es gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n\,(a_n - a_{n-1}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\,(b_n - b_{n+1})$$

Bew:

$$\sum_{n=1}^{N} a_n\,(b_n - b_{n+1}) = \sum_{n=1}^{N} a_n b_n - \sum_{n=1}^{N} a_n b_{n+1} = \qquad (n \to n-1)$$

$$= \sum_{n=1}^{N} a_n b_n - \sum_{n=2}^{N+1} a_{n-1} b_n = a_1 b_1 + \sum_{n=2}^{N} (a_n - a_{n-1})\, b_n - a_N b_{N+1}$$

$$= \sum_{n=1}^{N} b_n\,(a_n - a_{n-1}) - a_N b_{N+1}$$

1. Fall $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \, (a_n - a_{n-1})$ konvergiert

Dann gilt: $a_N b_{N+1} = a_{N+1} b_{N+1} + (a_N b_{N+1} - a_{N+1} b_{N+1}) =$

$= a_{N+1} b_{N+1} - b_{N+1} \, (a_{N+1} - a_N) \xrightarrow[N \to \infty]{} 0$

2. Fall $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \, (b_n - b_{n+1})$ konvergiert

Dann gilt: $a_N b_{N+1} = a_N b_N + (a_N b_{N+1} - a_N b_N) =$

$= a_N b_N - a_N (b_N - b_{N+1}) \xrightarrow[N \to \infty]{} 0$

Mit Hilfe dieser beiden Fällen ergibt sich aus der obigen Darstellung der Partialsummen der einzelnen Reihen die Behauptung.

$\square$

Beispiel:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{z^{p^n}}{1-z^{p^n}} - \frac{z^{p^{n+1}}}{1-z^{p^{n+1}}} \right) \overset{!}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{p^n}}{1-z^{p^n}} \qquad |z|<1$$

Es gilt: (für $|z|<1$)

$n \dfrac{z^{p^n}}{1-z^{p^n}} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ lokal gleichmässig denn:

Sei $z \in \Delta$ mit $|z| \leq r < 1$.

Wähle n_o so gross, dass $r^{p^n} \leq 1/2 \quad \forall \, n \geq n_o$

$$\rightsquigarrow \quad 0 \leq \left| n \frac{z^{p^n}}{1-z^{p^n}} \right| \leq n \frac{r^{p^n}}{1-r^{p^n}} \leq 2n \, r^{p^n} \, , \quad n \geq n_o$$

Wegen $n \, r^{p^n} \to 0$ folgt die Behauptung.

Mit derselben Abschätzung (ohne den Vorfaktor n) sieht man auch, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \, (a_n - a_{n-1})$ mit

$b_n = \dfrac{z^{p^n}}{1-z^{p^n}} n$ und $a_n = n$ konvergiert. $\rightsquigarrow$ Beh.

ANHANG C

a) Geg: $\prod_{v=1}^{N}\left(1-\frac{z}{z_v}\right) = \sum_{n=0}^{N} R_n z^n \qquad |z_v| = 1 \qquad N \in \mathbb{N}$

Beh: $|R_n| \leq \binom{N}{n} \qquad R_n = R_n(N)$

Bew:

(vollständige Induktion nach N)

$N=1 \quad \prod_{v=1}^{1}\left(1-\frac{z}{z_v}\right) = 1-\frac{1}{z_1}\, z$

$|R_o| = 1 \leq \binom{1}{0}$

$N \to N+1 \quad \prod_{v=1}^{N+1}\left(1-\frac{z}{z_v}\right) = \left(\sum_{n=0}^{N} R_n z^n\right)\left(1-\frac{z}{z_{N+1}}\right) =$

$= R_o + \sum_{n=1}^{N}\left(R_n - \frac{R_{n-1}}{z_{N+1}}\right) z^n - R_N \frac{z^{N+1}}{z_{N+1}} = \sum_{n=0}^{N+1} \tilde{R}_n z^n$

$|\tilde{R}_o| = |R_o| = 1 \leq \binom{N+1}{0}$

$|\tilde{R}_{N+1}| = |R_N| \leq \binom{N}{N} = \binom{N+1}{N+1}$

$|\tilde{R}_n| = |R_n - R_{n-1} / z_{N+1}| \leq |R_n| + |R_{n-1}| \leq$

$\leq \binom{N}{n} + \binom{N}{n-1} = \binom{N+1}{n}$

b) Geg: $\prod_{v=1}^{N} 1/\left(1-\frac{z}{z_v}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n z^n \qquad |z_v| = 1 \qquad N \in \mathbb{N} \qquad |z| < 1$

Beh: $|s_n| \leq \binom{N+n-1}{N-1} = \left|\binom{-N}{n}\right| \qquad s_n = s_n(N)$

Bew:

(vollständige Induktion nach N)

$N=1 \quad \prod_{v=1}^{1} 1/\left(1-\frac{z}{z_v}\right) = \sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{z}{z_v}\right)^j \qquad s_n = 1 \leq \binom{n}{0}$

$N \to N+1 \prod_{v=1}^{N+1} 1/\left(1-\frac{z}{z_v}\right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} s_n z^n\right) 1/\left(1-\frac{z}{z_{N+1}}\right)$

$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{v=0}^{n} s_v\, z_{N+1}^{\;v-n}\right) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{s}_n z^n$

$|\tilde{s}_n| \leq \sum_{v=0}^{n}|s_v| \leq \sum_{v=0}^{n}\binom{N+v-1}{N-1} = \binom{N+n}{N}$

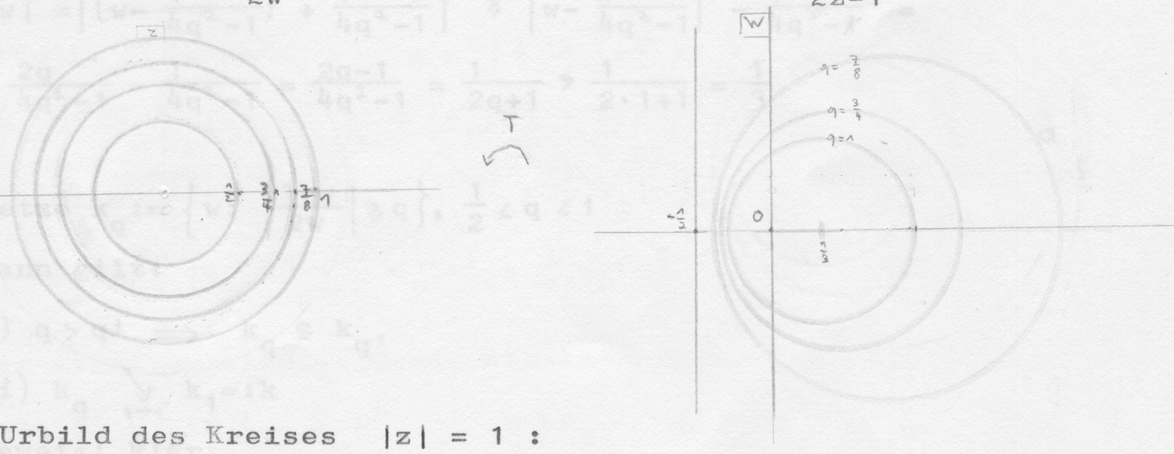
$\square$

ANHANG D

A) Eigenschaften der Möbiustransformation T definiert durch:

$$T: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \qquad\qquad T^{-1}: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$w \longmapsto \frac{1+w}{2w} =: z \qquad\qquad z \longmapsto \frac{1}{2z-1} = w$$



i) Urbild des Kreises $|z| = 1$:

$$\left|\frac{1+w}{2w}\right| = 1 \Leftrightarrow |1+w| = |2w| \Leftrightarrow |1+w|^2 = 4|w|^2 \Leftrightarrow$$

$$3|w|^2 - 2\operatorname{Re} w = 1 \Leftrightarrow |w|^2 - \frac{2}{3}\operatorname{Re} w = \frac{1}{3} \Leftrightarrow$$

$$\left|w-\frac{1}{3}\right|^2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} \Leftrightarrow \left|w-\frac{1}{3}\right| = \frac{2}{3}$$

ii) Urbild des Kreises $|z| = \frac{1}{2}$

$$\left|\frac{1+w}{2w}\right| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow |1+w| = |w| \Leftrightarrow \operatorname{Re} w = -\frac{1}{2}$$

iii) Urbilder der Kreise $|z| = q \quad \frac{1}{2} < q < 1$:

$$\left|\frac{1+w}{2w}\right| = q \qquad 1+|w|^2 + 2\operatorname{Re} w - 4q^2|w|^2 = 0$$

$$(4q^2-1)|w|^2 - 2\operatorname{Re} w = 1 \qquad |w|^2 - \frac{2}{4q^2-1}\operatorname{Re} w = \frac{1}{4q^2-1}$$

$$\left|w-\frac{1}{4q^2-1}\right|^2 = \frac{1}{4q^2-1}\left(1+\frac{1}{4q^2-1}\right) = \frac{4q^2}{(4q^2-1)^2}$$

$$\left|w-\frac{1}{4q^2-1}\right| = \frac{2q}{4q^2-1}$$

Dabei wird das Innere der z-Kreise in das Äussere der w-Kreise übergeführt durch T^{-1}.

$\ast$ Sei $\left|\frac{1+w}{2w}\right| = q$ mit $\frac{1}{2} < q < 1$

Dann gilt: $|w| > \frac{1}{3}$

Beweis: Nach dem vorherigen ist $\left|\frac{1+w}{2w}\right| = q$ äquivqlent mit $\left|w - \frac{1}{4q^2-1}\right| = \frac{2q}{4q^2-1}$.

Daraus folgt:

$$|w| = \left|\left(w - \frac{1}{4q^2-1}\right) + \frac{1}{4q^2-1}\right| \geq \left|w - \frac{1}{4q^2-1}\right| - \frac{1}{4q^2-1} =$$

$$= \frac{2q}{4q^2-1} - \frac{1}{4q^2-1} = \frac{2q-1}{4q^2-1} = \frac{1}{2q+1} > \frac{1}{2\cdot 1+1} = \frac{1}{3}$$

□

$\ast$ Setze $k_q := \left\{w : \left|\frac{1+w}{2w}\right| \geq q\right\}$, $\frac{1}{2} < q < 1$

Dann gilt:

i) $q > q' \implies k_q \subseteq k_{q'}$

ii) $k_q \underset{q\to 1}{\searrow} k_1 =: k$

Beweis: klar.

Damit ist ersichtlich, dass 4.7.2) erfüllbar ist.

B) Voraussetzung: $S_{n_k}(z) = f(z) + O(q^{n_k})$, $(k\to\infty)$, $0 < q < 1$, $z \in U$

Behauptung: $S_{n_{k+1}}(z) - S_{n_k}(z) = O(q^{n_k})$

(zur Bezeichnung siehe Text Seite 29/30)

Beweis:

$$\frac{|S_{n_{k+1}}(z) - S_{n_k}(z)|}{q^{n_k}} \leq \frac{|S_{n_{k+1}}(z) - f(z)|}{q^{n_k}} + \frac{|S_{n_k}(z) - f(z)|}{q^{n_k}} \leq$$

$$\leq \frac{|S_{n_{k+1}}(z) - f(z)|}{q^{n_{k+1}}} + \frac{|S_{n_k}(z) - f(z)|}{q^{n_k}} \leq M+M = 2M$$

(beachte: $q^{n_k} \geq q^{n_{k+1}}$ weil $q < 1$)

□

ANHANG E

Geg: $P(t) = \sum_{v=0}^{p} a_v t^v \qquad a_v \in \mathbb{C} \qquad a_p \neq 0 \qquad p \in \mathbb{N}$

Beh: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|P(n)|} = 1$

Bew:

$$|P(n)| \leq \sum_{v=0}^{p} |a_v| n^v \leq \sum_{v=0}^{p} |a_v| n^p = K\, n^p \quad \text{mit } K := \sum_{v=0}^{p} |a_v|$$

$$|P(n)| \geq |a_p| n^p - \left|\sum_{v=0}^{p-1} a_v n^v\right| \geq |a_p| n^p - \sum_{v=0}^{p-1} |a_v| n^v \geq$$

$$\geq |a_p| n^p - \sum_{v=0}^{p-1} |a_v| n^{p-1} \geq |a_p| n^p - K\, n^{p-1}$$

Wähle $n \geq \frac{2K}{|a_p|} \quad \rightsquigarrow \quad K\, n^{p-1} \leq \frac{1}{2} |a_p| n^p$

$\rightsquigarrow \; |P(n)| \geq |a_p| n^p - \frac{1}{2}|a_p| n^p = \frac{1}{2}|a_p| n^p$ für diese n.

Wir erhalten also folgende Abschätzung für $P(n)$:

$$\frac{1}{2}|a_p| n^p \leq |P(n)| \leq K\, n^p \qquad n \geq n_0$$

$$\rightsquigarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|P(n)|} = 1 \qquad \square$$

Folgerung:

Sei $(x_n)_{n\geq 0}$ eine Folge mit $x_n \nearrow \infty$, $1 \leq x_n \leq n$

Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|P(x_n)|} = 1$$

Bew:

Man ersetze im obigen Beweis n durch x_n .

ANHANG F

Beh: $\sum_{v=1}^{\infty} h(v) \dfrac{1}{1+s+s^2+\ldots+s^{p^v-1}}$ konvergiert

gleichmässig für $s \geq 1$ falls $\overline{\lim_{v\to\infty}} \sqrt[v]{|h(v)|} \leq 1$, ($p>1$, $p \in \mathbb{N}$)

Bew:

Nach dem CAUCHY-Kriterium gilt:

$$\left(\left| \sum_{v=n}^{m} h(v) \frac{s-1}{s^{p^v}-1} \right| = \right) \left| \sum_{v=n}^{m} h(v) \frac{1}{1+s+s^2+\ldots+s^{p^v-1}} \right| \leq$$

$$\leq \sum_{v=n}^{m} |h(v)| \frac{1}{1+s+s^2+\ldots+s^{p^v-1}} \leq \sum_{v=n}^{m} |h(v)| \frac{1}{p^v} \leq \varepsilon \quad \text{für } n,m \geq n_0$$

weil nach Voraussetzung $\sum_{v=1}^{\infty} |h(v)|\, p^{-v}$ konvergiert.

□

FOLGERUNG

Setze $H(s) := \sum_{v=1}^{\infty} h(v) \dfrac{1}{1+s+s^2+\ldots+s^{p^v-1}}$

Wegen der gleichmässigen Konvergenz und der Stetigkeit der einzelnen Glieder, ist auch für $s \geq 1$ H stetig $\leadsto$

$$\lim_{s\to 1^+} H(s) = H(1) = \sum_{v=1}^{\infty} h(v) \frac{1}{p^v}$$

□

ANHANG G

Beh: $\dfrac{r^v}{r^v-1} \xrightarrow[v\to\infty]{} 1$ lokal gleichmässig in $r > 1$

Bew:

Sei $r \geq r_0 > 1$, $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle v_0 so gross, dass $1/(r_0^{v_0} - 1) \leq \varepsilon$ (möglich da $1/(r_0^{v}-1) \xrightarrow[v\to\infty]{} 0$) $\leadsto$

$$\left| \frac{r^v}{r^v-1} - 1 \right| = 1/(r^v-1) \leq 1/(r_0^{v}-1) \leq 1/(r_0^{v_0}-1) \leq \varepsilon \text{ für } v \geq v_0.$$

□

ANHANG H

Geg: $g(w) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left\{ \sum_{v=0}^{n_k} \binom{n_k}{v} a^{n_k - v} b^v w^{v+pn_k} \right\} =: \sum_{j=0}^{\infty} b_j w^j$

mit

$$b_j = \begin{cases} \sum_{v=0}^{n_k} a_k \binom{n_k}{v} a^{n_k - v} b^{v+pn_k} & \text{falls} \quad j = v + pn_k \quad 0 \leq v \leq n_k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

wobei

$n_k + pn_k < pn_{k+1}$ mit $p \in N$

und

$a+b = 1$, $0 < a < 1$

Vor: $\overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[n_k]{|a_k|} = 1$

Beh: $\sum_{j=0}^{\infty} b_j w^j$ konvergiert für $|w| < 1$

Bew:

Sei $N \leq M$ beliebig.

Wähle n_{k_1} so dass $pn_{k_1} \leq N < pn_{k_1+1}$

n_{k_2} so dass $n_{k_2-1} + pn_{k_2-1} < M \leq n_{k_2} + pn_{k_2}$

wobei $k_2 \geq k_1$, Gleichheit möglich!

$$\sim \left| \sum_{j=N}^{M} b_j w^j \right| \leq \sum_{j=N}^{M} |b_j| |w|^j \leq \sum_{j=pn_{k_1}}^{n_{k_2}+pn_{k_2}} |b_j| |w|^j =$$

$$= \sum_{k=k_1}^{k_2} |a_k| \sum_{v=0}^{n_k} \binom{n_k}{v} a^{n_k - v} b^v |w|^{v+pn_k} \leq \varepsilon \text{ für } k_1 \geq k_0$$

und $N \geq pn_{k_1} \geq pn_{k_0}$ sowie $|w| < 1$

denn:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \sum_{v=0}^{n_k} \binom{n_k}{v} a^{n_k - v} b^v |w|^{v+pn_k} = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| |w|^{pn_k} (a + b|w|)^{n_k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \left(a|w|^p + b|w|^{p+1} \right)^{n_k} := \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| z^{n_k} \quad \text{mit} \quad z = a|w|^p + b|w|^{p+1}$$

Es gilt $z < a+b = 1$, $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| z^{n_k}$ konvergent $\sim$ Beh.

□

ANHANG I

Gegeben sei die Menge $L_2(E)$ der quadratisch LEBESGUE-integrierbaren Funktionen auf E.

Weiter sei $N := \{ f \in L_2(E) : f=0$ fü $\}$

Definiere weiter die Funktionen $\|f\|_1$ und $\|\tilde{f}\|_2$ durch:

$$\|f\|_1 : L_2(E) \longrightarrow R \qquad\qquad \|\tilde{f}\|_2 : L_2(E)/_N \longrightarrow R$$

$$f \longmapsto \frac{1}{2\pi} \int_E |f(t)|^2 \, dt \qquad\qquad \tilde{f} \longmapsto \|f\|_1 , \; f \in \tilde{f}$$

Beh: i) $\|f\|_1$ ist eine Halbnorm auf $L_2(E)$

ii) $\|\tilde{f}\|_2$ ist eine Norm auf der Restklassenmenge $L_2(E)/_N$

Der Einfachheit wegen habe ich nun in §5 folgende Formulierung der Aussage ii) gegeben:

$$\|f\| = \frac{1}{2\pi} \int_E |f(t)|^2 \, dt$$

ist eine Norm auf $L_2(E)$ mit der Konvention $f = g$ genau dann wenn $f = g$ fast überall.

Die Beweise der Aussagen i) und ii) sind einfach und seien dem Leser überlassen.

(Man beachte, dass die Funktion $\|\tilde{f}\|_2$ wohldefiniert ist) .

ANHANG J

Geg: $r_n(t)$ RADEMACHER-Funktion

Beh: $$\int_0^1 r_{n_1}^{v_1}(t) \ldots r_{n_m}^{v_m}(t)\, dt = \begin{cases} 1 & \text{falls alle } v_j \text{ gerade} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Bew:

1.Fall v_j gerade $1 \leq j \leq m$

$r_n^{v_j}(t) \equiv 1 \quad \sim$ Beh .

2.Fall $\exists\; v_{j_0}$, $1 \leq j_0 \leq m$ mit v_{j_0} ungerade.

OBdA können wir uns auf die Berechnung des Integrals $I = \int_0^1 r_{n_1}(t) \ldots r_{n_k}(t)\, dt$

$1 \leq n_1 < n_2 < \ldots < n_k$ beschränken.

Die Behauptung zeigen wir nun durch vollständige Induktion nach k.

k=1 $$\int_0^1 r_{n_1}(t)\, dt = \int_0^1 \sum_{j=0}^{2^{n_1-1}-1} \{1_{A_j}(t) - 1_{B_j}(t)\}\, dt$$

wobei $A_j = \left[\frac{2j}{2^{n_1}}, \frac{2j+1}{2^{n_1}}\right)$ $\quad B_j = \left[\frac{2j+1}{2^{n_1}}, \frac{2(j+1)}{2^{n_1}}\right)$

und $1_Z(t) = \begin{cases} 1 & \text{falls } t \in Z \\ 0 & \text{falls } t \notin Z \end{cases} \qquad Z \subseteq \mathbb{R}$

die Indikatorfunktion ist.

$$\sim \int_0^1 r_{n_1}(t)\, dt = \sum_{j=0}^{2^{n_1-1}-1} \left\{ \int_0^1 1_{A_j}(t)\, dt - \int_0^1 1_{B_j}(t)\, dt \right\} =$$

$$\sum_{j=0}^{2^{n_1-1}-1} \{1/2^{n_1} - 1/2^{n_1}\} = 0$$

k→k+1 $$\int_0^1 r_{n_1}(t) \ldots r_{n_k}(t)\, r_{n_{k+1}}(t)\, dt = \int_0^1 R(t)\, r_{n_{k+1}}(t)\, dt$$

wobei $R(t) := r_{n_1}(t) \ldots r_{n_k}(t)$

Setze $A_j = \left[\frac{2j}{2^{n_{k+1}}}, \frac{2j+1}{2^{n_{k+1}}}\right)$ $\qquad B_j = \left[\frac{2j+1}{2^{n_{k+1}}}, \frac{2j+2}{2^{n_{k+1}}}\right)$

$L := 2^{n_{k+1}-1} - 1$

Damit gilt:

$$\int_0^1 R(t)\, r_{n_{k+1}}(t)\, dt = \int_0^1 R(t) \sum_{j=0}^{L} \{1_{A_j}(t) - 1_{B_j}(t)\}\, dt =$$

$$= \sum_{j=0}^{L} \left\{ \int_0^1 R(t)\, 1_{A_j}(t)\, dt - \int_0^1 R(t)\, 1_{B_j}(t)\, dt \right\} =$$

$$= \int_{\sum_{j=0}^{L} A_j} R(t)\, dt - \int_{\sum_{j=0}^{L} B_j} R(t)\, dt \overset{!}{=} 0 - 0$$

wobei $\sum_{j=0}^{L} A_j$ disjunkte Vereinigung der A_j ist.

Dass das Integral $\int_{\sum A_j} R(t)\, dt$ tatsächlich Null wird, zeigt nun folgende Überlegung:

Es gilt: $R(t) = \text{const.} =: c_i$ auf $\left[\frac{i}{2^{n_k}}, \frac{i+1}{2^{n_k}}\right) =: I_i$

$(\ c_i = 0,1\ )$

Weiter: $\sum_{i=0}^{I} I_i = [0,1)$ $\qquad$ Setze noch $I := 2^{n_k} - 1$

Jedes solches Intervall I_i lässt sich nun in $(2^{n_{k+1}} - n_k)\,\frac{1}{2}$ Intervalle der Form A_j einteilen mit $\lambda\left(\sum_{j=0}^{L} A_j \cap I_i\right) = \frac{1}{2}\,\lambda(I_i)$

$$\curvearrowright \int_{\sum_{j=0}^{L} A_j} R(t)\, dt = \int_{\sum_{i=0}^{I}\sum_{j=0}^{L}(A_j \cap I_i)} c_i\, dt = \sum_{i=0}^{I} c_i \cdot \lambda\left(\sum_{j=0}^{L} A_j \cap I_i\right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{I} c_i\, \frac{1}{2}\, \lambda(I_i) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{I} \int_{I_i} c_i\, dt = \frac{1}{2} \int_0^1 R(t)\, dt = 0.$$

Analoger Beweis fürs zweite Integral liefert schliesslich die Behauptung.

$\square$

ANHANG K

* Gegeben sei die Funktionenfamilie $\tilde{g}_r(t) = 1/(1-re^{it})$ für $t \in [-\pi,-t_o] \cup [t_o,\pi]$ und $r_1 \leq r \leq 1$, $r_1 > 0$

Behauptung:

Es gibt ein C mit $|\tilde{g}_r(t)| \leq C$ für $t \in [-\pi,-t_o] \cup [t_o,\pi]$ und alle r mit $r_1 \leq r \leq 1$

Beweis:

$$|\tilde{g}_r(t)|^2 = |1/1-re^{it}|^2 = 1/\{(1-r\cos t)^2+(r\sin t)^2\} =$$

$$1/(1+r^2-2r\cos t) \leq 1/(2r-2r\cos t) = 1/2r(1-\cos t) =$$

$$= 1/4r\sin^2 t/2 \leq 1/4r_1 \sin^2 t_o/2$$

Setze $C := 1/2\sqrt{r_1}\sin t_o/2$ $\rightsquigarrow$ Behauptung.

* Eine analoge Aussage erhalten wir für die Funktionen= familie $\tilde{g}_r'(t) = ire^{it}/(1-re^{it})^2$, t,r wie oben.

Beweis:

$$|\tilde{g}_r'(t)| = r/|1-re^{it}|^2 \leq r/4r\sin^2 t/2 \leq 1/\sin^2 t/2 \leq$$

$$1/\sin^2 t_o/2.$$

Setze $C := 1/\sin^2 t_o/2$ $\rightsquigarrow$ Behauptung.

* Mit dem Ansatz $P_r(t) = \sum_{j=0}^{3} c_j(r)\, e^{ijt}$ kann man nun die Funktionen $\tilde{g}_r(t)$ und $\tilde{g}_r'(t)$ von $[-\pi,-t_o] \cup [t_o,\pi]$ auf $[-\pi,\pi]$ stetig fortsetzen.

Man hat nur die linearen Gleichungssysteme $Ac_r = g_r$

mit $c_r = (c_o(r),\ldots,c_3(r))$,

$$g_r = (g_r(t_o), g_r(-t_o), g_r'(t_o), g_r'(-t_o))$$

sowie der entsprechenden Matrix A zu lösen.

Wegen der Beschränktheit der g_r sind auch die c_r beschränkt (in r , Z.B. bezüglich der Betragssummennorm für Vektoren)

Daraus ergibt sich nun leicht, dass die Funktionen

$$g_r(t) = \begin{cases} \tilde{g}_r(t) & \text{für } t \in [-\pi, -t_o] \cup [t_o, \pi] \\ P_r(t) & \text{für } t \in [-t_o, t_o] \end{cases}$$

auf $[-\pi, \pi]$ gleichmässig in r $(r_1 \leq r \leq 1)$ beschränkt sind.

Das gleiche gilt natürlich auch für die Ableitung $g_r'(t)$.

Durch die Festlegung $g_r''(\pm t_o) := 0$ hat man auch die 2. Ableitung von $g_r(t)$ auf $[-\pi, \pi]$ erklärt, indem man sie für die anderen Punkte aus $\tilde{g}_r(t)$ und $P_r(t)$ berechnet.

Wegen der gleichmässigen Beschränktheit dieser zweiten Ableitungen (leicht nachzuprüfen) ist auch $g_r''(t)$ auf $[-\pi, \pi]$ gleichmässig in r beschränkt.

Aus alledem folgt nun, dass die Wahl der Funktionen $g_r(t)$ aus dem Satz 6.2 tatsächlich möglich ist.

ANHANG L

1.Beh: $H_n = [\log n] / \log(n + [\log n]) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

2.Beh: $\tilde{H}_n = (n + [\log n])^2 / 2n^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1/2$

Bew:

Für $n \geq 9$ gilt: $(\log n - 1)/\log(n + \log n) \leq H_n \leq \log n/\log n = 1$

Weiter: $\log n/\log(n+\log n) = 1/(1+\log(1+\log n/n)/\log n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

$\tilde{H}_n = 1/2 + [\log n]/n + [\log n]^2/n^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1/2$

Daraus folgen schliesslich die Behauptungen.

□

ANHANG M

Theorem von LEBESGUE

Geg: i) $g \in L_1(E)$, $g(t) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(n)\, e^{int}$ wobei

$\hat{g}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_E g(t) e^{-int}\, dt$ die FOURIER-Koeffizienten von $g(t)$ sind

ii) $s_N(t) = \sum_{-N}^{N} \hat{g}(n)\, e^{int}$

$S_N(t) = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} s_n(t)$

Beh: $S_N(t) \xrightarrow[N\to\infty]{} g(t)$ fast überall auf E

Beweisskizze: (siehe auch [8])

A) Es gilt:

$$S_N(t) =: S_N(f)\,(t) = (K_N * f)(t) =: \int_E K_N(\tau)\, f(t-\tau)\, d\tau$$

wobei $K_N(t)$ der FEJER-kern ist, also:

$$K_N(t) = \frac{1}{N+1} \left(\sin \frac{N+1}{2} t \,/\, \sin \frac{t}{2} \right)^2 = \sum_{j=-N}^{N} \left(1 - \frac{|j|}{N+1}\right) e^{ijt}$$

$K_N(t)$ hat nun folgende Eigenschaft:

$K_N(t) < N+1$ für $0 < t < 1/N$

$K_N(t) \leq \frac{T}{N+1}\, t^{-2}$ für $1/N < t < \pi$, $T > 0$.

B) Setze $\Phi_x(t) = \left| \frac{1}{2} \left(f(x+t) + f(x-t) - 2f(x) \right) \right|$

Für fast alle $x \in E$ gilt nun:

$$\int_0^h \Phi_x(t)\, dt = o(h) \quad \text{für } h \to 0$$

(solche Punkte x heissen LEBESGUE-Punkte)

C) Wir erhalten schliesslich:

$$S_n(f)(x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \Phi_x(t)\, K_n(t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{1/n} \Phi_x(t)\, K_n(t)\, dt + \frac{1}{\pi} \int_{1/n}^{\pi} \Phi_x(t)\, K_n(t)\, dt \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 + 0 \quad \text{fü.}$$

□

LITERATURLISTE

Lehrbücher

9 ASH — Complex Variables
Aca. Press 1971

0 BIEBERBACH — Analytische Fortsetzung
Springer 1955

1 CARATHEODORY — Funktionentheorie 1,2
Birkhäuser 1950

2 COPSON — Theory of functions of a complex variable
Oxford 1963

3 DINGHAS — Vorlesungen über Funktionentheorie
Springer 1961

4 LANDAU — Neuere Ergebnisse der Funktionentheorie
Springer 1929

10 ILIEFF — Analytische Nichtfortsetzbarkeit
VEB DVW Berlin 1960

5 NEVANLINNA — Einführung in die Funktionentheorie
Birkhäuser 1965

6 SAKS-ZYGMUND — Analytic Functions
Warschau 1965

7 TITCHMARSH — Theory of functions
Oxford 1939

8 ZYGMUND — Trigonometric series
Cambridge 1959

Zeitschriften

1 CANTOR D. — Irrational power series
Indag. Math. 68 1965 (777-786)

15 CARLESON L. — On convergence of FOURIER series
Acta Mathematica 116 1966 (135-157)

2 GAIER D; — Bemerkungen zum TURAN schen Lemma
Abh. Math. Sem. Hamburg 35 19 (1-7)

3 KING — Tests for singular points
AMM 72 1965 (870-873)

4. KNOPP — LAMBERT-Reihen
Journal für Math. 142 1913 (283-315)

5 ERDOS P. — Converse of FABRYs Gap-Theorem
Transact. of the AMS 57 1945 (102-104)

6 HAUSDORFF F. — Zur Verteilung der fortsetzbaren Reihen
Math. Zeitschrift 14 1919 (100-103)

14 MORDELL — On Power Series
Journal Lond. Math. Soc. 2 1927 (146-148)

7 POLYA — i) Über die Potenzreihen deren Konvergenz=kreis natürliche Grenze ist
Acta Mathematica 41 1918 (99-118)
ii) Converse Gap Theorems
Transact. of the AMS 52 1942 (65-71)

8 SCHWARZ W. WALLISSER R. — Uber gewisse nichtfortsetzbare Potenzreihen
Monatshefte für Math. 77 1973 (63-66)(251-266)

9 SZEGO — Nichtfortsetzbare Potenzreihen
Math. Annalen 87 1922 (90-111)

13 WALFISC — Converse of FABRYs Gap Theorem
Soobsc. Akad. Nauk Gruzin SSR 8 1947 (197-204)
(Reviews 12 (668))

10 WALLISSER R. — Einige Sätze über nichtfortsetzbare Potenzreihe
Math. Zeitschrift 113 1970 (61-67)

11 WIENER — The Spectrum of an Array
Journal Math. Phys. 6 1926/27 (145-157)

12 YOUNG W. — On restricted FOURIER series
Proc. Lond. Math. Soc. 17 1918 (353-366)