Calcul intégral

1. Intégrale de Riemann dans $\mathbb{R}$

Soient $a < b$, $f : [a,b] \to [0,\infty[$ bornée,
$G(f) = \{(x, f(x)) : a \leq x \leq b\}$ est le graphe de f.

$$E(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$$

$I(f) = \int_a^b f(x)dx$ =l'aire de $E(f)$.

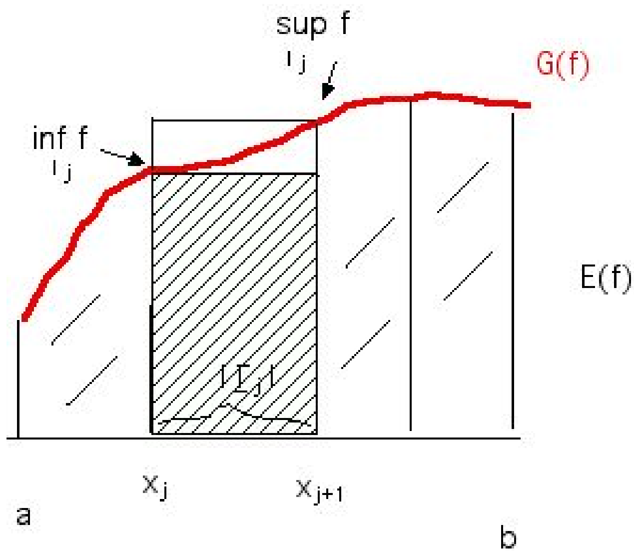

FIGURE 1. Interprétation géométrique de l'intégrale

Si $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ alors $Z = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ est une subdivison de $[a,b]$.
Soit $I_j = [x_j, x_{j+1}]$ et $|I_j| = x_{j+1} - x_j$ la longueur de I_j.
Somme de Darboux inférieure: $s_f(Z) = \sum_{j=1}^n |I_j| \inf_{I_j} f$
Somme de Darboux supérieure: $S_f(Z) = \sum_{j=1}^n |I_j| \sup_{I_j} f$
L'oscillation de f sur I_j est: $oscf_{I_j} = \sup_{I_j} f - \inf_{I_j} f$.
On veut: $s_f(Z) \sim I(f)$ et $S_f(Z) \sim I(f)$.

Definition 1.1. — *f intégrable (au sens de Riemann), noté par $f \in R[a,b]$, si*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists Z = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} : \quad |s_f(Z) - S_f(Z)| < \varepsilon$$

On a alors que

$$\sup_Z s_f(Z) = \inf_Z S_f(Z)$$

et la valeur commune $I(f)$ est appellée intégrale de Riemann de f.

2. Mesure de Jordan, ensembles négligeables

Définition Soient $a_j < b_j, 1 \leq j \leq n$. Alors $I = \prod_{j=1}^n [a_j, b_j] = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_j \leq x_j \leq b_j\}$ s'appelle <u>intervalle</u> ou <u>pavé</u> dans $\mathbb{R}^n$.

(Pour $n = 2$ on a donc des rectangles dont les côtés sont parallèles aux axes des coordonnées, et pour $n = 3$ on a des pavés dont les faces sont parallèles aux plans $x = 0$, $y = 0$ et $z = 0$ resp.)

Si I_1 et I_2 sont deux paveś et si $I_1^\circ \cap I_2 \neq \emptyset$, alors $I_1 \cap I_2$ est un pavé.

On définit le volume d'un pavé $I = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$ dans $\mathbb{R}^n$ par $|I| = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$.

• Si I, I_j sont des pavés avec $I \subseteq \bigcup_{j=1}^\infty I_j$, alors $|I| \leq \sum_{j=1}^\infty |I_j| \in]0, \infty]$.

Soit $k \in \mathbb{N}$ et $\mathcal{Q}_k$ le pavage dyadique d'ordre k de $\mathbb{R}^n$, i.e. $\mathcal{Q}_k$ est l'ensemble des pavés(=cubes) de la forme $Q = \{x = (x_1, \cdots, x_n) : \frac{q_i}{2^k} \leq x_i \leq \frac{q_i+1}{2^k}, q_i \in \mathbb{Z}\}$

Soit $A \subseteq \mathbb{R}^n$ bornée. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, soit M_k le nombre des pavés $Q \in \mathcal{Q}_k$ qui coupent A (i.e. ont un point commun avec A) et soit m_k le nombre des pavés dans $\mathcal{Q}_k$ qui sont entièrement inclus dans A. Le volume d'un pavé de $\mathcal{Q}_k$ est $\left(\frac{1}{2^k}\right)^n$ (dans $\mathbb{R}^n$). Donc $\frac{M_k}{2^{kn}}$ et $\frac{m_k}{2^{kn}}$ donnent une approximation du volume $Vol(A)$ de A:

$$\frac{m_k}{2^{kn}} \leq Vol(A) \leq \frac{M_k}{2^{kn}}$$

On voit que $\frac{M_k}{2^{kn}}$ est une suite décroissante si $k \nearrow$ et que $\frac{m_k}{2^{kn}}$ est croissante si $k \nearrow$. Comme A est bornée, ces suites sont bornées; d'où les limites existent.

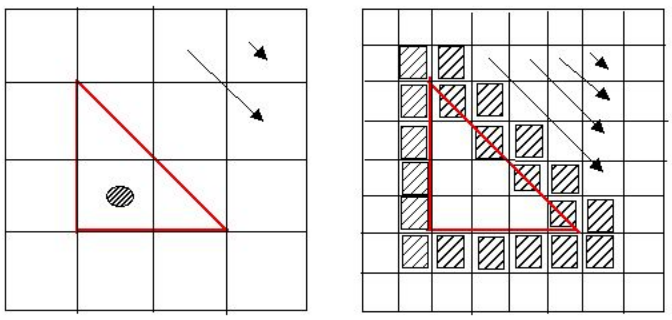

FIGURE 2. $m_1 = 1, M_1 = 13$ $\qquad$ $m_2 = 6, M_2 = 26$

Définition On dit que l'ensemble borné $A \subseteq \mathbb{R}^n$ est <u>mesurable au sens de Jordan</u> (ou <u>quarrable</u>) si ces deux limites coïncident; i.e. si $\lim_{k\to\infty} \frac{m_k}{2^{kn}} = \lim_{k\to\infty} \frac{M_k}{2^{kn}}$. La valeur commune est appellée <u>mesure ou volume</u> de A, notée par mes$A$. Pour $n = 2$ on parle aussi de l'aire de A.

• Si I est un pavé, alors $|I| =$mes$I$.

Exemple L'aire du triangle des sommets $(0, 0), (1, 0)$ et $(0, 1)$ est $1/2$

$$m_k = \frac{(2^k)^2 - \overbrace{2^k}^{(*)}}{2}, \qquad M_k = (2^k+2)^2 - (1+2+3+\cdots+2^k)$$
(où $(*)$ est le nombre de carrés coupant la diagonale)
Alors $m_k/(2^k)^2 \to 1/2$ et $M_k/(2^k)^2 \to 1/2$.

Propriétés Soient A et B deux ensembles mesurables dans $\mathbb{R}^n$. Alors
(1) $\mathrm{mes}A \geq 0$,
(2) $A \subseteq B \Longrightarrow \mathrm{mes}\,A \leq \mathrm{mes}\,B$,
(3) $A\cap B$ et $A\cup B$ mesurables et $\mathrm{mes}\,(A\cup B) = \mathrm{mes}\,A + \mathrm{mes}\,B - \mathrm{mes}\,(A\cap B)$.
(4) Le translaté de A a la même mesure que A,
(5) Si f est une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, alors $\mathrm{mes}\,f(A) = |\det f|\mathrm{mes}\,A$;

en particulier, la mesure est invariante pour les transformations orthogonales (parce que celles-la ont le déterminant ± 1.)

ex. • Les intervalles $A = [a,b]$, $]a,b]$, $]a,b[$ et $[a,b[$ sont mesurables et $\mathrm{mes}\,A = b-a$.
• $A = \mathbb{Q} \cap\ [0,1]$ n'est pas mesurable au sens de Jordan. En effet, les éléments du pavage $\mathcal{Q}_k$ de $\mathbb{R}^1$ qui coupent A ont la forme $I_{k,n} = [\frac{n}{2^k}, \frac{n+1}{2^k}], 0 \leq n \leq 2^k - 1$; donc $M_k = 2^k$. D'autre part, comme chaque intervalle contient un nombre irrationnel, aucun des éléments du pavage $\mathcal{Q}_k$ n'est inclus dans A, donc $m_k = 0$. Conclusion: $\frac{M_k}{2^k} = 1\ \forall k$ et $\frac{m_k}{2^k} = 0\ \forall k$.

• Chaque singleton $\{x\}$ dans $\mathbb{R}^n$ est mesurable et $\mathrm{mes}\,\{x\} = 0$.

Proposition 2.1. — *Supposons que $E \subseteq \mathbb{R}^n$ soit mesurable au sens de Jordan et que $\underline{\mathrm{mes}\,E = 0}$. Alors chaque partie $F \subseteq E$ est mesurable et* $\mathrm{mes}\,F = 0$.

Notons que si mes $E = 0$, alors $\forall k : m_k = 0$.

Definition 2.1. — *Un ensemble $N \subseteq \mathbb{R}^n$ est dit* **négligeable dans** $\mathbb{R}^n$ *(notation: $|N| = 0$) s'il peut être recouvert par des pavés (ou boules) I_n, $(n = 1, 2, \dots)$, tel que la somme des volumes des pavés (boules) est aussi petit qu'on veut; i.e.*
$|N| = 0 \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0\, \exists$ *pavés* I_j, $N \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$ *et* $\sum_{j=1}^{\infty} |I_j| \leq \varepsilon$.
On dit aussi que N a la mesure 0 au sens de **Lebesgue**.

• $\mathbb{Q}$ est négligeable dans $\mathbb{R}$. En effet, $\mathbb{Q} = \{r_n : n \in \mathbb{N}\}$, où $\{r_n : n \in \mathbb{N}\}$ est une énumération de $\mathbb{Q}$ (bijection de $\mathbb{Q}$ sur $\mathbb{N}$). Posons $I_n = [r_n - \frac{\varepsilon}{2^n}, r_n + \frac{\varepsilon}{2^n}]$, $|I_n| = \frac{2\varepsilon}{2^n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| = 2\varepsilon$, $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = 2\varepsilon$, $\mathbb{Q} \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$.

De même pour $A = \mathbb{Q} \cap [0,1]$. Donc l'ensemble A est négligeable sans qu'il soit mesurable au sens de Jordan.

Proposition 2.2. —
i) Chaque partie P d'un ensemble négligeable N est négligeable.
ii) La réunion dénombrable $\bigcup_{j=1}^{\infty} N_j$ d'ensembles négligeables N_j est négligeable.
iii) Les pavés de $\mathbb{R}^n$ ne sont pas négligeables dans $\mathbb{R}^n$.

Preuve. — i) $P \subseteq N \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$, $\sum_{j=1}^{\infty} |I_j| < \varepsilon$.
ii) $N_j \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_{k,j}$, $\sum_{k=1}^{\infty} |I_{k,j}| \leq \varepsilon 2^{-j}$, $j \in \mathbb{N} \Longrightarrow \bigcup N_j \subseteq \bigcup_j \bigcup_k I_{k,j}$ et

$$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} |I_{k,j}| \leq \sum_{j=1}^{\infty}(\varepsilon 2^{-j}) = \varepsilon.$$

iii) $I \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$. Ainsi $0 < |I| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |I_j| < \varepsilon := |I|/2$. Une contradiction.

Proposition 2.3. — *Soit $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un ensemble mesurable au sens de Jordan. Alors mes $E = 0 \Longleftrightarrow E$ est négligeable.*

ex. • $E = \{(t,t) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq t \leq 1\}$. Alors E est un ensemble de mesure nulle, car, soit $I_j = [\frac{j}{2^k}, \frac{j+1}{2^k}] \times [\frac{j}{2^k}, \frac{j+1}{2^k}],$, $0 \leq j \leq 2^k - 1$. Alors $E \subseteq \bigcup I_j$ et $\sum |I_j| = 2^k \left(\frac{1}{2^k}\right)^2 \to 0$ si $k \to \infty$.

ex. • Le cercle unité $E = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\}$ a la mesure nulle dans $\mathbb{R}^2$. En effet, soit $\alpha_j = \exp(2\pi i \frac{j}{2^k})$. Alors $E \subseteq \bigcup_{0 \leq j \leq 2^k} B(\alpha_j; \frac{4}{2^k})$ et $\sum_{j=0}^{2^k} \text{mes}\left(B(\alpha_j; \frac{4}{2^k})\right) \leq (2^k + 1)\left(\frac{8}{2^k}\right)^2 \to 0$ si $k \to \infty$.

ex. • $H = \{(q,0) \in \mathbb{R}^2 : q \in \mathbb{Q}, 0 \leq q \leq 1\}$. Alors H est mesurable et mes $H = 0$. En effet
$H \subseteq \bigcup_{0 \leq j \leq 2^k - 1}\left([\frac{j}{2^k}, \frac{j+1}{2^k}] \times [0, \frac{1}{2^k}]\right)$, $M_k = 2^k, m_k = 0$. Mais $\frac{M_k}{(2^k)^2} = \frac{1}{2^k} \to 0$ si $k \to 0$.

Théorème 2.4. — *Soit $E \subseteq \mathbb{R}^n$ borné. Alors E est mesurable au sens de Jordan si et seulement si sa frontière ∂E est négligeable.*

• $E = \mathbb{Q} \cap [0,1]$ n'est pas mesurable, parce que $\partial E = [0,1]$ et $[0,1]$ n'est pas négligeable.

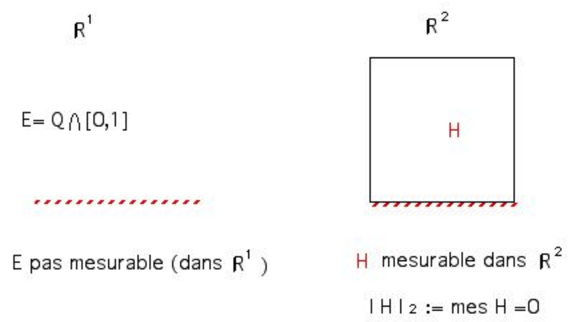

Figure 3. $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}$

• Soit $P = \{(x_1, \ldots, x_n, 0) : x_j \in \mathbb{R}\}$ un hyper-plan dans $\mathbb{R}^{n+1}$. Alors P est négligeable et chaque partie bornée A de P est mesurable de mesure de Jordan 0 dans $\mathbb{R}^{n+1}$ (notons que $\partial A \subseteq P$).

• Le disque $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ est mesurable parce que $\partial D = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$ est mesurable et a la mesure nulle (voir ci dessus)

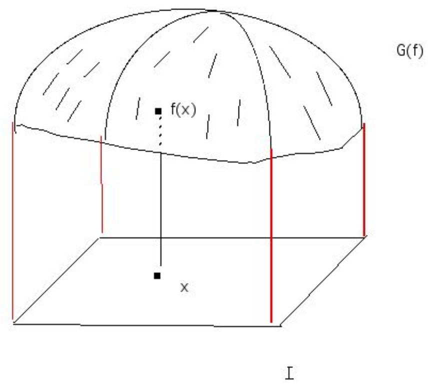

FIGURE 4. $G(f)$ et $E(f)$

Proposition 2.5. — *Soit f une fonction continue sur un pavé I dans $\mathbb{R}^n$. Supposons que $f \geq 0$. Alors le graphe de f, donné par*

$$G(f) = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in I\}$$

est mesurable et a la mesure nulle (dans $\mathbb{R}^{n+1}$). En plus, l'ensemble

$$E(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : \ x \in I, \ 0 \leq y \leq f(x)\}$$

est mesurable.

Comment calculer la mesure d'un ensemble?

3. Fonctions intégrables et intégrales multiples

Soient $f, g \in C([a, b])$ et $g(x) \leq f(x) \, \forall x \in [a, b]$ et

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in I, g(x) \leq y \leq f(x)\}.$$

Alors A est mesurable et mes $A = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx =$
$= \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)dx = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{f(x)} 1 \; dy\right)dx =: \iint_A d(x, y)$ (intégrale double).

Définition Soit A un ensemble borné dans $\mathbb{R}^n$ et I un pavé tel que $A \subseteq I \subseteq \mathbb{R}^n$. Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles définie et bornée sur A. Considérons l'extension de f sur $\mathbb{R}^n$ (notée aussi par f) définie par $f(x) = 0$ si $x \in \mathbb{R}^n \setminus A$. Soient $C_k^{(i)}$ les pavés du pavage dyadique de $\mathbb{R}^n$ d'ordre k. Notons que $|C_k^{(i)}| = \left(\frac{1}{2^k}\right)^n$. Soient

$$s_k(f) = \sum_i |C_k^{(i)}| \inf_{C_k^{(i)}} f$$

et

$$S_k(f) = \sum_i |C_k^{(i)}| \sup_{C_k^{(i)}} f,$$

les sommes de Darboux, où $\inf_{C_k^{(i)}} f$ est la plus grande borne inférieure de f sur $C_k^{(i)}$ et $\sup_{C_k^{(i)}} f$ la plus petite borne supérieure de f sur $C_k^{(i)}$. $S_k(f)$ et $s_k(f)$ sont des sommes finies. Notons que

$$(\text{mes}\, I) \cdot \inf f \leq s_k(f) \leq S_k(f) \leq (\text{mes}\, I) \cdot \sup f.$$

En plus $(S_k(f))$ est une suite décroissante, et $(s_k(f))$ une suite croissante. Donc les limites $s(f) = \lim_{k\to\infty} s_k(f)$ et $S(f) = \lim_{k\to\infty} S_k(f)$ existent. Si $s(f) = S(f)$, alors on dit que f est <u>intégrable</u> au sens de Riemann sur A, ($f \in R(A)$) et on note
$s(f) = \int_A f(x)dx$ resp. $s(f) = \int_A f(x_1, \cdots, x_n)d(x_1, \cdots, x_n)$.

Considérons l'extension f_I de f définie sur I par $f_I(x) = 0$ si $x \in I \setminus A$ et $f_I(x) = f(x)$ si $x \in A$. Alors on voit que $f_I \in R(I) \iff f \in R(A)$ et que $\int_A f(x)dx = \int_I f_I(x)dx$.

Pour $A \subseteq \mathbb{R}^n$ on note la fonction caractéristique de A par 1_A; i.e. $1_A(x) = 1 \iff x \in A$ et $1_A(x) = 0 \iff x \in \mathbb{R}^n \setminus A$.

Théorème 3.1. — *Soit $A \subseteq \mathbb{R}^n$ borné. Alors A est mesurable au sens de Jordan $\iff 1_A \in R(A)$. Dans ce cas $\int_A 1dx = \text{mes}\, A$.*

Théorème 3.2. — *Soit $A \subseteq \mathbb{R}^n$ borné et $f : A \to R$ une fonction bornée. Alors*

$f \in R(A) \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists k : |S_k(f) - s_k(f)| < \varepsilon.$

Théorème 3.3. — *Soit $A \subseteq \mathbb{R}^n$ <u>mesurable</u>. Alors chaque fonction continue et bornée sur A est intégrable. En particulier, on a que chaque fonction continue sur un pavé est intégrable.*

Mais Attention Dans le cas où A n'est pas mesurable, il existe un tas de fonctions continues et bornées sur A qui ne sont pas intégrables; p.ex. chaque fonction constante non nulle n'est pas dans $R(A)$.

***Proposition 3.4* (Propriétés)**. — *Soit $A \subseteq \mathbb{R}^n$ mesurable. Alors on a:*

(1) Si $\text{mes}A = 0$, alors $\int_A f dx = 0\ \forall f$ bornée sur A.

(2) $\inf\limits_{x\in A} f(x)\, \text{mes}A \leq \displaystyle\int_A f(x)dx \leq \sup\limits_{x\in A} f(x)\, \text{mes}A$, si f est intégrable sur A.

(3) $f, g \in R(A), f \leq g \Longrightarrow \int_A f(x)dx \leq \int_A g(x)dx$.

(4) $f, g \in R(A), \lambda, \mu \in \mathbb{R} \Longrightarrow \lambda f + \mu g \in R(A)$ et
$\int_A (\lambda f(x) + \mu g(x))\, dx = \lambda \int_A f(x)dx + \mu \int_A g(x)dx$.

(5) Soient $A \subseteq \mathbb{R}^n$ et $B \subseteq \mathbb{R}^n$ mesurables avec $A \cap B = \emptyset$ et $f : A \cup B \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. Alors $f \in R(A \cup B) \iff f \in R(A)$ et $f \in R(B)$ et

$$\int_{A\cup B} f\,dx = \int_A f\,dx + \int_B f\,dx.$$

(6) $I \subseteq \mathbb{R}^n$ pavé, $f : I \to R$, $m \le f \le M$, $\Phi : [m, M] \to \mathbb{R}$ Lipschitz (i.e. $\exists L > 0, \forall s, t \in [m, M] : \ |\Phi(s) - \Phi(t)| \le L|s-t|$). Alors

$$f \in R(I) \Longrightarrow \Phi \circ f \in R(I).$$

(7) $f, g \in R(A) \Longrightarrow f \cdot g \in R(A)$ et si $|g| \ge \delta > 0$ sur A, alors $f/g \in R(A)$.

(8) $f, g \in R(A) \Longrightarrow \max\{f, g\}$ et $\min\{f, g\} \in R(A)$.

(9) $f \in R(A) \Longrightarrow |f| \in R(A)$ et $|\int_A f dx| \le \int_A |f| dx$.

(10) I pavé, $f \in C(I)$, $f \ge 0$ mais $f \not\equiv 0$, alors $\int_I f(x)dx > 0$.

(11) I pavé, $f, p \in R(I), f \in C(I), p \ge 0$. Alors $\exists x_0 \in I^\circ$ tel que

$$\int_I f(x)p(x)dx = f(x_0)\int_I p(x)dx;$$

en particulier $\exists x_0 \in I^\circ$: $\dfrac{1}{|I|}\displaystyle\int_I f(x)dx = f(x_0)$
(théorème de la valeur moyenne du calcul intégral).

Le théorème principal est le suivant:

Théorème 3.5. — *(Critère d'intégrabilité de Lebesgue)*
$I \subseteq \mathbb{R}^n$ pavé, $f : I \to \mathbb{R}$ bornée. Alors $f \in R(I) \Longleftrightarrow$ l'ensemble $D(f)$ des points de discontinuité de f est négligeable.

Exemple: Soit $A \subseteq \mathbb{R}^n$ bornée, $A \subseteq I$, I pavé. Considérons la fonction $f(x) = 1$ si $x \in A$ et $f(x) = 0$ si $x \in I \setminus A$. Il est clair que $D(f) = \partial A$. Donc $f \in R(I) \Longleftrightarrow \partial A$ est négligeable . Mais ceci est équivalent à ce que A est mesurable.

Proposition 3.6. — *i) Soit $N \subseteq \mathbb{R}^n$ mesurable. Supposons que N soit négligeable et soit $f : N \to \mathbb{R}$ bornée. Alors $f \in R(N)$ et $\int_N f(x)dx = 0$.*
ii) Soit $D \subseteq \mathbb{R}^n$ borné, $f \in R(D)$, $g : D \to \mathbb{R}$ borné. Supposons que $f(x) = g(x)$ $\forall x \in D \setminus N$ où $N \subseteq D$ est négligeable et mesurable. Alors $g \in R(D)$ et $\int_D f(x)dx = \int_D g(x)dx$.

4. L'intégrale de Riemann: 2^{me} approche

Au lieu du pavage dyadique on aurait pu procéder de la façon suivante:
Soit I un pavé dans $\mathbb{R}^n$, $f : I \to \mathbb{R}$ borné, prolongé par 0 en dehors de I, et $\mathcal{Q} = \{I_j : j = 1, \ldots, N\}$ une décomposition de I avec des pavés I_j et $\xi_j \in I_j$ (I_j s'appelle aussi "une cellule" de $\mathcal{Q}$.) Posons

$$\sigma_{\mathcal{Q}}(f) = \sum_{j=1}^{N} f(\xi_j)\,|I_j|$$

(somme de Riemann) et $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_N)$.

Théorème 4.1. — *$f \in R(I) \Longleftrightarrow \exists F \in \mathbb{R}\, \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0$ tel que $|F - \sigma_{\mathcal{Q}}(f)| < \varepsilon$ pour toute décomposition $(\mathcal{Q}, \xi)$ de I avec $\max_{j=1,\dots,N} \operatorname{diam} I_j \leq \delta$. F est alors l'intégrale $\int_I f dx$ de f sur I.*

Corollaire 4.2. — *Si $f \in R(I)$, I pavé, alors $\int_I f(x)dx = \lim_m \sigma_{\mathcal{Q}_m}(f)$ pour toutes suites $(\mathcal{Q}_m, \xi^{(m)})$ de décompositions de I avec $\max_{j=1,\dots,N_m} \operatorname{diam} I_j^{(m)} \to 0$ si $m \to \infty$.*

Corollaire 4.3. — *Soit $A \subseteq \mathbb{R}^n$ borné et $f \in R(A)$. Alors $\int_A f(x)dx = \lim_{k\to\infty} \sum_i |C_k^{(i)}|\, f(\zeta_k^i)$, avec $\zeta_k^i \in C_k^{(i)} \cap A$, où $C_k^{(i)}$ sont les pavés du pavage dyadique de $\mathbb{R}^n$ d'ordre k*

Exemples

$f(x,y) = xe^{-y}, I = [0,1] \times [0,1]$, cellules

$$Q_{j,k} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{j}{n} \leq x \leq \frac{j+1}{n}, \frac{k}{n} \leq y \leq \frac{k+1}{n}\right\},$$

$j,k = 0,\dots,n-1$. Soit $\mathcal{Q} = \bigcup_{j,k=0}^{n-1} Q_{j,k}$ et $\xi_{j,k} = (\frac{j+1}{n}, \frac{k}{n})$. Notons que $\sup_{Q_{j,k}} f = f(\xi_{j,k})$, car $f(\cdot, y)$ est croissante $\forall y$ fixé et $f(x,\cdot)$ est décroissante $\forall x$ fixé.

$$\sigma_{\mathcal{Q}}(f) = \sum_{j,k=0}^{n-1} (\frac{1}{n} \times \frac{1}{n}) f(\xi_{j,k}) = \sum_{j,k=0}^{n-1} \frac{1}{n^2} \left(\frac{j+1}{n}\right) e^{-k/n} =$$

$$= \frac{1}{n^3} \sum_{j=0}^{n-1} (j+1) \sum_{k=0}^{n-1} e^{-k/n} = \frac{1}{n^3} \frac{n(n+1)}{2} \frac{(e^{-\frac{1}{n}})^n - 1}{e^{-\frac{1}{n}} - 1} =$$

$$= \frac{e^{-1} - 1}{n(e^{-\frac{1}{n}} - 1)} \frac{n+1}{2n} \to -\frac{1}{2}(e^{-1} - 1).$$

Ainsi $\int_I f(x,y)d(x,y) = -\frac{1}{2}(e^{-1} - 1)$.

5. Théorème de Fubini, réduction du nombre des variables

Théorème 5.1. — *(Théorème de Fubini) Soient $I \subseteq \mathbb{R}^p$ et $J \subseteq \mathbb{R}^q$ des pavés, $n = p + q, K = I \times J \subseteq \mathbb{R}^n$ (K est aussi un pavé). Soit $f : K \to \mathbb{R}$ bornée. Supposons que*

1) $f \in R(K)$,
2) $\forall x \in I : \int_J f(x,y)dy$ existe,
3) $\forall y \in J : \int_I f(x,y)dx$ existe.
Alors

$$\int_K f(x,y)d(x,y) = \int_I \left(\int_J f(x,y)dy\right) dx = \int_J \left(\int_I f(x,y)dx\right) dy$$

(formule des intégrales itérées.)

Attention L'existence d'une/des intégrales itérées n'implique pas l'existence de l'intégrale multiple:

Exemple 1) Soit $f : K = [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y \in \mathbb{Q} \\ 2x & \text{si } y \text{ irrationnel.} \end{cases}$$

Alors
a)$\forall y \in [0,1]$ l'intégrale $\int_0^1 f(x,y)dx$ existe et est égale à 1;
b) l'intégrale itérée $\int_0^1 (\int_0^1 f(x,y)dx)dy$ existe et est égale à 1;
c) l'intégrale double $\int_K f(x,y)d(x,y)$ n'existe pas; i.e $f \notin R(K)$, car f est continue seulement en $(\frac{1}{2}, y_0)$, $0 \leq y_0 \leq 1$.

2) Soit D_k l'ensemble des nombres décimaux dans $[0,1]$ de la forme $x = 0, a_1 a_2 \dots a_k 0 \dots$, $k = 1, 2, \dots$ et $D_0 = \{0, 1\}$. Soit $D = \bigcup_k D_k \times D_k$ et

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x,y) \in D \\ 0 & \text{si } (x,y) \in K \setminus D. \end{cases}.$$

Alors
a) $\forall y \in [0,1]$ l'intégrale $\int_0^1 f(x,y)dx$ existe et est égale à 0;
(en effet si x n'est pas un nombre décimal, alors $f(x,y) = 0$, $\forall y \in [0,1]$, et si $x \in \bigcup D_k$, alors $x \in D_k$ pour un k, alors $f(x,y) = 1 \iff y \in D_k$.Mais D_k est un ensemble fini; donc $y \mapsto f(x,y)$ intégrable et $\int_0^1 f(x,y)dy = 0$.)
b)$\forall x \in [0,1]$ l'intégrale $\int_0^1 f(x,y)dx$ existe et est égale à 0;
c) les intégrales itérées existent et

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)dxdy = \int_0^1 \int_0^1 f(x,y)dydx = 0;$$

d) l'intégrale double $\int_K f(x,y)d(x,y)$ n'existe pas; i.e $f \notin R(K)$, car chaque pavé contient des points où f prend les valeurs 0 et 1; donc $s_k(f) = 0$ et $S_k(f) = 1$.

Exemple $K = [0,1] \times [0,1]$, $I = J = [0,1]$, $f(x,y) = xe^{-y}$ $(n = 2, p = q = 1)$. Alors $f \in C(K)$; K pavé. Donc $f \in R(K)$. Fubini:

$$\int_K f(x,y)d(x,y) = \int_J \left(\int_I xe^{-y}dx \right) dy =$$

$$\int_0^1 e^{-y} \left(\int_0^1 xdx \right) dy = \int_0^1 e^{-y} \left[\frac{1}{2}x^2 \right]_0^1 dy =$$

$$= \int_0^1 e^{-y} \, \frac{1}{2}dy = \frac{1}{2}[-e^{-y}]_0^1 = -\frac{1}{2}(e^{-1} - 1).$$

Théorème 5.2. — *(Théorème de Fubini, version spéciale)*
Soit $A' \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ mesurable, et Φ et Ψ deux fonctions réelles continues et bornées sur A' tq $\Phi(x') \leq \Psi(x')$ $\forall x' \in A'$.

Soit $A = \{(x', x_n) \in \mathbb{R}^n : x' \in A', \Phi(x') \leq x_n \leq \Psi(x')\}$.
Alors A *est mesurable et*
$\int_A f(x)dx = \int_{A'} \left(\int_{\Phi(x')}^{\Psi(x')} f(x', x_n)dx_n \right) dx'$
pour tout f *bornée et continue sur* A.

Exemples • Soit $f(x, y) = x^2 + y$ et A le triangle formé par les points $(0, 0)$, $(1, 1)$ et $(0, 1)$. Montrer que A est mesurable, que $f \in R(A)$ et calculer $I = \int_A f(x, y)d(x, y)$.

i) Pour montrer que A est mesurable, il faut montrer que ∂A est négligeable. Mais ∂A est la réunion des trois graphes G_j définies par

$$G_1 = \{(x, x) : 0 \leq x \leq 1\},$$

(graphe de la fonction identitée),

$$G_2 = \{(x, 1) : 0 \leq x \leq 1\}$$

(graphe de la fonction constante $x \mapsto 1$) et le graphe G_3 de la fonction constante $y \mapsto 0$ (attention: G_3 n'est pas le graphe d'une fonction de variable x).
Les graphes de fonctions continues sur des intervalles sont des ensembles négligebales; donc $= \partial A = G_1 \cup G_2 \cup G_3$ est négligeable.
ii) A mesurable, f continue et bornée sur A, donc $f \in R(A)$.
iii) Hypothèses de Fubini sont donc satisfaites.

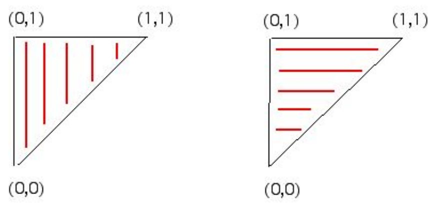

Figure 5. integration verticale et horizontale

<u>1^re^ méthode</u>: (intégration verticale d'abord) $I = \int_{x=0}^{x=1} \left(\int_{y=x}^{y=1} (x^2 + y)dy \right) dx = \int_{x=0}^{x=1} \left([x^2 y + \frac{1}{2}y^2]_{y=x}^{1} \right) dx = \int_0^1 (x^2 + \frac{1}{2} - x^3 - \frac{1}{2}x^2)dx = \int_0^1 (\frac{1}{2}x^2 - x^3 + \frac{1}{2})dx = (\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x)\Big|_0^1 = \frac{5}{12}$.

<u>2^e^ méthode</u>: (intégration horizontale d'abord) $I = \int_{y=0}^{y=1} \left(\int_{x=0}^{x=y} (x^2 + y)dx \right) dy = \int_{y=0}^{y=1} (\frac{1}{3}x^3 + yx)\Big|_0^y dx = \int_0^1 (\frac{1}{3}y^3 + y^2)dy = \frac{1}{12}y^4 + \frac{1}{3}y^3\Big|_0^1 = \frac{5}{12}$.

• Calculons l'aire de ce triangle: mes$A = \int_A 1d(x, y) = \int_{y=0}^{y=1} \int_{x=0}^{x=y} 1dx\, dy = \int_0^1 (y - 0)dy = \frac{1}{2}y^2\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$.

• Soit $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0, y - x + 1 \geq 0, y^2 - x - 1 \leq 0\}$ et $f(x, y) = \cosh \frac{x}{y+1}$, $(x, y) \in B$.
Montrer que B est mesurable, que $f \in R(B)$ et calculer $I = \int_B f(x, y)d(x, y)$.

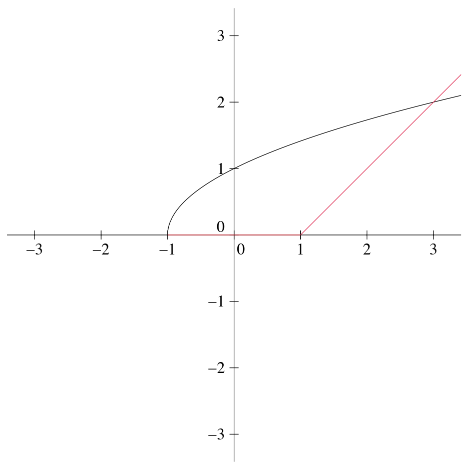

FIGURE 6. Un domaine dans $\mathbb{R}^2$

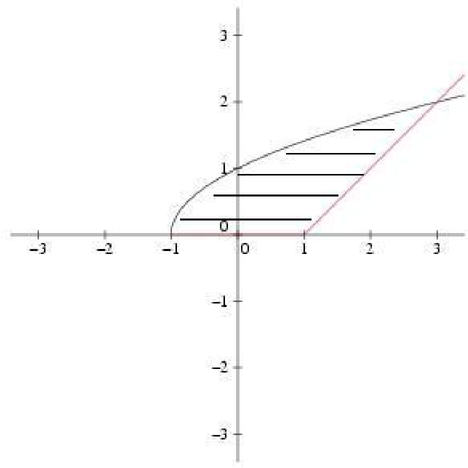

FIGURE 7. intégration horizontale

ii) ∂B est négligeable, car c'est la réunion de trois graphes de fonctions continues $f_1(x) = \sqrt{x+1} - 1 \leq x \leq 3$, $f_2(x) = x - 1, 1 \leq x \leq 3$, $f_3(x) = 0, -1 \leq x \leq 1$ sur des intervalles. Ainsi B est mesurable. En plus, f est continue et bornée sur B; donc $f \in R(B)$.
ii) Fubini. L' intégration verticale d'abord $\int \left(\int \cosh(\frac{x}{y+1}) dy \right) dx$ ne mêne à rien, parce qu'on ne peut pas donner explicitement une primitive de la fonction $y \mapsto \cosh \frac{x}{y+1}$. Donc on n'a pas d'autre choix que d'utiliser d'abord l'intégration horizontale:

$$I = \int_{y=0}^{2} \left(\int_{x=y^2-1}^{y+1} \cosh \frac{x}{y+1}\, dx \right) dy = \int_{y=0}^{2} \left[(y+1) \sinh \frac{x}{y+1} \right]_{x=y^2-1}^{y+1} dy =$$

$$\int_0^2 (y+1)(\sinh 1 - \sinh(y-1)) dy = 2e - \frac{4}{e}.$$

- Calculons l'aire de la surface A de $\mathbb{R}^2$ délimitée par les courbes $y^2 = 2px,\ x^2 = 2py \quad (p > 0)$.

i) Cherchons les bornes d'intégration:
points d'intersections des courbes: $\frac{x^2}{2p} = \sqrt{2px} \iff 2px = \left(\frac{x^2}{2p}\right)^2 \iff x^4 = 8p^3 x \iff x^3 = 8p^3$ où $x = 0 \iff x = 2p$ où $x = 0$.
ii) A est mesurable, car ∂A est la réunion négligeable des deux graphes suivants: $G_1 = \{(x,y) : y = \sqrt{2px}, 0 \leq x \leq 2p\}$ et $G_2 = \{(x,y) : y = x^2/(2p), 0 \leq x \leq 2p\}$.
iii) mes $A = \int_A 1 d(x,y) = \int_{x=0}^{x=2p} \left(\int_{y=\frac{x^2}{2p}}^{y=\sqrt{2px}} 1\, dy \right) dx = \int_0^{2p} (\sqrt{2px} - \frac{x^2}{2p}) dx = \frac{4}{3} p^2$.

- Calculons $I = \int_A xyz\, d(x,y,z)$ si

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq z,\ 0 \leq z \leq x\}.$$

On a:

$$I = \int_{x=0}^{x=1}\int_{z=0}^{z=x}\int_{y=0}^{y=z} xyz\,dydzdx =$$

$$\int_{x=0}^{x=1}\int_{z=0}^{z=x}(\frac{1}{2}xzy^2)\Big|_{y=0}^{y=z}\,dzdx = \int_{x=0}^{x=1}\int_{z=0}^{z=x}\frac{1}{2}xz^3\,dzdx =$$

$$\int_{x=0}^{x=1}\frac{1}{8}xz^4\Big|_{z=0}^{z=x}dx = \int_0^1 \frac{1}{8}x^5dx = \frac{1}{48}$$

ou

$I = \int_{x=0}^{x=1}\int_{y=0}^{y=x}\int_{z=y}^{z=x} xyz\,dzdydx =$

$= \int_{x=0}^{x=1}\int_{y=0}^{y=x}(xy\frac{1}{2}z^2)\Big|_{z=y}^{z=x}dydx =$

$= \int_{x=0}^{x=1}\int_{y=0}^{y=x}(\frac{x^3y}{2} - \frac{xy^3}{2})dydx =$

$= \int_{x=0}^{x=1}(\frac{x^3}{4}y^2 - \frac{x}{8}y^4)\Big|_{y=0}^{y=x}dx =$

$= \int_0^1(\frac{x^5}{4} - \frac{x^5}{8})dx = \int_0^1 \frac{x^5}{8}dx = \frac{1}{48}.$

6. Principe de Cavalieri et volume de corps rotationels

Calcul du volume $|B|_{n+1} := \int_B 1\ dx$ d'un corps dans $\mathbb{R}^{n+1}$ en utilisant la méthode de Cavalieri:

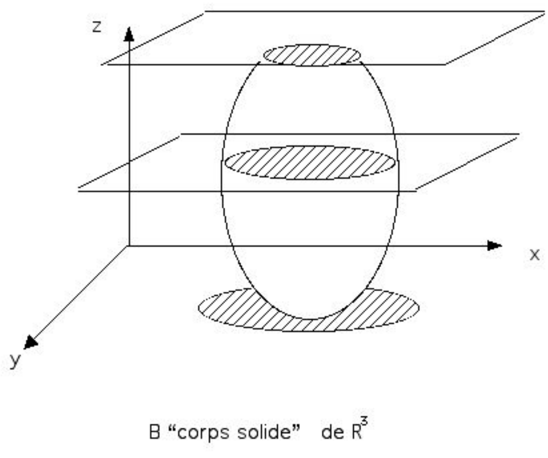

FIGURE 8. Principe de Cavalieri

Soit $B \subseteq \mathbb{R}^{n+1} = \{(x,z) : x \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{R}\}$ un ensemble quarrable (mesurable au sens de Jordan) "coincé" entre les hyperplans $z = a$ et $z = b$, $a < b$. Supposons que $\forall z_0 \in [a,b]$ l'intersection B_{z_0} de B avec l'hyperplan $z = z_0$ soit quarrable dans $\mathbb{R}^n$. Alors $[a,b] \to \mathbb{R}$, $z \mapsto \int_{B_z} 1\ dx = |B_z|$ est intégrable sur $[a,b]$ et $|B|_{n+1} := \int_B 1\ d(x,z) = \int_a^b |B_z|_n\ dz$.

(Découle de Fubini)

Exemple

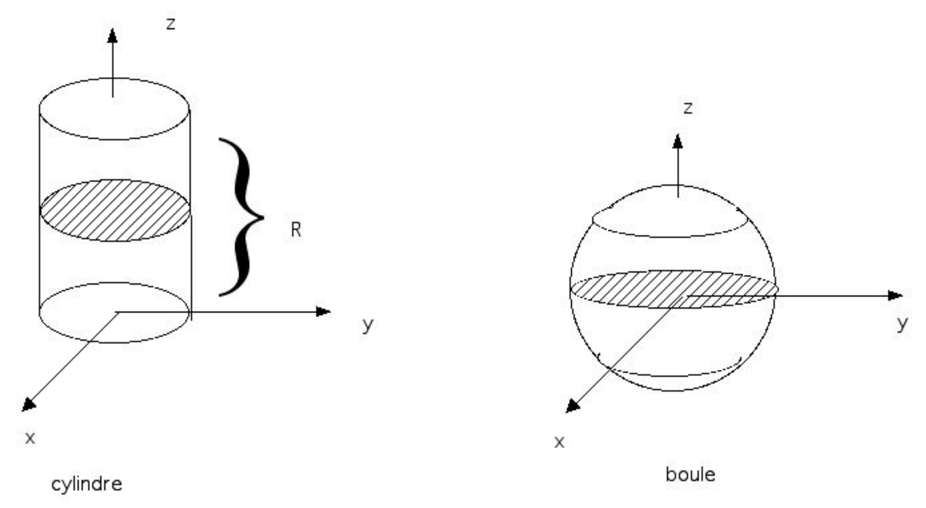

FIGURE 9

C est le cylindre $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq R\}$. Alors

$$|C|_3 = \int_C 1 \; d(x, y, z) = \int_{z=0}^{R} \int_{x^2+y^2 \leq 1} 1 \; dz = \int_0^R \pi \; dz = \pi R.$$

B est une boule de rayon R: La mesure étant invariante par rapport aux translations, on peut supposer que

$$B = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}.$$

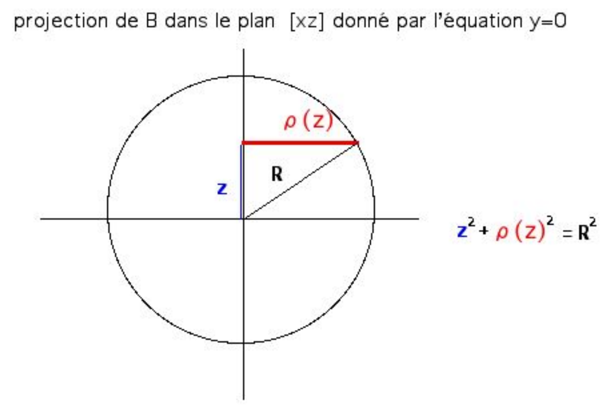

FIGURE 10

Alors

$$|B|_3 = \int_B 1 \; d(x, y, z) = \int_{z=-R}^{R} \int_{x^2+y^2 \leq \rho^2(z)} 1 \; dz,$$

où $\rho(z) = \sqrt{R^2 - z^2}$. Donc

$$|B|_3 = \int_{-R}^{R} \pi(R^2 - z^2)dz = \pi\left(zR^2 - \frac{1}{3}z^3\right)\Big|_{z=-R}^{z=R}$$

$$= \pi(2\big(R^3 - \frac{1}{3}R^3\big)) = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

<u>Calcul du volume d'un corps rotationel dans $\mathbb{R}^3$.</u>

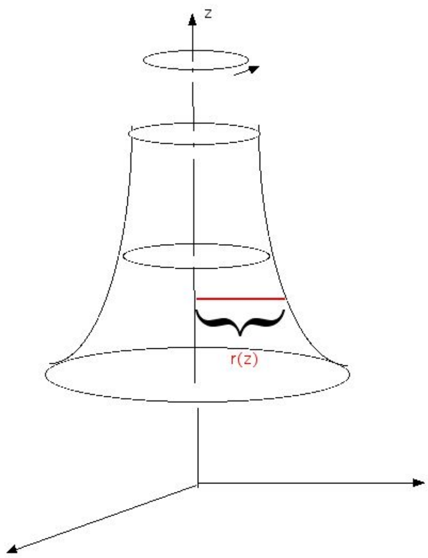

Figure 11

Soit $r(z) : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue. Une rotation autour de l'axe des z nous donne le corps rotationnel

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq r(z), a \leq z \leq b\}.$$

Alors B est quarrable et $|B|_3 = \pi \int_a^b r^2(z)\, dz$.

Preuve. — Utiliser Cavalieri: $|B|_3 = \int_a^b |B_z|\ dz$, où B_z est un disque de rayon $r(z)$, donc $|B_z|_2 = \pi r^2(z)$.

7. Changement de variables dans les intégrales multiples

Soit P le parallélogramme formé par les vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ dans $\mathbb{R}^2$ ($\vec{A}$ et $\vec{B}$ linéairement indépendants) Alors l'aire de P est $\operatorname{mes} P = h||\vec{B}|| = \sin\theta\|\vec{A}\|\,\|\vec{B}\|$, où θ est l'angle entre $\vec{A}$ et $\vec{B}$. Comme le produit scalaire $\vec{A}\cdot\vec{B}$ ou $\langle\vec{A}, \vec{B}\rangle$ de deux vecteurs $\vec{A} = \binom{a_1}{a_2}$ et $\vec{B} = \binom{b_1}{b_2}$ est lié à θ par la formule

$$\cos\theta = \frac{\langle\vec{A}, \vec{B}\rangle}{||\vec{A}||\ ||\vec{B}||},$$

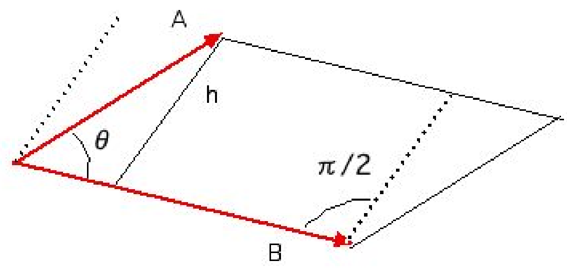

FIGURE 12. parallélogramme

on obtient

$$\text{mes } P = a_1 b_2 - a_2 b_1 = \det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = \det(\vec{A}, \vec{B}).$$

Rappel Soit $\vec{B}$ et $\vec{C}$ des vecteurs dans $\mathbb{R}^3$. Alors $\vec{B} \times \vec{C}$ (ou $\vec{B} \wedge \vec{C}$) est le produit vectoriel de $\vec{B}$ et $\vec{C}$.
Ceci est l'unique vecteur $\vec{v}$ orthogonal au plan formé par $\vec{B}$ et $\vec{C}$ tel que $\{\vec{B}, \vec{C}, \vec{v}, \}$ est de sens direct et $||\vec{v}|| = ||\vec{B}||\,||\vec{C}|| \sin\theta$, où θ est l'angle entre $\vec{B}$ et $\vec{C}$; notons que si $\vec{B} = (b_1, b_2, b_3)$ et $\vec{C} = (c_1, c_2, c_3)$, alors que

$$\vec{B} \times \vec{C} = (b_2 c_3 - c_2 b_3, c_1 b_3 - b_1 c_3, b_1 c_2 - c_1 b_2);$$

une formule à memoriser en développant le déterminant suivant par rapport à la première ligne:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

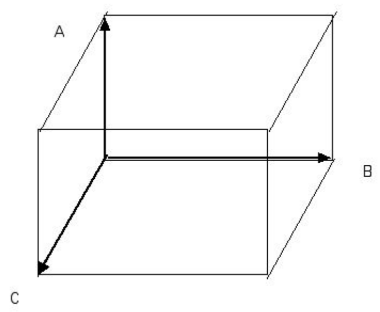

FIGURE 13. parallélépipède

Soit Q le parallélépipède formé par les vecteurs $\vec{A}$, $\vec{B}$ et $\vec{C}$, où $\{\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}\}$ est un système libre. Alors le volume de Q est donné par:
$\text{mes}\, Q = |h| \cdot \|\vec{B} \times \vec{C}\|$ avec $h = \|\vec{A}\| \cos\psi$, où ψ est l'angle formé par $\vec{A}$ et $\vec{n}$, la normale au plan formé par les vecteurs $\vec{B}$ et $\vec{C}$.

$|h| = |\left\langle \vec{A}, \vec{n} \right\rangle| = |\vec{A} \cdot \vec{n}|$ (produit scalaire).
Donc: $\operatorname{mes} Q = \vec{A}\cdot\vec{n}\,\|\vec{B}\times\vec{C}\| = \vec{A}\underbrace{\left[\|\vec{B}\times\vec{C}\|\,\vec{n}\right]}_{=\vec{B}\times\vec{C}} = \vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = \det(\vec{A},\vec{B},\vec{C})$.

Autre interprétation: Considérons l'application linéaire $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ avec $L(1,0,0) = \vec{A}$, $L(0,1,0) = \vec{B}$, $L(0,0,1) = \vec{C}$. Comme les vecteurs $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ sont linéairement indépendants, L est un difféomorphisme linéaire. L'image du pavé unité $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le x,y,z \le 1\}$ par rapport à l'application L est le parallélépipède Q ci-dessus. Le volume du pavé unité est donc multiplié par $\det(\vec{A},\vec{B},\vec{C})$. Donc: $\operatorname{mes} Q = \int_Q 1 d(u,v,w) = \int_C 1\,|\det(\vec{A},\vec{B},\vec{C})| d(x,y,z)$ où $(u,v,w) = L(x,y,z)$ et $Q = L(C)$ resp. $C = L^{-1}(Q)$. Notons aussi que la dérivée L' de L est la matrice constante $(\vec{A}\,,\vec{B}\,,\vec{C})$.
On va généraliser cette formule pour des difféomorphismes quelconques.

Théorème 7.1. — *(transformation de variables)*
Soient U et V deux ensembles ouverts et mesurables dans $\mathbb{R}^n$ (en particulier U et V sont bornés). Supposons que $\Phi : U \to V$ soit un difféomorphisme lipschitzien de U sur V, i.e.
$*$ $\Phi = (\Phi_1, \cdots, \Phi_n)$ *est continûment différentiable sur U, donc* $\Phi \in C^1(U,V)$,
$*$ Φ *est une bijection dont l'inverse Φ^{-1} est continûment différentiable sur V, donc* $\Phi^{-1} \in C^1(V,U)$,
$*$ Φ *satisfait une condition de Lipschitz, i.e. il existe une constante $M \in \mathbb{R}$ tq*
$\|\Phi(x) - \Phi(x')\| \le M\|x - x'\| \quad \forall x, x' \in U$.
Alors pour toute fonction f bornée et intégrable sur V, la fonction $(f \circ \Phi)|\det \Phi'|$ *est intégrable sur U et on a:*
$$\int_V f(y)dy = \int_U (f \circ \Phi)|\det \Phi'(x)|dx.$$
En plus, l'image $B = \Phi(A)$ d'un ensemble mesurable $A \subseteq U$ est mesurable et pour toute fonction f bornée et intégrable sur $B = \Phi(A)$ on a:
$\int_B f(y)dy = \int_A (f \circ \Phi)\,|\det \Phi'(x)|dx$.

Exemples (1) <u>coordonnées polaires</u>:

Soit $U =]0,R[\times]0,2\pi[$ et $V = \{(r\cos\theta, r\sin\theta) : 0 < r < R, 0 < \theta < 2\pi\}$ et $(y_1,y_2) = \Phi(x_1,x_2) = (x_1\cos x_2, x_1 \sin x_2)$. Alors Φ est un difféomorphisme de U sur V. On a:
$\Phi'(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} \cos x_2 & -x_1 \sin x_2 \\ \sin x_2 & x_1 \cos x_2 \end{pmatrix}$, $|\det \Phi'(x_1,x_2)| = x_1$. Donc:
$\int_V f(y_1,y_2) d(y_1,y_2) = \int_U f(x_1\cos x_2, x_1 \sin x_2) x_1\, d(x_1,x_2)$.

De façon plus commode on écrira pour $x_1 = r$ et $x_2 = \theta$. En posant $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$, on obtient donc pour toute fonction continue sur le disque $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R\}$ que:
$\int_D f(x,y)d(x,y) = \int_{]0,R[\times]0,2\pi[} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\, d(r,\theta)$
$\overset{Fubini}{=} \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{R} f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdrd\theta.$

En particulier pour $f \equiv 1$ on obtient l'aire du disque D de rayon R:

- $\text{mes}D = \int_D d(x,y) = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{R} rdrd\theta = \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{1}{2}r^2\Big|_0^R d\theta = \frac{1}{2}R^2 2\pi = \pi R^2.$
- Calculer $I = \displaystyle\int_{x^2+y^2\leq 1} (1 - x^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}} d(x,y).$

On fait le changement de variables $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$. Alors
$I = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1}\left(1 - r^2\right)^{-\frac{1}{2}} rdrd\theta = \int_0^{2\pi}(1-r^2)^{\frac{1}{2}}(-\frac{1}{2})2\Big|_0^1 d\theta = 2\pi.$

<u>coordonnées sphériques</u>

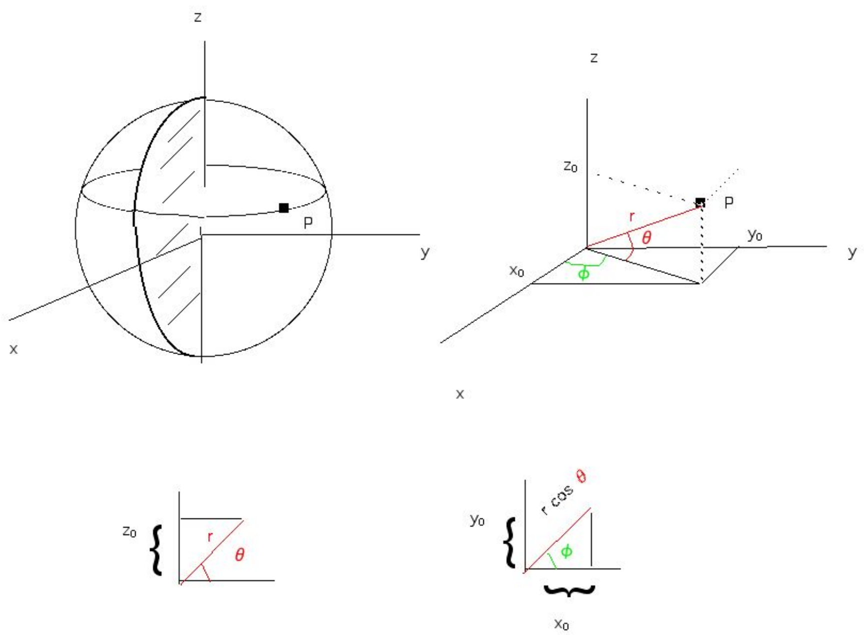

FIGURE 14. coordonnées sphériques

Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta\cos\varphi \\ r\cos\theta\sin\varphi \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$ où $0 < r < R$, $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ et $0 < \varphi < 2\pi$.

L'application S qui associe à (r,θ,φ) le point (x,y,z) ci-dessus est un difféomorphisme du pavé $]0,R[\times]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\times]0,2\pi[$ sur une boule de rayon R et centrée à l'origine dont on a enlevé un certain demi-disque (voir figure). Notons que l'image du pavé fermé est la boule fermée.
La jacobienne de S est:

$$S'(r,\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\cos\varphi & -r\cos\theta\sin\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \end{pmatrix}$$

Donc $\det S'(r,\theta,\varphi) = r^2\cos\theta$.
Pour toute fonction f continue sur la boule $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq R^2\}$ on obtient donc avec le théorème de Fubini:

$\int_B f(x,y,z)d(x,y,z) =$
$= \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{r=0}^{R} f\big(r\cos\theta\cos\varphi, r\cos\theta\sin\varphi, r\sin\theta\big) r^2\cos\theta dr d\theta d\varphi.$
Le terme $r^2\cos\theta\, drd\theta d\varphi$ s'appelle la différentielle sphérique.

Exemples

- Le volume de la boule $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+y^2 = R^2\}$ est égal à

$$|B| = \int_B 1\cdot d(x,y,z) = \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2}\int_{r=0}^{R} 1\cdot r^2\cos\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi =$$
$$\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2}\cos\theta\frac{R^3}{3}\, d\theta\, d\varphi =$$
$$\frac{R^3}{3}\int_{\varphi=0}^{2\pi}[\sin\theta]_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi =$$
$$\frac{2}{3}R^3\int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

- $\displaystyle\int_{x^2+y^2+z^2<1} z^2 d(x,y,z) =$

$= \int_{\phi=0}^{2\pi}\int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{r=0}^{1}(r^2\sin^2\theta)r^2\cos\theta\ drd\theta d\varphi =$
$= \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{5}r^5\right]_0^1\cos\theta\sin^2\theta\ d\theta d\varphi =$
$= \frac{2\pi}{5}\int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin^2\theta\ d\theta = \frac{2\pi}{15}[\sin^3\theta]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4\pi}{15}.$

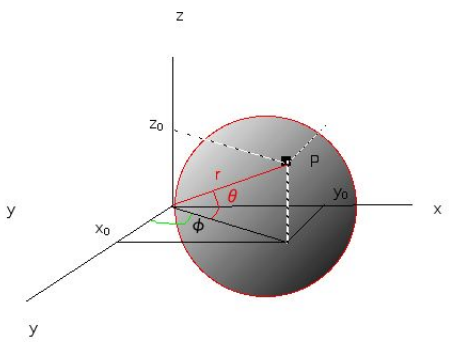

FIGURE 15. coordonnées sphériques, boule translatée

- Calculer $I = \int_B \sqrt{x^2+y^2+z^2}\ d(x,y,z)$ où
$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 < x\}$.

On a: $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x-\frac{1}{2})^2 + y^2 + z^2 < \frac{1}{4}\}$.
Coordonnées sphériques: $r^2 < r\cos\theta\,\cos\phi \iff 0 < r < \cos\theta\cos\phi$ où $\theta \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[,\ \phi \in]-\pi/2,\pi/2]$.
Donc $I = \int_{\phi=-\pi/2}^{\pi/2}\int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{r=0}^{\cos\theta\cos\phi} rr^2\cos\theta\ drd\theta d\phi =$
$= \int_{\phi=-\pi/2}^{\pi/2}\int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{4}r^4\right]_{r=0}^{\cos\theta\cos\phi}\cos\theta\ d\theta d\phi =$
$= \frac{1}{4}\int_\phi\int_\theta \cos^5\theta\cos^4\phi\ d\theta d\phi = \frac{1}{4}\Big(\int_\phi \cos^4\phi d\phi\Big)\Big(\int_\theta \cos^5\theta\ d\theta\Big)$.

- Calculer le volume de la partie de la boule $x^2+y^2+z^2 \leq a^2$ incluse dans le cylindre $(x-\frac{a}{2})^2+y^2 \leq \frac{a^2}{4}$.

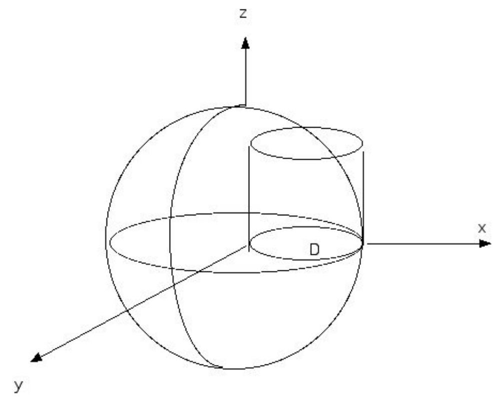

FIGURE 16. boule-cylindre

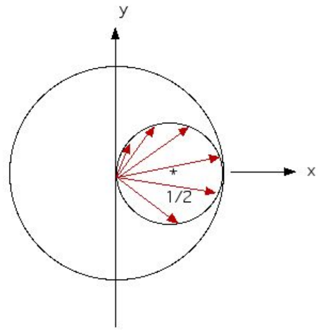

FIGURE 17. base

Déterminons d'abord l'intersection D du cylindre avec le plan $\overline{xy}$, d'équation $z=0$:
$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-\frac{a}{2})^2 + y^2 \leq \frac{a^2}{4}\}$.
Pour $(x,y) \in D$ on a l'équation de la sphère: $z = \pm\sqrt{a^2-x^2-y^2}$.
Donc le volume cherché est l'intégrale

$$I = \int_D \Big(\int_{-\sqrt{a^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} 1\ dz\Big) d(x,y) =$$

$= 2\int_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}d(x,y)$.
Coordonnées polaires: $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ où $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.
$D : x^2+y^2-ax \leq 0 \iff r^2 - ar\cos\theta \leq 0 \iff 0 \leq r \leq a\cos\theta$.
Donc $I = \int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{r=0}^{a\cos\theta} 2\sqrt{a^2-r^2}rdrd\theta =$
$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_{r=0}^{a\cos\theta} r\sqrt{a^2-r^2}drd\theta =$
$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big(-\frac{1}{2}4\cdot\frac{2}{3}(a^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{a\cos\theta}\Big)d\theta =$
$= \frac{4}{3}a^3(\frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta d\theta) = \frac{4}{3}a^3(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3})$.

Coordonnées elliptiques

$$\text{Ellipse}\begin{cases} x = ar\cos\theta & 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ y = br\sin\theta & 0 \leq r \leq 1 \end{cases}$$

$E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1\}$.

Calculons l'aire de cette ellipse:

mes$E=\int_E 1\, d(x,y)=$

$=\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1}\left|\det\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta}\end{pmatrix}\right| d(r,\theta)=$

$=\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1}\begin{vmatrix}a\cos\theta & -ar\sin\theta\\ b\sin\theta & br\cos\theta\end{vmatrix}\, d(r,\theta)=$

$=\int_{\theta=0}^{2\pi}\left(\int_{r=0}^{1} abrdr\right)d\theta=2\pi\frac{abr^2}{2}\Big|_0^1=\pi ab.$

D Intégrales impropres

ex. 1 "fonctions non bornées"

- $r>0,\ \alpha>0, B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq r^2\}$.

$\int_B \frac{1}{\|(x,y)\|^\alpha}d(x,y)=\int_B\frac{d(x,y)}{(x^2+y^2)^{\alpha/2}}$.

Pour quelles valeurs de α cette intégrale impropre existe?

Soit $B_\varepsilon=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \varepsilon\leq\sqrt{x^2+y^2}\leq r\}$. La fonction $f(x,y)=\frac{1}{(x^2+y^2)^{\alpha/2}}$ est bornée et continue sur B_ε. Alors

$\int_{B_\varepsilon} f(x,y)d(x,y)=\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\rho=\varepsilon}^{r}\frac{1}{\rho^\alpha}\rho d\rho d\theta=$

$=2\pi\int_\varepsilon^r\frac{1}{\rho^{\alpha-1}}\,d\rho=$

$$=\begin{cases}2\pi\log\rho\Big|_\varepsilon^r & \text{si } \alpha=2\\ 2\pi\frac{\rho^{-\alpha+2}}{2-\alpha}\Big|_\varepsilon^r & \text{si } \alpha>2 \text{ ou } 0<\alpha<2\end{cases}$$

$$=\begin{cases}2\pi\log\frac{r}{\varepsilon} & \text{si } \alpha=2\\ \frac{2\pi}{2-\alpha}\left(r^{2-\alpha}-\varepsilon^{2-\alpha}\right) & \text{si } \alpha>2 \text{ ou } 0<\alpha<2\end{cases}\xrightarrow{\varepsilon\to 0}$$

$$\begin{cases}\infty & \text{si } \alpha\geq 2\\ \frac{2\pi}{2-\alpha}r^{2-\alpha} & \text{si } 0<\alpha<2\end{cases}$$

Conclusion: $\int_B\frac{d(x,y)}{(x^2+y^2)^{\alpha/2}}$ existe $\Longleftrightarrow 0<\alpha<2.$

De même: $\displaystyle\int_{B(0,r)\subseteq\mathbb{R}^n}\cdots\cdots\int\frac{d(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\|x\|^\alpha}$ existe $\Longleftrightarrow 0<\alpha<n.$

ex. 2: fonction bornée, domaine d'intégration non borné

- $I=\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2}e^{-(x^2+y^2)}d(x,y)=$

$=\lim_{R\to\infty}\displaystyle\int_{x^2+y^2\leq R^2}e^{-(x^2+y^2)}d(x,y)=$

$=\lim_{R\to\infty}\displaystyle\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{R}e^{-r^2}rdrd\theta=$

$=2\pi\lim_{R\to\infty}\int_0^R re^{-r^2}\,dr=2\pi(-\frac{1}{2})\lim_{R\to\infty}e^{-r^2}\Big|_0^R=\pi.$

Mais on a encore:

$$I = \lim_{R\to\infty} \int_{\max\{|x|,|y|\}\le R} e^{-(x^2+y^2)} d(x,y) \overset{\text{Fubini}}{=}$$
$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \left[\int_{-R}^{R} e^{-x^2-y^2} dx \right] dy =$
$= \lim_{R\to\infty} \left[\int_{-R}^{R} e^{-x^2} dx \ \int_{-R}^{R} e^{-y^2} dy \right] = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2} \, ds \right)^2.$
Donc $\int_{\mathbb{R}} e^{-s^2} ds = \sqrt{\pi}$ et $\int_0^\infty e^{-s^2} ds = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
(Ceci est important pour la théorie des probabilités).
ex. 2 Soit $f(x,y) = \frac{1}{[1-(x^2+y^2)]^\alpha}$, $\quad \alpha > 0$. Alors f est une fonction non bornée sur le disque unité.
$\int_{x^2+y^2<1} f(x,y) d(x,y) = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{1}{(1-r^2)^\alpha} r dr d\theta$
$= 2\pi \int_0^1 \frac{r}{(1-r^2)^\alpha} dr \overset{s=1-r}{=} 2\pi \int_0^1 \frac{1-s}{(2-s)^\alpha} \frac{1}{s^\alpha} ds = I.$

Comme $\frac{1-s}{(2-s)^\alpha} \frac{1}{s^\alpha} \le \frac{1}{s^\alpha}$ et $\frac{1-s}{(2-s)^\alpha} \frac{1}{s^\alpha} \ge \frac{\frac{1}{2}}{2^\alpha} \frac{1}{s^\alpha}$ si $0 < s \le \frac{1}{2}$, on voit que I existe $\iff \int_0^1 \frac{1}{s^\alpha} ds$ existe. Mais cette dernière intégrale existe si et seulement si $0 < \alpha < 1$.

8. Courbes

Définition (1) Soit $I = [\alpha, \beta] \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle borné et fermé (donc compact). Un arc, ou chemin, ou une courbe γ dans $\mathbb{R}^n$ de classe C^1 est l'image $\Phi(I)$ d'une application $\Phi : I \to \mathbb{R}^n$ dont les composantes Φ_j $(j = 1, \cdots, n)$ sont continûment différentiables. L'application $\Phi = (\Phi_1, \cdots, \Phi_n)$ s'appelle une paramétrisation ou un paramétrage de γ.
(2) Si une paramétrisation Φ d'une courbe γ satisfait $\Phi(\alpha) = \Phi(\beta)$, alors on dit que γ est une courbe fermée.
(3) Si Φ est injective sur I, i.e. $\Phi(t_1) \neq \Phi(t_2)$ pour $\alpha \le t_1 < t_2 \le \beta$, alors on dit que $\gamma = \Phi(I)$ est un arc de Jordan.
(4) Si Φ est injective sur $[\alpha, \beta[$ et satisfait $\Phi(\alpha) = \Phi(\beta)$, alors γ est une courbe de Jordan (fermée).
(5) Si $\Phi' = (\Phi_1', \cdots, \Phi_n') \neq (0, \cdots, 0)$ en chaque point de I, alors on dit que l'arc $\gamma = \Phi(I)$ est lisse.

ex. • Le cercle $\Phi(t) = (\cos t, \sin t)$, $0 \le t \le 2\pi$ est une courbe de Jordan (fermée) lisse.
Le cercle parcouru deux fois est paramétrisé p.ex. par:
$\Phi(t) = (\cos t, \sin t)$, $0 \le t \le 4\pi$.
• l'hélice circulaire: $\Phi(t) = (\cos t, \sin t, at)$, $0 \le t \le M$.

Définition Soit $\Phi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ une paramétrisation d'une courbe dans $\mathbb{R}^n$. En plus, soit $J = [\alpha', \beta']$ un deuxième intervalle et $h : J \to I$ un difféomorphisme de J sur I. Alors l'application $\Psi = \Phi \circ h : J \to \mathbb{R}^n$ représente le même arc $(\Psi(J) = \Phi(I))$. On dit que l'un est obtenu par l'autre par un changement de paramétrage. Associée à un paramétrage d'un arc γ est un sens d'orientation de ce dernier. On dit que $\Phi(\alpha)$ est le point initial (point de départ) et $\Phi(\beta)$ le point terminal de l'arc γ. Donc l'arc $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n,\ t \mapsto \Phi(t)$ est parcouru de $\Phi(\alpha)$ à $\Phi(\beta)$. Le sens d'orientation est conservé par un changement de paramétrage avec $h' > 0$. Si on considère le paramétrage $\Psi(t) = \Phi(-t+\alpha+\beta),\ \alpha \le t \le \beta$, alors l'arc $\gamma = \Phi[\alpha,\beta] = \Psi[\alpha,\beta]$ est parcouru en sens inverse. On note cet arc par γ^- —c'est le chemin inverse.

Définition (1) La longueur d'un arc γ donné par le paramétrage $t \mapsto \Phi(t) = (\Phi_1(t), \cdots, \Phi_n(t))$, $t \in I = [\alpha, \beta]$, est donnée par l'intégrale
$L(\gamma) = \int_\alpha^\beta \|\Phi'(t)\|_2 dt = \int_\alpha^\beta \sqrt{\sum_{j=1}^n |\Phi_j'(t)|^2}\, dt.$
(2) Si l'arc est donné par l'équation cartésienne $\Phi(t) = (t, f(t)),\ \alpha \le t \le \beta$, alors

$$L(\gamma) = \int_\alpha^\beta \sqrt{1 + \|f'(t)\|_2^2}\, dt,$$

où $f = (f_1, \cdots, f_{n-1})$.
(3) Si l'arc $\gamma \subseteq R^2$ est donné par ses coordonnées polaires, $r = r(\theta),\ \theta_1 \le \theta \le \theta_2,\ r \in C^1[\theta_1, \theta_2]$,alors
$L(\gamma) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{r^2(t) + \dot{r}^2(t)} dt.$
Dém. (1)

$\underline{n=2}$, $\Phi(t) = (x(t), y(t))$. Soit $\alpha = t_0 \le t_1 \le \cdots \le t_n = \beta$ une subdivision de $[\alpha, \beta]$ et posons $x_j = x(t_j)$ resp. $y_j = y(t_j)$. Alors
$L_j \sim \sqrt{(x_{j+1} - x_j)^2 + (y_{j+1} - y_j)^2}$. Donc
$L(\gamma) = \sum L_j = \sum (t_{j+1} - t_j) \sqrt{\left(\frac{x_{j+1} - x_j}{t_{j+1} - t_j}\right)^2 + \left(\frac{y_{j+1} - y_j}{t_{j+1} - t_j}\right)^2} =$
$= \sum (t_{j+1} - t_j) \sqrt{[x'(\theta_j)]^2 + [y'(\tilde{\theta}_j)]^2}.$
En passant à la limite $\max_{1 \le j \le n} |t_{j+1} - t_j| \to 0$, on obtient que
$L(\gamma) = \int_\alpha^\beta \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt.$
(3) $\Phi(\theta) = \begin{pmatrix} x(\theta) \\ y(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(\theta)\cos\theta \\ r(\theta)\sin\theta \end{pmatrix}$, $\Phi'(\theta) = \begin{pmatrix} \dot{r}(\theta)\cos\theta - r(\theta)\sin\theta \\ \dot{r}(\theta)\sin\theta + r(\theta)\cos\theta \end{pmatrix} \implies$
$L(\gamma) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \Big((\dot{r}^2 \cos^2\theta + r^2 \sin^2\theta - 2r\dot{r}\cos\theta\sin\theta) + (\dot{r}^2 \sin^2\theta + r^2\cos^2\theta +$
$2\dot{r}r\cos\theta\sin\theta) \Big)^{\frac{1}{2}} d\theta =$
$= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\dot{r}^2(\theta) + r^2(\theta)}\, d\theta.$

Remarque: La longueur d'une courbe ne dépend pas de son paramétrage: Soit $h : [\alpha', \beta'] \to [\alpha, \beta]$ homéomorphisme, $\Psi = \Phi \circ h$ et $h' > 0$. Alors
$\int_{\alpha'}^{\beta'} \|\Psi'\|_2 dt = \int_{\alpha'}^{\beta'} \sqrt{\sum_{j=1}^n |\Psi_j'(t)|^2} dt =$
$= \int_{\alpha'}^{\beta'} \sqrt{\sum_{j=1}^n [\Phi_j'(h(t))h'(t)]^2} dt =$

$= \int_{\alpha'}^{\beta'} \sqrt{\sum_{j=1}^{n}[\Phi_j'(h(t))]^2}\, h'(t)dt$
$\stackrel{s=h(t)}{=} \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |\Phi_j'(s)|^2}\, ds = \int_{\alpha}^{\beta} \|\Phi'\|_2 ds.$

ex • $\Phi(t) = (r\cos t, r\sin t),\ 0 \le t \le 2\pi$. Alors
$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{[(r\cos t)']^2 + [(r\sin t)']^2}dt = 2\pi r.$

• Cercle parcouru n-fois:
$\Phi(t) = (r\cos t, r\sin t),\ 0 \le t \le 2n\pi$. Alors
$L(\gamma) = \int_0^{2n\pi} \sqrt{[(r\cos t)']^2 + [(r\sin t)']^2}dt = 2n\pi r.$

Ou, en utilisant une autre paramétrisation:

$\Phi(t) = (r\cos nt, r\sin nt),\ 0 \le t \le 2\pi.$
$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{[(r\cos nt)']^2 + [r\sin nt)']^2}dt = 2\pi rn,$

• spirale logarithmique: $r(\theta) = ae^{k\theta}$, $k > 0$,
$\theta_1 \le \theta \le \theta_2 \quad a > 0.$
$L(\gamma) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{a^2e^{2k\theta} + a^2k^2e^{2k\theta}}d\theta =$
$= a\int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{(1+k^2)e^{2k\theta}}d\theta = a\sqrt{1+k^2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} e^{k\theta}d\theta =$
$= a\sqrt{1+k^2}\ [\frac{1}{k}e^{k\theta}]_{\theta_1}^{\theta_2} = \frac{a}{k}\sqrt{1+k^2}(e^{k\theta_2} - e^{k\theta_1}) \to \frac{a}{k}\sqrt{1+k^2}e^{k\theta_2}$ si $\theta_1 \to -\infty$.

• $\Phi(t) = (2t, t^2),\ 0 \le t \le 1$. Posons $y(t) = t^2, x(t) = 2t$. Alors $y(t) = \left(\frac{x(t)}{2}\right)^2$. Equation cartésienne de la courbe: $y = \frac{x^2}{4},\ 0 \le x \le 2$.

$L(\gamma) = \int_0^2 \sqrt{1 + y'^2(x)}dx = \int_0^2 \sqrt{1 + \frac{x^2}{4}}dx$
ou bien
$L(\gamma) = \int_0^1 \sqrt{[(2t)']^2 + [(t^2)']^2}dt = \int_0^1 \sqrt{4+4t^2}dt = 2\int_0^1 \sqrt{1+t^2}dt = \sqrt{2} + \log(1+\sqrt{2}).$

Définition Soit $\Phi : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}^n$ une courbe lisse; i.e $\Phi \in C^1([\alpha,\beta])$ et $\Phi' \neq 0$. Pour $\alpha \le t_0 \le \beta$ posons $s(t_0) = L(\Phi([\alpha, t_0]))$. Alors s s'appelle l'abscisse curviligne.
On a:
$s(t_0) = \int_{\alpha}^{t_0} \|\Phi'(t)\|_2 dt.$
C'est une fonction strictement croissante, et continûment différentiable sur $[\alpha,\beta]$. En plus, $s'(t) = \|\Phi'(t)\|_2 > 0$. Donc l'inverse de s, notée par g, existe sur l'intervalle $[0, L(\gamma)]$ et $g'(S) = \frac{1}{s'(g(S))} = \frac{1}{\|\Phi'(t)\|_2}$ pour $t = g(S) \iff S = s(t)$. Notons que $g\circ s = s\circ g = id$.
Considérons l'application $\Psi : [0, L(\gamma)] \to \mathbb{R}^n, s \mapsto \Phi(t_0)$ si t_0 est choisi tq $s(t_0) = s$. Notons que $t_0 = g(s)$. Donc $\Psi(s) = \Phi(g(s))$. On appelle ψ la paramétrisation de la courbe γ par rapport à l'abscisse curviligne s.
$\Psi(0) = \Phi(g(0)) = \Phi(\alpha),\ \Psi(L(\gamma)) = \Phi(g(L(\gamma))) = \Phi(\beta).$
On a : $\|\Psi'(s)\|_2 = 1$ parce que:
$\Psi'(s) = (\Phi\circ g)'(s) = \Phi'(g(s))g'(s) = \Phi'(g(s))\frac{1}{\|\Phi'(g(s))\|_2}.$

En particulier on a: $L(\Psi([0,s])) = \int_0^s \|\Psi'(\sigma)\|_2 d\sigma = \int_0^s 1 d\sigma = s$.
ex. $\bullet$ Le cercle: $\Phi(t) = (\cos t, \sin t),\ 0 \leq t \leq 2\pi$. Alors
$s(t_0) = \int_0^{t_0} \|\Phi'(t)\|_2 dt = \int_0^{t_0} \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} dt = t_0$;
donc ce paramétrage du cercle (avec l'angle en radian) est déjà le paramétrage par rapport à l'abscisse curviligne.
$\bullet$ Déterminer le paramétrage de $\Phi(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t^2 \\ \frac{4}{3}(1+t)^{3/2} \end{pmatrix}$,
$0 \leq t \leq 1$, par rapport à l'abscisse curviligne:
$y(x) = \frac{4}{3}(1+\sqrt{2x})^{3/2},\ 0 \leq x \leq \frac{1}{2}$, est la représentation cartésienne de la courbe.
$s(t_0) = \int_0^{t_0} \sqrt{t^2 + [2(1+t)^{\frac{1}{2}}]^2} dt = \int_0^{t_0} \sqrt{t^2+4t+4} dt = \int_0^{t_0} (t+2) dt = \frac{1}{2}t_0^2 + 2t_0$.
$L(\gamma) = s(1) = \frac{5}{2}$. Calculons l'inverse g de $s(t)$:
$s = \frac{1}{2}t^2 + 2t \iff t^2 + 4t - 2s = 0 \iff t = -2 \pm \sqrt{2s+4}$. Comme $t \geq 0$, on voit que $g(s) = -2 + \sqrt{2s+4},\ 0 \leq s \leq \frac{5}{2}$. Donc:

$$\Psi(s) = \Phi(g(s)) = \begin{pmatrix} 4 + s - 2\sqrt{4+2s} \\ \frac{4}{3}\Big(1 + \big(-2 + \sqrt{4+2s}\big)\Big)^{\frac{3}{2}} \end{pmatrix}.$$

On a: $\|\Psi'(s)\|_2 = 1\ \forall s \in [0, \frac{5}{2}]$; *vérifier !*

II Intégrales curvilignes

$\bullet$ Soit γ un arc dans $\mathbb{R}^n$ et soit $f : \gamma \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\gamma = \Phi([\alpha,\beta]),\ \Phi \in C^1([\alpha,\beta])$. Comme f est bornée, on peut définir l'intégrale curviligne, type premier

$$I_1 = \int_\gamma f ds = \int_\alpha^\beta f(\Phi(t)) \|\Phi'(t)\|_2 dt.$$

ds s'appelle la différentielle curviligne et on a:
$ds = \|\Phi'(t)\|_2\ dt$.

Interprétation géométrique dans $\mathbb{R}^2$:

I_1 est l'aire de la surface S, donnée par le graphe de f si $f \geq 0$:
$S = \{\big(x(t), y(t), f(x(t), y(t))\big) : \alpha \leq t \leq \beta\}$.
$\bullet$ intégrale curviligne du deuxième type: (intégration de champs vectoriels définis sur des courbes)
Soit γ une courbe dans $\mathbb{R}^n$ donnée par le paramétrage $\Phi(t) = (\Phi_1(t), \cdots, \Phi_n(t)),\ \Phi_j \in C^1([\alpha,\beta])$ et soit $f : \gamma \to \mathbb{R}^n$ une fonction (ou un champ) vectorielle définie sur l'arc γ avec valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Supposons que $f = (f_1, \cdots, f_n)$ soit continue. Pour $x = (x_1, \cdots, x_n)$ et $dx = (dx_1, \cdots, dx_n)$ on définit:

$\int_\gamma f(x) \cdot dx = \int_\gamma \sum_{j=1}^n f_j dx_j =$
$= \int_\alpha^\beta \sum_{j=1}^n f_j(\Phi(t)) \Phi_j'(t) dt.$

Interprétation en physique: $\int_\gamma f(x) \cdot dx$ désigne le travail effectué par un point soumis en chaque point x de γ à une force $f(x)$ lorsqu'il parcourt l'arc γ (électron dans un champ électrique, point de masse dans un champ gravitationnel....)

Remarque (1) Les intégrales curvilignes ne dépendent pas du paramétrage de la courbe donnée si $h' > 0$.
(2) L'intégrale curviligne du deuxième type change de signe si on intègre sur le chemin inverse:
$\int_{\gamma-} f(x) \cdot dx = -\int_\gamma f(x) \cdot dx$.

ex. • Soit γ donnée par $\Phi(t) = \binom{t^2}{t-1}$, $0 \le t \le 1$, et
$f(x,y) = \binom{x^2y}{x+y} = \binom{f_1(x,y)}{f_2(x,y)}$, où $(x,y) \in \gamma$.
Notons que la courbe est une parabole déquation cartésienne $x = (y+1)^2,\ 0 \le x \le 1$ resp. $y = \sqrt{x} - 1$. Alors pour $x(t) = t^2$ et $y(t) = t - 1$ on obtient:
$dx = 2tdt$ et $dy = 1dt$. Donc
$\int_\gamma f(x,y) \cdot d(x,y) = \int_\gamma (f_1 dx + f_2 dy) =$
$= \int_0^1 \Big[t^4(t-1)2t + (t^2+t-1)1 \Big] dt = -\frac{5}{42}$.

Définition Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f = (f_1, \cdots, f_n)$ un champ vectoriel sur U. Une fonction réelle $F : U \to \mathbb{R}$ est appellée primitive ou potentiel de f si F est différentiable et satisfait $\operatorname{grad} F = f$ sur U, i.e. $\frac{\partial F}{\partial x_j} = f_j,\ (j = 1, \cdots, n)$.

Remarque Comme dans le cas d'une variable, toutes les primitives sont données par $F + c$, où c est une constante. Mais contrairement au cas d'une variable, il existe des champs $f = (f_1, \cdots, f_n)$ de fonctions continues sur U qui n'ont pas de potentiel.

ex. • $U = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$,
$f(x,y,z) = (-\frac{x}{r^3}, -\frac{y}{r^3}, -\frac{z}{r^3})$, où $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$. On vérifie aisément que $F(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{1}{r}$ est un potentiel de f.

Théorème 8.1. — *(1) Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f = (f_1, \cdots, f_n)$ un champ continu sur U. Alors les assertions suivantes sont équivalentes:*
(i) f admet un potentiel F sur U.
(ii) $\int_\gamma f(x) \cdot dx$ ne dépend que des points initiaux et terminaux des courbes γ dans U, i.e. si $a, b \in U$ et si γ_1 et γ_2 sont deux courbes joignant a et b dans U, (i.e. $\Phi_1(\alpha) = \Phi_2(\alpha) = a$ et $\Phi_1(\beta) = \Phi_2(\beta) = b$), alors $\int_{\gamma_1} f(x) \cdot dx = \int_{\gamma_2} f(x) \cdot dx$.
(iii) $\int_\gamma f(x) \cdot dx = 0$ pour toute courbe fermée.

(2) Supposons que U est connexe par arcs (i.e. si $\forall a, b \in U$ il existe un arc $\gamma_{a,b}$ dans U joignant a et b), et que (ii) ou (et) (iii) est satisfait. Alors une primitive est donnée par:
$F(x) = \int_{\gamma_{a,x}} f(y) \cdot dy$ où $a \in U$ est fixé.

(3) Si F est une primitive du champ continu f, alors $\int_\gamma f(x) \cdot dx = F(b) - F(a)$, où $a = \Phi(\alpha)$ est le point initial et $b = \Phi(\beta)$ le point terminal de l'arc $\gamma = \Phi([\alpha, \beta])$.

Théorème 8.2. — *conditions nécessaires explicites*
Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert, $f = (f_1, \cdots, f_n)$ un champ sur U tq $f_j \in C^1(U)$, $(j = 1, \cdots, n)$. Supposons que f admet une primitive sur U. Alors on a:

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_k} = \frac{\partial f_k}{\partial x_j} \quad (j, k = 1, \cdots, n)$$

(Ce sont les conditions d'intégrabilité).

Dém. Soit $F : U \to \mathbb{R}$ une primitive de f, i.e. grad $F = f$. Alors $\frac{\partial F}{\partial x_j} = f_j$.
Donc, d'après Schwarz:
$\frac{\partial f_j}{\partial x_k} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_k \partial x_j} = \frac{\partial f_k}{\partial x_j}$.
(Notons que $f_j \in C^1(U)$ implique que F est de classe C^2.)
Remarque: Les conditions d'intégrabilité ne sont pas suffisantes pour que f admet une primitive (voir l'exemple plus tard). On a besoin d'une condition géométrique sur le domaine U:

Théorème 8.3. — *Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert* convexe*, (i.e. $\forall a, b \in U$, le segment $[a, b] = \{tb + (1-t)a : 0 \le t \le 1\} \subseteq U$), et soit $f = (f_1, \cdots, f_n)$ un champ tq*
(1) $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$
(2) $\frac{\partial f_j}{\partial x_k} = \frac{\partial f_k}{\partial x_j} \quad (j, k = 1, \cdots, n)$
Alors f admet un potentiel sur U.

Pour $n = 3$ et $U = \mathbb{R}^3$ on a les équivalences suivantes:
Un champ $f = (A, B, C) \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ a un potentiel $\Longleftrightarrow \operatorname{rot} f = 0$, où $\operatorname{rot} f$ est le rotationel de f défini par:

$\operatorname{rot} f = \nabla \times f = (\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z}, \frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial x}, \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y})$.

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A & B & C \end{vmatrix}.$$

<u>ex.</u> • $U = \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (2xy + 1, x^2)$.
Est-ce que f admet un potentiel sur $\mathbb{R}^2$?
(0) $\mathbb{R}^2$ est convexe
(1) $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$
(2) $\frac{\partial(2xy+1)}{\partial y} = 2x \overset{!}{=} \frac{\partial x^2}{\partial x}$.

Calcul du potentiel:

$$\operatorname{grad} F = f \Longleftrightarrow \begin{cases} F_x = 2xy + 1 & (i) \\ F_y = x^2 & (ii) \end{cases} \overset{(i)}{\Longrightarrow} F(x, y) = x^2 y + x + C(y) \Longrightarrow F_y = x^2 + C'(y) \overset{(ii)}{=} x^2 \Longleftrightarrow C'(y) = 0 \Longleftrightarrow C(y) = C.$$

D'où $F(x,y) = x^2y + x + C$ sont toutes les primitives de f sur $\mathbb{R}^2$.
<u>*vérifier!*</u>

• $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $f(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right) = (f_1, f_2)$.
Est-ce que f possède un potentiel dans U?
$*$ $\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{-(x^2+y^2)+y(2y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$,
$\frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{x^2+y^2-x(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$, donc $\frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial y}$.
$*$ Nous ne pouvons pas appliquer le théorème 7.3 parce que U n'est pas convexe.
$*$ Sur le cercle unité $\Phi(t) = (\cos t, \sin t)$, $0 \le t \le 2\pi$ on a:
$\int_\gamma f(x,y) \cdot d(x,y) = \int_\gamma f_1 dx + f_2 dy =$
$= \int_0^{2\pi} \big[f_1(\cos t, \sin t)(-\sin t) + f_2(\cos t, \sin t)\cos t\big] dt =$
$= \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = 2\pi \neq 0$,
donc, d'après théorème 7.1 f n'admet pas de primitive sur U.
$*$ Cependant, si U' est le demi-plan droite, i.e. $U' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$, alors f admet une primitive sur U', car U' est convexe et les conditions d'intégrabilité sont satisfaits.

Calculons cette primitive: $F_x = \frac{-y}{x^2+y^2}$, $F_y = \frac{x}{x^2+y^2}$. Donc $F(x,y) = \int \frac{-y}{x^2+y^2} dx = \int \frac{-y}{x^2\left(1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right)} dx = \int \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \left(-\frac{y}{x^2}\right) dx = \arctan \frac{y}{x} + C(y)$.
Comme $F_y = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \frac{1}{x} + C'(y) \overset{!}{=} \frac{x}{x^2+y^2}$, on déduit que $C'(y) = 0$. Donc $\arctan \frac{y}{x} + C$, où C est une constante, sont toutes les primitives de f sur U'.

9. Intégrales de surfaces

<u>Rappel</u>: Jusqu'ici: • Intégrales curvilignes
(γ courbe dans $\mathbb{R}^n$, paramétrisée par $\Phi(t) = (\Phi_1(t), \cdots, \Phi_n(t))$):
(I) $I = \int_\gamma f\, ds = \int_\alpha^\beta f(\Phi(t))\, \|\Phi'(t)\|_n\, dt$
où $f : \gamma \to \mathbb{R}$ est continue.
(II) $I = \int_\gamma \vec{f}(x) \cdot dx = \sum_{j=1}^n \int_\gamma f_j(x) dx_j$,
où $\vec{f} = (f_1, \cdots, f_n) : \gamma\ to \mathbb{R}^n$ est continue et $dx_j = \Phi_j'(t) dt$.
• intégrales multiples: (V mesurable dans $\mathbb{R}^n$):
$\int_V f(x)\, dx$, $\quad f : V \to \mathbb{R}$ bornée et continue.

Définition Soit $D \subseteq \mathbb{R}^2$ un domaine délimité par une courbe fermée C^1 de Jordan. L'image $S = \Phi(D)$ d'une application $\Phi : D \to \mathbb{R}^3$ s'appelle <u>surface non dégénérée</u> si:

(1) $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3) \in C^1(D, \mathbb{R}^3) \cap C(\overline{D}, \mathbb{R}^3)$,
(2) Φ injective,
(3) le rang de la matrice jacobienne $J_\Phi = \Phi'$ est égal à 2 dans D (Notons que $J_\Phi \in \mathcal{M}(3 \times 2; \mathbb{R})$.

ex. • $D = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u^2+v^2 < R^2\}$,
$S = \Phi(u,v) = (u, v, \sqrt{R^2-u^2-v^2}), \quad (u,v) \in D$
Donc S est la demi-sphère de rayon R
$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = R^2, z > 0\}$.

A Calcul de l'aire d'une surface dans $\mathbb{R}^3$

Rappel: l'aire du parallélogramme donné par les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ dans $\mathbb{R}^3$ est la norme euclidienne du produit vectoriel $\vec{a} \times \vec{b}$.
Considérons le plan tangentiel à la surface S au point $P = \Phi(u_0,v_0) = (x_0,y_0,z_0)$ donné par sa représentation paramétrique
$T(\lambda,\lambda') = P + \lambda\Phi_u(u_0,v_0) + \lambda'\Phi_v(u_0,v_0), \quad \lambda,\lambda' \in \mathbb{R}$.
L'aire du parallélogramme ci dessus est ainsi:
$\|\Phi_u \times \Phi_v\|$.
On définit donc l'aire de la surface S par

$$\mathcal{A}(S) = \int_D \|\Phi_u \times \Phi_v\| \, d(u,v).$$

Si $\Phi(u,v) = (u,v,f(u,v))$ est une représentation cartésienne d'une surface S, on a:

$$\|\Phi_u \times \Phi_v\| = \sqrt{1+f_u^2+f_v^2} \qquad (*)$$

Preuve de $(*)$: $\Phi_u = (1,0,f_u)$, $\Phi_v = (0,1,f_v)$. Donc:
$\Phi_u \times \Phi_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & f_u \\ 0 & 1 & f_v \end{vmatrix} = (-f_u, -f_v, 1)$. Ainsi
$\|\Phi_u \times \Phi_v\| = \sqrt{1+f_u^2+f_v^2}$.
Exemple Demi-sphère S: $\quad (u,v,\sqrt{R^2-u^2-v^2}) = \Phi(u,v),\ u^2+v^2 < R^2 \quad \Longrightarrow$
$\|\Phi_u \times \Phi_v\| = \sqrt{1 + \left(\frac{-u}{\sqrt{R^2-u^2-v^2}}\right)^2 + \left(\frac{-v}{\sqrt{R^2-u^2-v^2}}\right)^2} = \sqrt{1+\frac{u^2+v^2}{R^2-u^2-v^2}} = \sqrt{\frac{R^2}{f^2(u,v)}} = \frac{R}{f(u,v)}$.
Donc $\mathcal{A}(S) = \displaystyle\int_{u^2+v^2<R^2} \frac{R}{f(u,v)} d(u,v) =$
$= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{R} \frac{R}{\sqrt{R^2-r^2}} r \, dr d\theta = -2\pi R(R^2-r^2)^{1/2}\Big|_0^R = 2\pi R^2$.
Donc l'aire de la sphère de rayon R est $4\pi R^2$.

B Intégrale de surface

Définition Soit $\Phi : D \to \mathbb{R}^3$, $S = \Phi(D)$ une surface non dégénérée, et $f : S \to \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée. Alors
$\int_S f d\sigma := \int_D f\big(\Phi(u,v)\big) \underbrace{\|\Phi_u \times \Phi_v\| d(u,v)}_{d\sigma}$.
En particulier, si $f \equiv 1$, on obtient l'aire de la surface S.

C Théorèmes du calcul intégral

Le premier résultat nous donne une formule de transformation d'une intégrale dans $\mathbb{R}^2$ en une intégrale curviligne.

Théorème 9.1. — *théorème de la divergence de Gauss-Ostrogradskii dans* $\mathbb{R}^2$

Soit D un ouvert connexe par arcs (i.e. $\forall P, Q \in D, \exists$ une courbe dans D joignant P avec Q) tel que la frontière ∂D de D soit une réunion de n courbes de Jordan fermées, disjointes 2 à 2, et continûment différentiables. Supposons que ces courbes $\gamma_1, \cdots, \gamma_m$ soient orientées de telle façon que le domaine se trouve à gauche du sens de parcours. Soit $f = (f_1, f_2) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ un champ vectoriel continûment différentiable dans un voisinage Ω de $\overline{D}$ et soit $\operatorname{div} f = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y}$ *la <u>divergence</u> de f; i.e. la trace de la Jacobienne J_f de f. Alors*

$$\int_D \operatorname{div} f \, d(x, y) = \int_{\partial D} f \cdot n ds = \sum_{j=1}^{m} \int_{\gamma_j} f \cdot n ds,$$

où n est la normale unitaire extérieure le long des courbes γ_j et ds est l'abscisse curviligne.

— — — — — — — — — — — —

Soit $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)$ une paramétrisation d'une de ces courbes orientées γ_j. Alors (Φ'_1, Φ'_2) est le vecteur directeur de la tangente à γ_j. En plus, $n = \dfrac{(\Phi'_2, -\Phi'_1)}{\|(\Phi'_2, -\Phi'_1)\|_2} = \left(\dfrac{\Phi'_2}{\sqrt{\Phi'^2_1 + \Phi'^2_2}}, -\dfrac{\Phi'_1}{\sqrt{\Phi'^2_1 + \Phi'^2_2}} \right)$ est la normale unitaire à γ_j.

Supposons que $\Gamma = \Phi([\alpha, \beta])$. Alors pour $f = (f_1, f_2)$ on obtient:

$\int_\Gamma f \cdot n \, ds =$

$= \int_\alpha^\beta \Big(f_1(\Phi(t)) \frac{\Phi'_2}{\sqrt{\Phi'^2_1 + \Phi'^2_2}} + f_2(\Phi(t)) \frac{-\Phi'_1}{\sqrt{\Phi'^2_1 + \Phi'^2_2}} \Big) \|\Phi'(t)\|_2 \, dt =$

$= \int_\alpha^\beta \Big(f_1(\Phi(t)) \Phi'_2(t) - f_2(\Phi(t)) \Phi'_1(t) \Big) dt =$

$= \int_\Gamma f_1 dy - f_2 dx$

où $dx = \Phi'_1(t) dt$ et $dy = \Phi'_2(t) dt$.

Corollaire 9.2. — *(formules de Green-Riemann)*

Soit $D \subseteq \mathbb{R}^2$ un domaine comme dans le théorème 9.1 et soit $P, Q : \Omega \supseteq \overline{D} \to \mathbb{R}$ des fonctions réelles continûment différentiables dans un voisinage de $\overline{D}$. Alors

$$\int_{\partial D} P dx + Q dy = \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d(x, y).$$

Dém. Choisir $f = (-Q, P)$ dans le théorème 9.1:

$\int_{\partial D}(-Qdy - Pdx) = \int_D(-Q_x + P_y)d(x,y)$.

Corollaire 9.3. — *(1) Soit D un domaine dans $\mathbb{R}^2$ délimité par une courbe de Jordan, fermée et continûment différentiable. Alors l'aire de D est donnée par:*

$$\text{mes}D = \frac{1}{2}\int_{\partial D} xdy - ydx,$$

la courbe étant orientée positivement (=sens contraire d'une montre).

(2) Si un arc de Jordan Γ est donnée par les coordonnées polaires $r = r(\theta)$, $\theta_0 \le \theta \le \theta_1$, alors l'aire de la figure D' ci-joint est donnée par

$$\text{mes}D' = \frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\theta_1} r^2(\theta)d\theta.$$

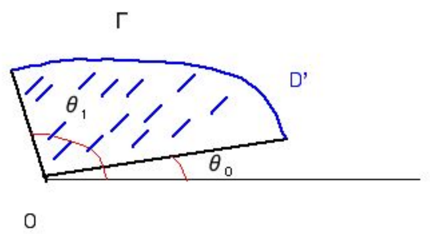

FIGURE 18. aire polaire

Dém (1) $\text{mes}D = \int_D 1\; d(x,y)$. Posons $Q(x,y) = x$ et $P(x,y) = -y$.
Alors, en vue de 9.2:
$\int_D 1\; d(x,y) = \frac{1}{2}\int_D(\underbrace{1}_{Q_x} - \underbrace{(-1)}_{P_y})d(x,y) =$
$= \frac{1}{2}\int_{\partial D}(-ydx + xdy)$.

(2) $x(\theta) = r(\theta)\cos\theta,\; y(\theta) = r(\theta)\sin\theta$. Donc $xdy - ydx = \Big(\big(r(\theta)\cos\theta\big)\big(r'(\theta)\sin\theta + r(\theta)\cos\theta\big)\Big)\; d\theta - \Big(\big(r(\theta)\sin\theta\big)\big(r'(\theta)\cos\theta - r(\theta)\sin\theta\big)\Big)\; d\theta = \big(r^2(\theta)\cos^2\theta + r^2(\theta)\sin^2\theta\big)\; d\theta = r^2(\theta)d\theta$. Ainsi

$\text{mes}D = \int_{\partial D} xdy - ydx = \Big(\int_\Gamma + \int_{[OA]} - \int_{[OB]}\Big)(xdy - ydx) = \int_{\theta_0}^{\theta_1} r^2(\theta)d\theta + 0 - 0$, car l'angle θ est constante sur les droites $[OA]$ et $[OB]$.

ex.• Calcul de l'aire du secteur $S = \{re^{i\theta} : 0 \le r \le R, \theta_0 \le \theta \le \theta_1\}$:
$\text{mes}S = \frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\theta_1} r^2(\theta)d\theta = \frac{1}{2}R^2(\theta_1 - \theta_0)$.
Si $\theta_0 = 0$ et $\theta_1 = 2\pi$, on obtient l'aire du disque: πR^2.

• Soit D le disque unité $x^2 + y^2 \le 1$ et $f(x,y) = (x+y, x^2)$. Calculer de deux façons différentes $\int_D \text{div} f(x,y)d(x,y)$.

i) $\int_D \mathrm{div} f(x,y) d(x,y) =$
$= \int_D \left(\frac{\partial}{\partial x}(x+y) + \frac{\partial}{\partial y} x^2 \right) d(x,y) =$
$= \int_D 1 \; d(x,y) = \pi.$

ii) ∂D, le cercle unité, est paramétrisé par $\Phi(t) = (\cos t, \sin t), 0 \leq t \leq 2\pi$. La normale extérieure est donnée par: $(\frac{d}{dt}(\sin t), -\frac{d}{dt}(\cos t))$. Donc:

$\int_D \mathrm{div} f(x,y) d(x,y) = \int_{\partial D} f \cdot n ds =$
$= \int_0^{2\pi} (\cos t + \sin t, \cos^2 t) \cdot (\cos t, \sin t) 1 dt =$
$= \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin t \cos t + \cos^2 t \sin t) dt =$
$= \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = \int_0^{2\pi} (\frac{1+\cos 2t}{2}) dt = \pi.$

• Soit D la couronne

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$$

et $f(x,y) = (x+y, x^2)$.
Calculer de deux façons différentes $\int_D \mathrm{div} f(x,y) d(x,y)$.

i) $\int_D \mathrm{div} f(x,y) d(x,y) = \int_D 1 d(x,y) = \mathrm{mes} D = 4\pi - \pi = 3\pi.$

ii) $\Gamma_1 : (2\cos t, 2\sin t) \; 0 \leq t \leq 2\pi$,
$\Gamma_2 : (\cos(2\pi - t), \sin(2\pi - t)) = (\cos t, -\sin t) \; 0 \leq t \leq 2\pi$,
(faites attention à l'orientation)
$n_1 = (\cos t, \sin t), \quad n_2 = (-\cos t, \sin t)$. Ainsi
$I = \int_D \mathrm{div} f(x,y) d(x,y) = \int_{\partial D} f \cdot n ds =$
$= (\underbrace{\int_{\Gamma_1} f \cdot n ds}_{I_1} + \underbrace{\int_{\Gamma_2} f \cdot n ds}_{I_2})$
où
$I_1 = \int_0^{2\pi} (2\cos t + 2\sin t, 4\cos^2 t)(\cos t, \sin t) 2 dt = 4\pi,$
$I_2 = \int_0^{2\pi} (\cos t - \sin t, \cos^2 t)(-\cos t, \sin t) dt = -\pi.$

Donc $I = I_1 + I_2 = 3\pi$.

Théorème 9.4. — *théorème de la divergence de Gauss-Ostrogradskii dans* $\mathbb{R}^3$

Soit $V \subseteq \mathbb{R}^3$ un corps "solide" dans l'espace de surface S. Alors sous certaines conditions, on a pour tout champ vectoriel $f = (f_1, f_2, f_3)$ continûment différentiable dans un voisinage de V la formule

$$\int_V \mathrm{div} f \; d(x,y,z) = \int_S f \cdot n \; d\sigma,$$

où n est la normale unitaire extérieure à la surface S.
Si $\Phi : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(u,v) \mapsto \Phi(u,v)$ est une paramétrisation de S, alors $n = \dfrac{\Phi_u \times \Phi_v}{\|\Phi_u \times \Phi_v\|_2}$. *Ainsi*

$$\int_S f\cdot n\, d\sigma =$$

$= \int_D f(\Phi(u,v))\cdot \dfrac{\Phi_u\times\Phi_v}{\|\Phi_u\times\Phi_v\|_2}\big(\|\Phi_u\times\Phi_v\|_2\big)d(u,v) =$
$= \int_D f(\Phi(u,v))\cdot(\Phi_u\times\Phi_v)d(u,v).$

— — — — — — — — — —

En d'autres mots, l'intégrale de surface de la composante normale d'un champ vectoriel f sur une surface S est égale à l'intégrale de la divergence de f prise dans le volume enclos par la surface.

ex. • Soit V la demi-boule $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2\le 1, z\ge 0\}$, $f(x,y,z)=(x,y,z)$ et soit S la surface de V. S comprend deux parties:
$S_1=\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2=1, z\ge 0\}$ et
$S_2=\{(x,y,z): x^2+y^2\le 1, z=0\}$.
Donc
$\int_V \mathrm{div} f\ d(x,y,z)=\int_V 3d(x,y,z)=3\mathrm{mesV}=3(\frac{4}{3}\pi 1^3)\frac{1}{2}=2\pi$,
$\int_S f\cdot nd\sigma=\int_{S_1} f\cdot nd\sigma+\int_{S_2} f\cdot nd\sigma$ où
$\int_{S_1} f\ \cdot\ nd\sigma=\int_{u^2+v^2\le 1} f(u,v,\sqrt{1-u^2-v^2})\cdot$
$\Big[(1,0,\frac{-u}{\sqrt{1-u^2-v^2}})\times(0,1,\frac{-v}{\sqrt{1-u^2-v^2}})\Big]\ d(u,v)=$
$=\int_D (u,v,\sqrt{1-u^2-v^2})\left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2-v^2}},\frac{v}{\sqrt{1-u^2-v^2}},1\right)d(u,v)=$
$=\int_D\left(\frac{u^2}{\sqrt{1-u^2-v^2}}+\frac{v^2}{\sqrt{1-u^2-v^2}}+\sqrt{1-u^2-v^2}\right)d(u,v)=$
$=\int_{u^2+v^2\le 1}\frac{1}{\sqrt{1-u^2-v^2}}d(u,v)=\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-r^2}}rdrd\theta=-2\pi\sqrt{1-r^2}|_0^1=2\pi$ et
$\int_{S_2} f\cdot nd\sigma=\int_{u^2+v^2\le 1} f(u,v,0)\cdot(0,0,-1)d(u,v)=0.$

Définition Soit $f=(f_1,f_2,f_3)$ un champ vectoriel continûment différentiable sur un ouvert $\Omega\subseteq\mathbb{R}^3$. Alors le <u>rotationel</u> de f est le vecteur

$\mathrm{rot} f=\nabla\times f=\left(\frac{\partial f_3}{\partial y}-\frac{\partial f_2}{\partial z},\frac{\partial f_1}{\partial z}-\frac{\partial f_3}{\partial x},\frac{\partial f_2}{\partial x}-\frac{\partial f_1}{\partial y}\right).$

Ces coordonnées sont données par le schéma suivant:

$$\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ f_1 & f_2 & f_3\end{vmatrix}.$$

Théorème 9.5. — *théorème de Stokes dans* $\mathbb{R}^3$

Soit Γ *une courbe de Jordan orientée, fermée et continûment différentiable dans* $\mathbb{R}^3$ *et donnée par la paramétrisation* $\tau:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}^3$. *Soit* S *une surface non dégénérée dans* $\mathbb{R}^3$, *donnée par le paramétrage* $\Phi:\overline{D}\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, *et dont le "bord" est égal à la courbe* Γ. *Supposons que* D *est un domaine dans* $\mathbb{R}^2$

tel que la frontière de D soit une courbe γ de Jordan, fermée et C^1, donnée par la paramétrisation $\Psi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$ tel que que $\tau = \Phi \circ \Psi$.

Alors pour tout champ vectoriel $f : S \to \mathbb{R}^3$, $f = (f_1, f_2, f_3)$ continûment différentiable dans un voisinage de S, on a la formule:
$\int_\Gamma f \cdot (dx, dy, dz) = \int_\Gamma f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz =$
$= \int_S \big(\text{rot} f\big) \cdot n \, d\sigma,$
où $\text{rot} f$ *est le rotationel de f et où n est la normale unitaire "extérieure" à la surface S.*

$- - - - - - - - - - - -$

En utilisant les paramétrisations, on obtient:
$\int_S \Big((\text{rot} f) \circ \Phi(u,v) \Big) \cdot \frac{\Phi_u \times \Phi_v}{\|\Phi_u \times \Phi_v\|} \, \|\Phi_u \times \Phi_v\| \, d(u,v) =$
$= \int_S \Big((\text{rot} f) \circ \Phi(u,v) \Big) \cdot \Big(\Phi_u \times \Phi_v \Big) \, d(u,v)$ et
$\int_\Gamma f \cdot (dx, dy, dz) = \int_\alpha^\beta f(\tau(t)) \cdot \tau'(t) dt.$
En d'autres mots, l'intégrale curviligne de la composante tangentielle d'un champ vectoriel f prise le long d'une courbe Γ de Jordan fermée est égale à l'intégrale de surface de la composante normale de $\text{rot} f$ prise sur une surface *quelconque* S ayant pour bord la courbe Γ.

ex. • Soit Γ le cercle $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$ et soit S la demi-sphère $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$. Alors Γ est le bord de S. En se propose de vérifier le théorème Stokes pour cette surface S et le champ vectoriel $f(x,y,z) = (y, z, x)$.

Notons d'abord que S est paramétrisée par:
$\Phi(u,v) = (u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2}), \; u^2 + v^2 \leq 1.$

On a $\text{rot} f = \begin{vmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \frac{\mathbb{D}}{\partial x} & \frac{\mathbb{D}}{\partial y} & \frac{\mathbb{D}}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix} = (-1, -1, -1).$

Donc $\int_S \big(\text{rot} f\big) \cdot n \, d\sigma =$
$= \int_{u^2+v^2 \leq 1} (-1,-1,-1) \left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2-v^2}}, \frac{v}{\sqrt{1-u^2-v^2}}, 1 \right) d(u,v) =$
$= \int_{u^2+v^2 \leq 1} \left(\frac{-u-v}{\sqrt{1-u^2-v^2}} - 1 \right) d(u,v) =$
$= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{1} \left[\frac{-r\cos\theta - r\sin\theta}{\sqrt{1-r^2}} - 1 \right] r dr d\theta =$
$= \int_{r=0}^{1} \int_{\theta=0}^{2\pi} \left(\frac{-r^2}{\sqrt{1-r^2}} \right) (\cos\theta - \sin\theta) d\theta dr - \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{1} 1 r dr d\theta = 0 - \pi = -\pi.$

D'autre part $\int_\Gamma f\cdot(dx,dy,dz)=\int_\Gamma(ydx+zdy+xdz)=\int_0^{2\pi}[(\sin t)(-\sin t)+0+0]dt=-\int_0^{2\pi}\sin^2 t dt=-\pi$.

• Considérons maintenant comme surface le cylindre semi-fermé $C=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2=1, 0\le z\le R\}\bigcup\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2\le 1, z=R\}$. Notons que le bord est la courbe Γ ci-dessus. On obtient

$$\int_C \big(\mathrm{rot} f\big)\cdot n\, d\sigma=\int_M+\int_B,$$

où M est le manteau du cylindre et B sa base supérieure.
$\int_B \big(\mathrm{rot} f\big)\cdot n\, d\sigma=\int_B(-1,-1,-1)(0,0,1)d\sigma=-\mathrm{mes}\, B=-\pi$.
Paramétrisation du manteau: $\Phi(u,v)=(\cos u,\sin u, v)$,
$0\le u\le 2\pi, 0\le v\le R$. Comme $\Phi_u=(-\sin u,\cos u,0)$ et $\Phi_v=(0,0,1)$, on a: $\Phi_u\times\Phi_v=(\cos u,\sin u,0)$. Donc:

$$\int_M \big(\mathrm{rot} f\big)\cdot n\, d\sigma=$$

$$=\int_{\substack{0\le u\le 2\pi\\ 0\le v\le R}}(-1,-1,-1)\cdot(\cos u,\sin u,0)d(u,v)=$$

$$=-\int_{v=0}^{R}\Big[\int_{u=0}^{2\pi}(\cos u+\sin u)du\Big]dv=0.$$

Ainsi $=\int_M+\int_B=-\pi+0=-\pi$, donc de nouveau

$\int_\Gamma f\cdot(dx,dy,dz)=\int_C\big(\mathrm{rot} f\big)\cdot n\, d\sigma$.

• Considérons finalement la demi-sphère $S_-=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2=1, z\le 0\}$. Elle est paramétrisée par:
$\Phi(u,v)=(u,v,-\sqrt{1-u^2-v^2}),\ u^2+v^2\le 1$.

Comme dans ce cas la normale n à la surface est l'opposée de celle du premier cas, on obtient
$\int_{S_-}\big(\mathrm{rot} f\big)\cdot n\ d\sigma=-\int_S\big(\mathrm{rot} f\big)\cdot n\ d\sigma=\pi$. Calculons maintenant $\int_\Gamma f\cdot(dx,dy,dz)$, où Γ est le bord de S_-. Cette fois ci, il faut parcourir Γ dans le sens inverse, ce qui donne la paramétrisation suivante:

$\tau(t)=(\cos(2\pi-t),\sin(2\pi-t),0)$ et $(dx,dy,dz)=(\sin(2\pi-t),-\cos(2\pi-t),0)\ dt$.
On voit que $\tau(t)=(\cos t,-\sin t,0)$ et $(dx,dy,dz)=$
$=(-\sin t,-\cos t,0)\ dt$. Donc
$\int_\Gamma f\cdot(dx,dy,dz)=\int_\Gamma(y,z,x)(dx,dy,dz)=\int_\Gamma\sin^2 t dt=\pi$.

10. Formes différentielles

A Applications multilinéaires

Soit $\phi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^q$ une application linéaire, i.e. $\phi(\lambda u+\lambda' u')=\lambda\phi(u)+\lambda'\phi(u')$, où $\lambda,\lambda'\in\mathbb{R},\ u,u'\in\mathbb{R}^n$.
D'après le théorème sur la représentation matricielle, il existe une matrice $A\in\mathcal{M}(q\times n,\mathbb{R})$ telle que $\phi(u)=Au$. Si $q=1$, on parle d'une forme linéaire.
Dans ce cas on a:

$A = (a_1, \cdots, a_n)$, $(a_j \in \mathbb{R})$ et $Au = (a_1, \cdots, a_n) \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^n a_j h_j$.

- *formes bilinéaires*: $\phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est dite <u>bilinéaire</u> si pour chaque $u \in \mathbb{R}^n$ fixe, l'application $\phi(u, \cdot) : \begin{cases} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ v \mapsto \phi(u,v) \end{cases}$ est linéaire, et si pour chaque $v \in \mathbb{R}^n$ fixe, l'application $\phi(\cdot, v) : \begin{cases} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ u \mapsto \phi(u,v) \end{cases}$ est linéaire.

- *formes multilinéaires*: $\phi : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_{r\text{-fois}} \to \mathbb{R}$ est dite

<u>r-linéaire</u>, si pour tout $j \in \{1, \cdots, r\}$ et pour tous $u_1, \cdots, u_{j-1}, u_{j+1}, \cdots, u_r$ fixes, les r applications

$\phi(u_1, \cdots, u_{j-1}, \bullet, u_{j+1}, \cdots, u_r) : \begin{cases} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ u \mapsto \phi(u_1, \cdots, u_{j-1}, u, u_{j+1}, \cdots, u_r) \end{cases}$ sont linéaires.

On dit qu'une forme r-linéaire est <u>alternée</u>, si elle change de signe quand on permute deux de ses composantes:

$\phi(\cdots, u_i, \cdots, u_j, \cdots) = -\phi(\cdots, u_j, \cdots, u_i, \cdots)$.
(Notons que les u_j sont des vecteurs dans $\mathbb{R}^n$)

Notons aussi que ceci implique que si deux des variables u_j coïncident, alors $\phi(\cdots, u, \cdots, u, \cdots) = 0$ (parce que, en permutant ces deux variables, cette image doit être son propre opposé).

ex. • Evidemment chaque forme linéaire est alternée.

- $r = n$: $\phi(u_1, \cdots, u_n) = \det(u_1, \cdots, u_n) =$

$$\begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \cdots & h_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ h_{n1} & h_{n2} & \cdots & h_{nn} \end{vmatrix}$$

- $1 \leq r \leq n$: $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leq n$

$$\phi(u_1, \cdots, u_r) = \begin{vmatrix} h_{i_1 1} & \cdots & \cdots & h_{i_1 r} \\ h_{i_2 1} & \cdots & \cdots & h_{i_2 r} \\ \vdots & & & \vdots \\ h_{i_r 1} & \cdots & \cdots & h_{i_r r} \\ \overset{u_1}{\uparrow} & & & \overset{u_r}{\uparrow} \end{vmatrix}.$$

Ceci sont des formes r-linéaires alternées sur $\mathbb{R}^n$. Elles sont notées par

$$dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_r}$$

$(1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leq n,\ 1 \leq r \leq n.$

$\wedge$ s'appelle le produit extérieur.

Proposition 10.1 (i) Supposons que $1 \leq r \leq n$. Alors chaque forme r-linéaire alternée Φ sur $\mathbb{R}^n$ est une combinaison linéaire de ces formes r-linéaires canoniques, i.e.
$(*)$ $\Phi = \sum_{1\leq i_1<i_2<\cdots<i_r\leq n} a_{i_1,\cdots,i_r} dx_{i_1}\wedge dx_{i_2}\wedge\cdots\wedge dx_{i_r}$,
$a_{i_1,\cdots,i_r} \in \mathbb{R}$.

(ii) Si $r > n$, alors la forme nulle est la seule forme r-linéaire alternée.

Remarques: (1) Les nombres $a_{i_1,\cdots,i_r}$, $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leq n$ s'appellent les coefficients de la forme alternée $(*)$.

(2) Si $r = 1$, on obtient donc qu'une forme linéaire Φ s'écrit comme

$\Phi = \sum_{j=1}^n a_j dx_j$, en d'autres mots $\Phi(u) = \Phi(\begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}) = \sum_{j=1}^n a_j h_j$.

Dém. de (ii): Soit $\{e_1,\cdots,e_n\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et supposons que $u_1,\cdots,u_r \in \{e_1,\cdots,e_n\}$, $r > n$. Alors au moins deux des r variables $u_1,\cdots,u_r$ coïncident. Donc $\Phi(u_1,\cdots,u_r) = 0$. Comme $\Phi : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_{r>n} \to \mathbb{R}$ est déterminée de façon unique par les images des bases canoniques $\{e_1,\cdots,e_n\}$ de $\mathbb{R}^n$, on conclut que $\Phi \equiv 0$.

Définition (1) Soit $1 \leq r \leq n$. Si les coefficients $a_{i_1,\cdots,i_r}$ d'une forme r-linéaire alternée Φ sur $\mathbb{R}^n$ sont des fonctions à n variables définies sur un domaine $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, alors on parle d'une forme différentielle de degré r sur Ω.

(2) Si $r = 0$, alors, par convention, chaque fonction réelle $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est considérée comme une forme différentielle de degré 0.

Récapitulatif • $a(y) : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (forme différentielle de degré 0)
• $\omega_1 = a_1(y)dx_1 + a_2(y)dx_2 + \cdots + a_n(y)dx_n$ (forme différentielle de degré 1),
• $\omega_2 = \sum_{1\leq i_1<i_2\leq n} a_{i_1,i_2}(y)dx_{i_1}\wedge dx_{i_2}$ (forme différentielle de degré 2)

Ici $a(y), a_j(y)$ et $a_{i_1,i_2}(y)$ sont des fonctions définies sur $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$.
Cas spéciaux:

n=2: $\omega_1 = Pdx + Qdy \quad (P, Q : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R})$
degré 1,

n=3: $\omega_1 = Pdx + Qdy + Rdz \quad (P, Q, R : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R})$ degré 1,
$\omega_2 = Pdy\wedge dz + Qdz\wedge dx + Rdx\wedge dy$ degré 2,
$\omega_3 = P(dx\wedge dy\wedge dz)$ degré 3 .

(Faites attention à l'ordre cyclique des variables).

Règles de calcul

(1) Deux formes différentielles Ω et ω' sur $\mathbb{R}^n$ sont égales si elles ont le même degré et si leurs coefficients sont égaux.

(2) $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i, \quad$ et $\quad dx_i \wedge dx_i = 0,$
(3) produit de deux formes différentielles:
a) produit avec une fonction a (=forme différentielle de degré 0):
$a \cdot \omega = a \cdot \sum_{(i)} a_{i_1,i_2,\cdots,i_r} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_r} =$
$= \sum_{(i)} a\, a_{i_1,i_2,\cdots,i_r} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_r},$

b) $\omega = \sum_{(i)} a_{i_1,i_2,\cdots,i_r} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_r}$, (deg r),
$\omega' = \sum_{(j)} b_{j_1,j_2,\cdots,j_q} dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_q}$, (deg q),
alors $\Omega \wedge \omega' =$

$$\sum_{(i)} \sum_{(j)} a_{i_1,i_2,\cdots,i_r} b_{j_1,j_2,\cdots,j_q} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_r} \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_q},$$

où $\sum_{(i)}$ veut dire qu'on fait la sommation sur tous les multi-indices ordonnés $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leq n$; de même pour $(j):\ 1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_q \leq n$.

Le produit extérieur $\Omega \wedge \omega'$ d'une forme différentielle de degré r avec une forme différentielle de degré q est donc une forme différentielle de degré $r+q$.

Attention: le produit extérieur n'est pas commutatif!

(4) $\Omega \wedge \omega' = (-1)^{rr'} \omega' \wedge \Omega$ si $\deg \omega = r$ et $\deg \omega' = r'$.
(5) $\quad \Omega \wedge (\omega' \wedge \omega'') = (\Omega \wedge \omega') \wedge \omega''$ (associativité).

ex. Dans $\mathbb{R}^3$:
• $\omega = 2dx \wedge dy - (3x+y) dx \wedge dz + 5 dy \wedge dx - e^x dz \wedge dy = (2-5) dx \wedge dy + e^x dy \wedge dz + (3x+y) dz \wedge dx$ (deg=2).

• $(Pdx + Qdy + Rdz) \wedge (P'dx + Q'dy + R'dz) = PQ' dx \wedge dy + PR' dx \wedge dz + QP' dy \wedge dx + QR' dy \wedge dz + RP' dz \wedge dx + RQ' dz \wedge dy =$
$= (PQ' - P'Q) dx \wedge dy + (QR' - Q'R) dy \wedge dz + (RP' - R'P) dz \wedge dx.$

Les coefficients de cette forme de degré 2 sont les coordonnées du produit vectoriel $(P,Q,R) \times (P',Q',R') = (QR' - Q'R, RP' - R'P, PQ' - P'Q)$.

• Dans $\mathbb{R}^2$:
$\omega = Pdx + Qdy,\ \omega' = P'dx + Q'dy \quad \Longrightarrow \quad \Omega \wedge \omega' = PQ' dx \wedge dy + QP' dy \wedge dx = (PQ' - P'Q) dx \wedge dy,$

Le coefficient de cette forme de degré 2 est égal au déterminant de $\begin{pmatrix} P & Q \\ P' & Q' \end{pmatrix}$.

$\omega' \wedge \omega = P'Q dx \wedge dy + Q'P dy \wedge dx = (P'Q - PQ') dx \wedge dy = -\Omega \wedge \omega'.$

Soit en plus $\omega'' = P''dx + Q''dy$. Alors $(\Omega \wedge \omega') \wedge \omega'' = \Big((PQ' - P'Q) dx \wedge dy \Big) \wedge (P''dx \wedge Q''dy) =$
$(PQ' - P'Q) P'' dx \wedge dy \wedge dx + (PQ' - P'Q) Q'' dx \wedge dy \wedge dy = 0.$

B différentielle extérieure d'une forme différentielle

Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ et soit Ω une forme différentielle de degré 0 sur Ω, donc $\omega = f$. Supposons que $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$. Rappelons que la différentielle de f en $x_0 \in \Omega$ est l'application linéaire $d_{x_0} f$ donnée par $u \in \mathbb{R}^n \mapsto \text{grad } f(x_0) \cdot u$ (produit matricielle), i.e.

$$\begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} \mapsto \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_j} h_j.$$

Donc $df = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j$.

Ceci est la *différentielle extérieure* de la forme différentielle Ω de degré 0. Cette nouvelle forme différentielle à le degré $0 + 1 = 1$. En général:

Définition *Différentielle extérieure*
Soit

$$\omega = \sum_{(i)} a_{i_1,i_2,\cdots,i_r} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_r}$$

une forme différentielle de degré r sur $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Supposons que les coefficients $a_{i_1,i_2,\cdots,i_r}$ soient dans $C^1(\Omega, \mathbb{R})$. Alors la <u>différentielle extérieure</u> de Ω est la forme différentielle

$$d\omega = \sum_{(i)} d\, a_{i_1,i_2,\cdots,i_r} \wedge dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_r}.$$

Elle a le degré $r + 1$.

ex. • <u>$n = 2$</u>
$\omega = Pdx + Qdy \quad (\deg\omega = 1) \Longrightarrow d\omega = dP \wedge dx + dQ \wedge dy = \left(\frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy\right) \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial y} dy\right) \wedge dy = \frac{\partial P}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial Q}{\partial x} dx \wedge dy = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy.$

• <u>$n = 3$</u>
(i) $\omega = Pdx + Qdy + Rdz \quad (\deg \omega = 1) \Longrightarrow d\omega = dP \wedge dx + dQ \wedge dy + dR \wedge dz = \cdots = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz \wedge dx.$

On voit que les coefficients de $d\Omega$ sont les composantes du rotationel du champ vectoriel (P, Q, R), i.e. si $d\omega = Ady \wedge dz + Bdz \wedge dx + Cdx \wedge dy$ alors $(A, B, C) = \text{rot } (P, Q, R) = \nabla \times (P, Q, R)$, où $\nabla = (\frac{\mathbb{D}}{\partial x}, \frac{\mathbb{D}}{\partial y}, \frac{\mathbb{D}}{\partial z})$.

(ii) $\omega = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy \quad (\deg \omega = 2) \Longrightarrow d\omega = dP \wedge dy \wedge dz + dQ \wedge dz \wedge dx + dR \wedge dx \wedge dy = \left(\frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz\right) \wedge dy \wedge dz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial y} dy + \frac{\partial Q}{\partial z} dz\right) \wedge dz \wedge dx + \left(\frac{\partial R}{\partial x} dx + \frac{\partial R}{\partial y} dy + \frac{\partial R}{\partial z} dz\right) \wedge dx \wedge dy = \frac{\partial P}{\partial x} dx \wedge dy \wedge dz + \frac{\partial Q}{\partial y} dy \wedge dz \wedge dx + \frac{\partial R}{\partial z} dz \wedge dx \wedge dy = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx \wedge dy \wedge dz = \text{div } (P, Q, R)\ dx \wedge dy \wedge dz.$

(Notons que $dy \wedge (dz \wedge dx) = dy \wedge (-dx \wedge dz) =$
$= (dy \wedge (-dx)) \wedge dz = dx \wedge dy \wedge dz$.

Proposition 10.1 Soient Ω et ω' des formes différentielles sur $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ de classe C^1. Alors

(1) $d(\omega + \omega') = d\omega + d\omega'$ si Ω et ω' ont le même degré,
(2) $d(\lambda\omega) = \lambda d\Omega$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

(3) $d(\Omega\wedge\omega') = d\Omega\wedge\omega' + (-1)^r\Omega\wedge d\omega'$, où $r = \deg \Omega$.

Proposition 10.2 Soit $F = (f_1, \cdots, f_n)$ un champ vectoriel continûment différentiable sur un ouvert $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Alors $df_1\wedge\cdots\wedge df_n = \det J_F \; dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n$.

Dém (cas $n = 2$):
$df\wedge dg = \left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right) \wedge \left(\frac{\partial g}{\partial x}dx + \frac{\partial g}{\partial y}dy\right) =$
$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}\right) dx\wedge dy = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} dx\wedge dy = \det J_{(f,g)} \; dx\wedge dy.$

C Différentielle extérieure double

Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un ouvert et soit (P, Q, R) un champ vectoriel de classe $C^2(\Omega, \mathbb{R})$. Considérons la forme différentielle $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$ de degré 1. Alors $d\omega = Ady\wedge dz + Bdz\wedge dx + Cdx\wedge dy$, où $(A, B, C) = \text{rot } (P, Q, R)$ et
$d(d\omega) = dA\wedge dy\wedge dz + dB\wedge dz\wedge dx + dC\wedge dx\wedge dy = \text{div } (A, B, C)dx\wedge dy\wedge dz = \text{div rot } (P, Q, R)dx\wedge dy\wedge dz$.
Mais comme $A = R_y - Q_z$, $B = P_z - R_x$ et $C = Q_x - P_y$ on obtient: d'après Schwarz:

$\text{div}(A, B, C) = R_{yx} - Q_{zx} + P_{zy} - R_{xy} + Q_{xz} - P_{yz} = 0.$
donc $\text{div rot}(P, Q, R) = 0$

Donc $d(d\omega) = 0$.

Théorème 10.1. — *(Théorème de Poincaré I)*
Soit Ω une forme différentielle de degré r sur $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Supposons que les coefficients de Ω soient dans $C^2(\Omega, \mathbb{R})$. Alors $dd\omega = 0$.

Définition Une forme différentielle Ω est dite fermée, si $d\omega = 0$, Ω est dite exacte s'il existe une forme différentielle ω' telle que $d\omega' = \Omega$.

Remarque (1) Une condition nécessaire pour que Ω de degré r, $0 < r \leq n$ soit exacte, est que $d\omega = 0$. Preuve: Soit ω' tq $d\omega' = \Omega$. Alors d'après Poincaré: $0 = dd\omega' = d\Omega$.

(2) Ω exacte $\Longrightarrow$ Ω fermée. La réciproque n'est pas vraie (voir ci-dessous).

relations avec les primitives

Soit $f = (P, Q, R)$ un champ vectoriel continûment différentiable sur un ouvert $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$. On suppose que f possède une primitive $F : \Omega \to \mathbb{R}$, i.e. grad $F = f$, donc

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P, \; \frac{\partial F}{\partial y} = Q, \; \frac{\partial F}{\partial z} = R.$$

Une condition nécessaire pour l'existence d'une primitive était que les conditions d'intégrabilités soient satisfaites, i.e

$$P_y = Q_x, \; P_z = R_x, \; Q_z = Ry$$

i.e. rot $(P, Q, R) = 0$. Les lignes suivantes vont montrer que ceci est une conséquence du théorème de Poincaré:

Notons que $dF = F_x dx + F_y dy + F_z dz = Pdx + Qdy + Rdz$ et que d'après Poincaré
$0 = ddF = (R_y - Q_z)dy \wedge dz + (P_z - R_x)dz \wedge dx + (Q_x - P_y)dx \wedge dy.$
Donc on obtient: rot $f =$ rot grad $F = 0$.

Théorème 10.2. — *(Théorème de Poincaré II)*
Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert qui est homéomorphe à une boule dans $\mathbb{R}^n$ (p. ex. un ouvert convexe). Soit Ω une forme différentielle dans Ω à coefficients continûment différentiable. Supposons que Ω soit fermée, i.e. $d\omega = 0$. Alors Ω est exacte, i.e. il existe ω' tq. $d\omega' = \Omega$.

Remarque Si Ω est une forme différentielle de degré 1, on obtient notre ancienne assertion qu'un champ vectoriel C^1 posséde une primitive sur $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ si Ω est convexe et si les conditions d'intégrabilités sont vérifiées.

ex. • Soit $\omega = \big(2x + y\cos(xy)\big)dx + x\cos(xy)dy$ (sur $\mathbb{R}^2$, deg $\omega = 1$).
Q1. Est-ce que Ω est fermée?
Q2. Est-ce que Ω est exacte? Si oui, déterminer ω' tq $d\omega' = \Omega$.

Dans ce cas cela revient à déterminer une primitive de $(2x+y\cos(xy), x\cos(xy))$.

R1. $d\omega = d(2x+y\cos(xy)) \wedge dx + d(x\cos(xy)) \wedge dy = (\cos(xy) - yx\sin(xy))dy \wedge dx + (\cos(xy) - xy\sin(xy))dx \wedge dy = 0$.
Donc Ω est fermée.

R2. Ω est exacte, car $\mathbb{R}^2$ est convexe et $d\omega = 0$.
Cherchons ω': D'abord on constate que le degré de ω' est 0, donc $\omega' = F$. Ainsi $d\omega' = \Omega \iff [F_x = 2x + y\cos(xy)$ et $F_y = x\cos(xy)]$.
Donc $F(x, y) = \sin(xy) + C(x) \implies F_x = y\cos(xy) + C'(x) \overset{!}{=} 2x + y\cos(xy) \implies C'(x) = 2x \implies C(x) = x^2 + C$.
Donc $F(x, y) = \sin(xy) + x^2 + C$.

D Intégration de formes différentielles

Définition (1) Soit $\omega_1 = Pdx + Qdy$ une forme différentielle de degré 1 où P et Q sont continues sur $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ et soit Γ une courbe C^1 dans Ω donnée par la paramétrisation $\Phi(t) = (x(t), y(t)), \quad \alpha \le t \le \beta$. Alors

$\int_\Gamma \omega_1 = \int_\Gamma Pdx + Qdy = \int_\alpha^\beta \Big[P(x(t), y(t))\dot{x}(t) + Q(x(t), y(t))\dot{y}(t)\Big]dt$

(2) De même, si $\omega_1 = f_1 dx_1 + \cdots f_n dx_n$ est une forme différentielle de degré 1 dans $\mathbb{R}^n$ ($f_j \in C(\Omega, \mathbb{R})$, et si Γ est une courbe dans Ω paramétrisée par $\Phi(t) = (x_1(t), \cdots, x_n(t)), \quad \alpha \le t \le \beta$, alors pour $f = (f_1, \cdots, f_n)$ et $dx = (dx_1, \cdots, dx_n)$ on a:

$\int_\Gamma \omega_1 = \int_\Gamma f(x) \cdot dx = \int_\Gamma \sum_{j=1}^n f_j dx_j =$

$= \int_\alpha^\beta \sum_{j=1}^n f_j(t)\dot{x}_j(t)dt.$

Définition (1) Soit $\omega_2 = Pdy{\wedge}dz + Qdz{\wedge}dx + Rdx{\wedge}dy$ une forme différentielle de degré 2 dans $\mathbb{R}^3$, $P, Q, R \in C(\Omega, \mathbb{R})$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$, et soit S la surface dans $\mathbb{R}^3$ donnée par la paramétrisation $\Phi(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)), \quad (u,v) \in D$, D domaine mesurable dans $\mathbb{R}^2$. Alors on définit

$\int_S \omega_2 = \int_S Pdy{\wedge}dz + Qdz{\wedge}dx + Rdx{\wedge}dy =$
$= \int_D \Big\{ P(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \det \frac{\partial(y,z)}{\mathbb{D}(u,v)} +$
$Q(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \det \frac{\partial(z,x)}{\mathbb{D}(u,v)} +$
$R(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \det \frac{\partial(x,y)}{\mathbb{D}(u,v)} \Big\} d(u,v),$

où
$\frac{\partial(y,z)}{\mathbb{D}(u,v)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}$ est la matrice jacobienne de $(y(u,v), z(u,v))$.

(2) Soit $\omega_3 = f\ dx{\wedge}dy{\wedge}dz$ une forme différentielle de degré 3 dans $\mathbb{R}^3$ ($f \in C(\Omega, \mathbb{R})$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$). Supposons que V soit un corps solide dans $\mathbb{R}^3$ donnée par les coordonnées $(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)), \quad |u| \leq 1, |v| \leq 1, |w| \leq 1.$
Alors $\int_V \omega_3 = \int_V f dx{\wedge}dy{\wedge}dz =$
$\int f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) \det \frac{\mathbb{D}(x,y,z)}{\mathbb{D}(u,v,w)}\ d(u,v,w),$
où $\frac{\mathbb{D}(x,y,z)}{\mathbb{D}(u,v,w)}$ est la matrice jacobienne du champ vectoriel (x,y,z).

Définition Une variété V_p de degré p dans $\mathbb{R}^n$, où $1 \leq p \leq n$, est l'image d'une application (appellée paramétrisation de V_p) continûment différentiable $\Phi(t_1, \cdots, t_p) = \begin{pmatrix} x_1(t_1, \cdots, t_p) \\ \vdots \\ x_n(t_1, \cdots, t_p) \end{pmatrix}$ de $\{(t_1, \cdots, t_p) : |t_j| < 1\}$ dans $\mathbb{R}^n$, tq la jacobienne de Φ a partout le rang p (Notons que $J_\Phi \in \mathcal{M}(n \times p, \mathbb{R})$).

Le bord de V_p, noté par ∂V_p, est l'image par rapport à Φ du bord du pavé $\{(t_1, \cdots, t_p) : |t_j| < 1\}$.

Théorème 10.3. — *Théorème de Stokes (généralisé)*
Soit V_p une variété de degré p dans $\mathbb{R}^n$ $(1 \leq p \leq n)$. et soit ω_{p-1} une forme différentielle de classe C^1 et de degré $p-1$ dans $\mathbb{R}^n$. Alors

$$\int_{\partial V_p} \omega_{p-1} = \int_{V_p} d\omega_{p-1}.$$

Conséquences: On retrouve le théorème de Gauss-Ostrogradskii, Stokes et les formules de Green-Riemann:

<u>n=2</u> deg $\omega = p - 1 = 1, V_2 \subseteq \mathbb{R}^2$: (Green-Riemann)
$\omega = Pdx + Qdy \Longrightarrow \int_{\partial V_2} Pdx + Qdy = \int_{V_2} d(Pdx + Qdy) =$
$= \int_{V_2} (P_x dx + P_y dy){\wedge}dx + (Q_x dx + Q_y dy){\wedge}dy =$

$= \int_{V_2} \big(-P_y + Q_x\big) dx{\wedge}dy = \int (Q_x - P_y) \det \frac{\mathbb{D}(x,y)}{\mathbb{D}(u,v)}\, d(u,v) = \int_{V_2} (Q_x - P_y) d(x,y)$;
la dernière égalité provenant du changement de variables.

<u>n=3</u> $\deg \omega = p - 1 = 2, V_3 \subseteq \mathbb{R}^3$: (Gauss-Ostrogradskii)
$\omega = P dy{\wedge}dz + Q dz{\wedge}dx + R dx{\wedge}dy \Longrightarrow \int_{\partial V_3} P dy{\wedge}dz + Q dz{\wedge}dx + R dx{\wedge}dy =$
$= \int P(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \det \frac{\mathbb{D}(y,z)}{\mathbb{D}(u,v)}\, d(u,v) +$
$+ \int Q(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \det \frac{\mathbb{D}(z,x)}{\mathbb{D}(u,v)}\, d(u,v) +$
$+ \int R(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \det \frac{\mathbb{D}(x,y)}{\mathbb{D}(u,v)}\, d(u,v) =$
$= \int f(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \cdot (\Phi_u \times \Phi_v) d(u,v) =$
$= \int_{\partial V_3} f \cdot n\, d\sigma$,
où $\Phi(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ est une paramétrisation de ∂V_3
$f = (P, Q, R)$ et où n est la normale extérieure à la surface ∂V_3.

D'autre part:
$\int_{V_3} d\omega = \int_{V_3} d(P dy{\wedge}dz + Q dz{\wedge}dx + R dx{\wedge}dy) =$
$= \int_{V_3} \operatorname{div}\,(P, Q, R) dx{\wedge}dy{\wedge}dz =$
$= \int_{V_3} \operatorname{div}\,(P, Q, R) d(x,y,z)$.

$\deg \omega = p - 1 = 1, V_2 \subseteq \mathbb{R}^3$: (Stokes)
$\omega = P dx + Q dy + R dz \Longrightarrow \int_{\partial V_2} \omega = \int_{\partial V_2} P dx + Q dy + R dz$
et $\int_{V_2} d\omega = \int_{V_2} A dy{\wedge}dz + B dz{\wedge}dx + C dy{\wedge}dz =$
$= \int_{V_2} \operatorname{rot}\,(P, Q, R) \cdot n\, d\sigma$,
où $(A, B, C) = \operatorname{rot}\,(P, Q, R)$.

$- - - - - - - - - - - - - -$

ex. Soit $f \in C^1(\mathbb{R}), f(0) = 1$ et $\omega(x,y,z) = 2xy dy{\wedge}dz - f(y) dz{\wedge}dx + 2z dx{\wedge}dy$.

- Déterminer f tq Ω soit fermée:

$d\omega = (2y - f'(y) + 2) dx{\wedge}dy{\wedge}dz \overset{!}{=} 0 \Longleftrightarrow f'(y) = 2 + 2y \Longleftrightarrow f(y) = C + 2y + y^2$.
Comme $f(0) = 1$, on a: $f(y) = (1+y)^2$.

- Montrer que dans ce cas pour tout $A \in C^1(\mathbb{R})$ il existe une forme différentielle ω' de degré 1 avec
$\omega' = A(x) dx + B(x,z) dy + C(x,y) dz$ et $d\omega' = \Omega$.

<u>Sol.</u>: Notons que Poincaré nous dit qu'il existe dans le cas où Ω est fermée une forme différentielle Ω de la forme
$\Omega = \alpha(x,y,z) dx + \beta(x,y,z) dy + \gamma(x,y,z) dz$
tq $d\Omega = \Omega$. Ce qu'on veut ici, c'est que A ne dépend que de x, que B ne dépend pas de la variable y et C ne dépend pas de la variable z.

$d\omega' = B_x dx{\wedge}dy - B_z dy{\wedge}dz + (-C_x dz{\wedge}dx + C_y dy{\wedge}dz) =$
$= B_x dx{\wedge}dy - C_x dz{\wedge}dx + (C_y - B_z) dy{\wedge}dz \overset{!}{=} \omega =$

$= 2z dx{\wedge}dy - (1+y)^2 dz{\wedge}dx + 2xy dy{\wedge}dz$

$$\iff \begin{cases} B_x = 2z & (1) \\ C_x = (1+y)^2 & (2) \\ C_y - B_z = 2xy & (3) \end{cases}.$$

(système d'équations différentielles partielles.)

$(1) \Longrightarrow B(x,z) = 2zx + M(z)$
$(2) \Longrightarrow C(x,y) = x(1+y)^2 + K(y) = x + 2xy + xy^2 + K(y)$
Dans (3): $(2x + 2xy + K'(y)) - (2x + M'(z)) = 2xy \iff K'(y) - M'(z) \equiv 0$. Comme K' ne dépend pas de z et M' ne dépend pas de y, ceci n'est vrai que si $K' \equiv 0$ et $M' \equiv 0$, i.e. K et M sont des fonctions constantes. Choisissons ces constantes comme étant égales à 0. Donc:

$A(x)$ quelconque, $B(x,z) = 2zx$, $C(x,y) = x(1+y)^2$.

Preuve: $d\Big(A(x)dx + 2zxdy + x(1+y)^2dz\Big) = \Omega$.

• Calculer dans le cas où Ω est fermée l'intégrale $\int_S \Omega$, où S est la sphère $\{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 = r^2\}$.

Sol.: Soit V la boule $\{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \le r^2\}$. Alors $S = \partial V$. Ainsi Stokes implique que $I = \int_S \omega = \int_V d\Omega$. Comme Ω est fermée, on voit que $d\omega = 0$. Donc $I = 0$.

• Calculer dans le cas où Ω est fermée et $A(x) = 2x$, l'intégrale $\int_S (A,B,C)\cdot n d\sigma$, n étant la normale extérieure à la sphère S.

Sol.: Gauss: $\int_S (A,B,C)\cdot n d\sigma = \int_V \mathrm{div}(A,B,C) d(x,y,z) = \int_V (2+0+0) d(x,y,z) = 2\mathrm{mes}\, V = 2\frac{4}{3}\pi r^3$.

ex• Soit $u \in C^2(\mathbb{R}^3)$. Montrer que div grad $u = \Delta u$ et que pour chaque boule ou pavé V de surface S on a:

$\int_V \Delta u d(x,y,z) = \int_S \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma$,
où n est la normale unitaire extérieure à V.

Sol.: grad $u = (u_x, u_y, u_z) \Longrightarrow$ div grad $u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = \Delta u$.

$\int_V \Delta u d(x,y,z) = \int_V \mathrm{div\ grad}\, u d(x,y,z)$
$\overset{Gauss}{=} \int_S \mathrm{grad}\, u \cdot n\, d\sigma = \int_S \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma$.

Remarque: Si u est une fonction harmonique, alors $\int_S \mathrm{grad}\, u \cdot n\, d\sigma = 0$.

10.4.2012