EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ET CALCUL INTÉGRAL

1. Equations différentielles du premier ordre

On sait que la dérivée de $h(x) = e^x$ est égale à e^x. Est-ce qu'il existe d'autres fonctions $y = y(x)$ tel que $y' = y$? Ceci nous mène à la notion d'équation différentielle (par convention, on écrit la lettre y au lieu de h pour symboliser ces fonctions).

Définition 1. (1) Soit $f : D = I \times J \to \mathbb{R}$ une fonction de 2 variables réelles, I, J des intervalles dans $\mathbb{R}$. Considérons l'équation différentielle du premier ordre

$$(*) \qquad\qquad y' = f(x, y).$$

Alors on appelle solution de $(*)$ toute fonction y différentiable sur un intervalle $I_0 \subseteq I$ avec $y(x) \in J$ pour tout $x \in I_0$ et $y'(x) = f(x, y(x)), x \in I_0$.

(2) Si en plus une solution y de $(*)$ satisfait $y(x_0) = y_0$, où $(x_0, y_0) \in D$ est un point fixé, alors on dit que y est solution de l'équation différentielle à valeur initiale

$$(AVI) \qquad\qquad \begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

Exemples

- $y(x) = Ce^x - x - 1$ est une solution de $y' = y + x$, $\forall C \in \mathbb{R}$.
- $y(x) = e^{x-1}$ est une solution de l'AVI

$$\begin{cases} y' = y \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

- Toutes les solutions de $y' = y$ sont données par $y(x) = ce^x$, où $c \in \mathbb{R}$ est une constante :

Preuve. Soit u une solution de $u' = u$. Considérons $v(x) = e^{-x}u(x)$. Alors $v'(x) = e^{-x}(-u(x) + u'(x)) = 0$; donc $v \equiv c$. Ainsi $u(x) = ce^x$.

Problèmes à traiter :

(1) Existence de solutions des AVI $y' = f(x, y), y(x_0) = y_0$;
(2) Unicité des solutions ;
(3) Représentation explicite des solutions ;
(4) recherche d'algorithme/formules pour trouver les solutions.

Théorème 1.1. *(Peano)*
Soient I, J des intervalles ouverts, $(x_0, y_0) \in D$ et $f : D = I \times J \to \mathbb{R}$ continue. Alors l'AVI $\;y' = f(x, y),\;\; y(x_0) = y_0\;$ admet une solution, définie sur un intervalle ouvert $I_0 \subseteq I$ avec $x_0 \in I$. Le graphe de (chaque) solution marche de la frontière à la frontière de D. Si la dérivée partielle f_y existe et si f_y est continue sur D, alors la solution est unique.

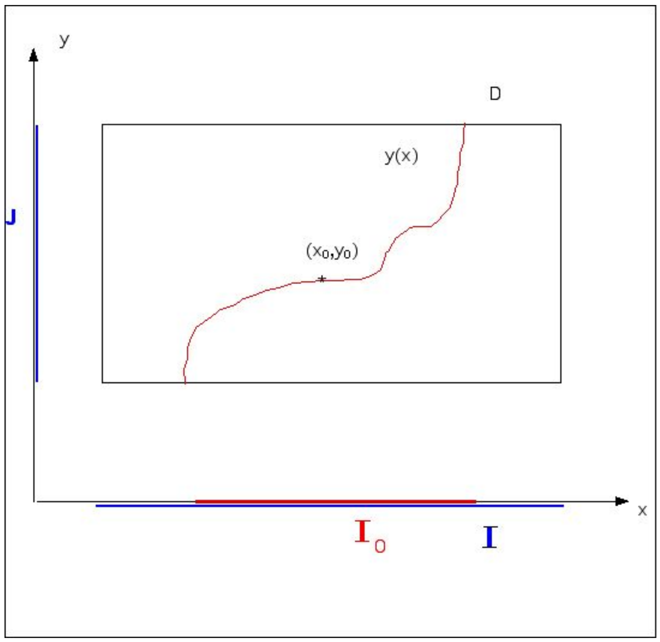

FIG. 1. graphe d'une solution

La pente de la tangente à la courbe $y(x)$ au point (x_0, y_0) est égale à $f(x_0, y_0)$; i.e. $\tan \mu = y'(x_0) = f(x_0, y_0)$ où μ est l'angle que la tangente fait avec l'axe horizontale.

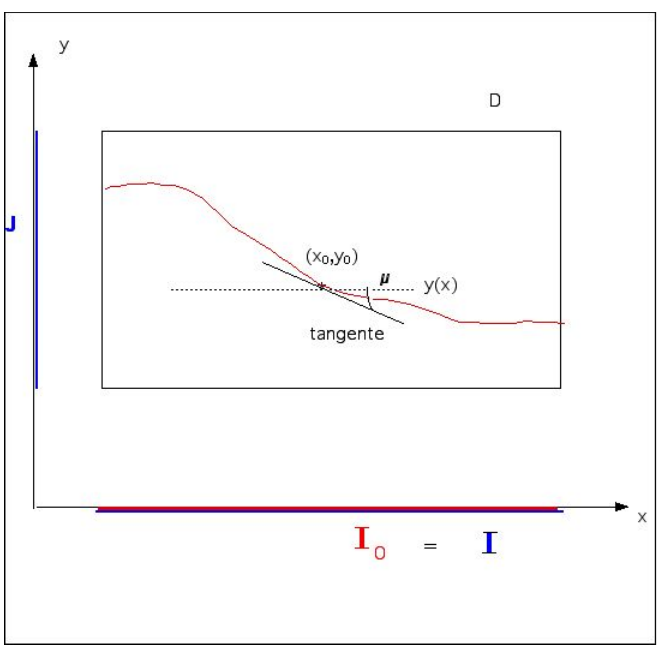

FIG. 2. tangente en (x_0, y_0) d'une solution

En général, les solutions de certaines AVI ne sont pas uniques :

Exemple 1.2. $y' = \sqrt{|y|}$, $y(0) = 0$. Alors $y_1(x) \equiv 0$,

$$y_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \left(\frac{x}{2}\right)^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

et

$$y_3(x) = \begin{cases} -\left(\frac{x}{2}\right)^2 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

sont trois solutions.

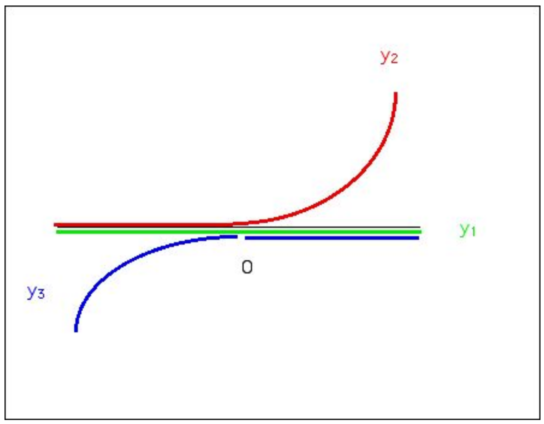

FIG. 3. exemple

Preuve. Pour y_3 : Notons d'abord que y_3 est bien différentiable en 0.
Si $x < 0$: $y_3(x) = -\frac{x^2}{4} \Longrightarrow y_3'(x) = -\frac{x}{2} = \sqrt{|y_3(x)|}$.

Notons que $y(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^2$ n'est pas une solution, car $y' \geq 0$; donc y doit être croissante.

1.1. **Equations différentielles à variables séparées.**

On appelle ainsi une équation différentielle de la forme

$$\boxed{y' = f(x)g(y)}$$

où $f : I =]a, b[\to \mathbb{R}$ et $g : J =]c, d[\to \mathbb{R}$ sont deux fonctions continues avec $g(\eta) \neq 0$ pour tout $\eta \in]c, d[$.

Théorème 1.3. *(1) Soit F une primitive de f et G une primitive de $\frac{1}{g}$. Une fonction $y : I_0 \to \mathbb{R}$ est une solution de $y' = f(x)g(y)$ sur $I_0 \subseteq I$ si et seulement si*

$$\forall x \in I_0 : \quad G(y(x)) = F(x) + C,$$

où C est une constante.

(2) Pour tout $(x_0, y_0) \in I \times J$, il existe dans un voisinage $I_0 \subseteq I$ de x_0 une solution unique de l' AVI

$$\begin{cases} y' = f(x)g(y) \\ y(x_0) = x_0 \end{cases}.$$

Elle est donnée par la formule

$$y(x) = G^{-1}(H(x)),$$

où $H(x) = F(x) + (G(y_0) - F(x_0))$.

Preuve. (1) $\frac{d}{dx}(G(y(x)) - F(x)) = G'(y(x))y'(x) - F'(x)$
$= \dfrac{1}{g(y(x))}y'(x) - f(x) \overset{!}{=} 0 \Longleftrightarrow y'(x) = f(x)g(y(x))$.

(2) Soit y une solution. S.p.g. $g > 0$ sur J. Alors $\frac{y'(x)}{g(y(x))} = f(x)$. En intégrant, on obtient :

$$\int_{x_0}^{x} f(t)dt = \int_{x_0}^{x} \frac{y'(t)}{g(y(t))}dt \underset{s=y(t)}{=} \int_{y_0}^{y(x)} \frac{ds}{g(s)}.$$

Donc $F(x) - F(x_0) = G(y(x)) - G(y_0)$ et ainsi $G(y(x)) = F(x) + (G(y_0) - F(x_0)) = H(x)$. Comme $G' = 1/g > 0$, G admet une inverse G^{-1} définie sur l'intervalle $G(J)$. Notons que $H(x_0) = G(y_0)$. Alors pour tout x proche de x_0, disons $x_0 \in I_0$, $H(x)$ est proche de $G(y_0)$; en particulier $H(x) \in G(J)$. Ainsi

$$y(x) = G^{-1}(H(x)).$$

Exemple 1.4. $y' = \dfrac{-x}{y}, y(1) = -1$
$D = \mathbb{R}\times]-\infty, 0[$; $(1, -1) \in D$.
$y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-x}{y} \Longleftrightarrow \displaystyle\int y dy = \int -x dx \Longleftrightarrow \frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + C \Longleftrightarrow y^2 = 2C - x^2 \Longleftrightarrow y = \pm\sqrt{2C - x^2}$.
Comme la valeur de la solution en 1 est n'égative, on doit continuer avec les solutions de la forme $-\sqrt{2C - x^2}$.
$y(1) = -1 \Longleftrightarrow -1 = -\sqrt{2C - 1} \Longleftrightarrow 2C - 1 = 1 \Longleftrightarrow C = 1$.
Solution unique : $y(x) = -\sqrt{2 - x^2}$. Intervalle maximal d'existence :
$2 - x^2 > 0 \Longleftrightarrow x^2 < 2 \Longleftrightarrow |x| < \sqrt{2}$; donc $I_0 =]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$. Notons bien que $x_0 = 1 \in I_0$.

Il n'est pas toujours possible de calculer explicitement les solutions, car l'inverse d'une primitive de $1/g$ n'admet en général pas de représentation avec l'aide de fonctions familières (polynômes ; racines ; exponentiel ; logarithme, etc).

Exemple 1.5. $y' = \dfrac{x^2(1 + y)}{y^2(1 - x)}, y(0) = 1$

$D =]-\infty, 1[\times]0, \infty[$, $(0,1) \in D$.
$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{x^2(1+y)}{y^2(1-x)} \iff \int \frac{y^2}{1+y}dy = \int \frac{x^2}{1-x}dx$
$\iff \int((y-1) + \frac{1}{1+y})dy = \int(-x-1+\frac{1}{1-x})dx$
$\iff \frac{1}{2}y^2 - y + \log|1+y| = -\frac{1}{2}x^2 - x - \log|1-x| + C.$
En remplaçant (x,y) par $(0,1)$ on obtient :

$$\frac{1}{2} - 1 + \log 2 = C.$$

La solution unique est donnée sous forme implicite

$$\frac{x^2+y^2}{2} + x - y + \log|(1+y)(1-x)| = \log 2 - \frac{1}{2}.$$

1.2. **Equation différentielle homogène du premier ordre.** On appelle ainsi une équation différentielle de la forme

$$\boxed{y' = f(\frac{y}{x})}$$

où f est une fonction continue sur un intervalle ouvert $I \subseteq \mathbb{R}$.

Proposition 1.6. *En substituant $w(x) = \frac{y(x)}{x}$, on obtient une équation différentielle à variables séparées.*

Preuve. $w = \frac{y}{x} \iff y = xw$; notons que y et w sont des fonctions en x ; x est la variable indépendente.
$f(w) = y' = \frac{dy}{dx} = xw' + w \iff w' = \frac{f(w)-w}{x}$.

Exemple 1.7. Pour $y' = \frac{y}{x}$ on prend $f(t) = t$. Alors avec $w = \frac{y}{x}$ on obtient $w' = \frac{w-w}{x} \equiv 0$. Ainsi $w = w(x) \equiv C$, C une constante. Donc $y = wx = Cx$.
Contrôle : $y' = C \overset{!}{=} \frac{Cx}{x}$, $x \neq 0$.

Exemple 1.8. $y' = \dfrac{y}{x} - \dfrac{x^2}{y^2}, \quad y(1) = 1$
$D =]0, \infty[\times]0, \infty[$, $(1,1) \in D$.
On prend $f(t) = t - \frac{1}{t^2}$. Alors avec $w = \frac{y}{x}$ on obtient $w' = \frac{w - \frac{1}{w^2} - w}{x} = -\frac{1}{w^2}\frac{1}{x}$.
Donc $\int w^2 dw = -\int \frac{dx}{x} \iff \frac{1}{3}w^3 = -\log|x| + C$
$y(1) = 1 \iff w(1) = \frac{y(1)}{1} = 1$.
$\implies \frac{1}{3}1^3 = -\log 1 + C \implies C = \frac{1}{3}$ (on peut laisser de côté les valeurs absolues, car on est intéressé à une solution dans un voisinage de $x_0 = 1$).
Donc $\frac{1}{3}w^3 = \frac{1}{3} - \log x \implies \left(\frac{y}{x}\right)^3 = 1 - 3\log x \implies y^3 = x^3(1 - 3\log x) \implies$

$$y = x\sqrt[3]{1 - 3\log x}.$$

L'intervalle maximal où la solution existe est : $I_0 =]0, \sqrt[3]{e}[$.
Contrôle : $y' = \sqrt[3]{1 - 3\log x} + x\frac{1}{3}(1 - 3\log x)^{-\frac{2}{3}}(\frac{-3}{x}) = \frac{y}{x} - \frac{x^2}{y^2}$.

1.3. **Les équations différentielles linéaires du premier ordre.** On appelle ainsi une équation différentielle de la forme

$$\boxed{(*) \qquad y' = a(x)y + b(x)}$$

où a et b sont des fonctions continues sur un intervalle ouvert $I \subseteq \mathbb{R}$. Si $b \equiv 0$, l'équation est dite homogène, sinon inhomogène. L'équation $y' = a(x)y$ s'appelle l'équation différentielle homogène associée à $(*)$

Théorème 1.9.
(1) Soit A une primitive de a sur I. Alors l'équation différentielle homogène $y' = a(x)y$ possède comme solution générale $y_h(x) = ce^{A(x)}$, où $c \in \mathbb{R}$.

(2) L'ensemble de toutes les solutions de $(*)$ $\;y' = a(x)y + b(x)$ est égal à l'ensemble des fonctions $y(x) = y_h(x) + y_p(x) = ce^{A(x)} + y_p(x)$, où $c \in \mathbb{R}$ et où y_p est une solution particulière de $(*)$. y_p est donnée par

$$y_p(x) = e^{A(x)} \int b(x)e^{-A(x)}dx.$$

(3) Soit $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. Alors l' AVI

$$\begin{cases} y' = a(x)y + b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

admet la solution unique

$$y(x) = e^{A(x)} \left(y_0 + \int_{x_0}^{x} b(t)e^{-A(t)}dt \right),$$

où $A(x) = \int_{x_0}^{x} a(t)dt$ est la primitive de a qui s'annulle en x_0.

Preuve. (1) On voit bien que y_h est une solution de $y' = a(x)y$. Soit u une solution de $u' = a(x)u$ et $y(x) = e^{A(x)}$. Alors $\frac{d}{dx}\frac{u(x)}{y_h(x)} = \frac{y_h(x)u'(x) - u(x)y_h'(x)}{y_h(x)^2} = \frac{y_h(x)a(x)u(x) - u(x)a(x)y_h(x)}{y_h(x)^2} \equiv 0$ Donc $\frac{u(x)}{y_h(x)} \equiv C$ est une fonction constante. Ainsi $u(x) = Cy(x) = Ce^{A(x)}$.

Comment on arrive a une telle formule ? Si $y \neq 0$, $\frac{dy}{dx} = y' = a(x)y \iff \int \frac{dy}{y} = \int a(x)dx \iff \log\lvert y\rvert = A(x) + c \iff$ $\lvert y\rvert = e^c e^{A(x)}$.

A posteriori on voit que si $y(x_0) = 0$ pour un $x_0 \in I$, où y est une solution de $y' = a(x)y$, alors $y \equiv 0$.

(2) $y_p'(x) = e^{A(x)}a(x)\int b(x)e^{-A(x)}dx + e^{A(x)}b(x)e^{-A(x)} = a(x)y_p(x) + b(x)$. Donc y_p est une solution de $y' = a(x)y + b(x)$.

$(y_h(x) + y_p(x))' = a(x)y_h(x) + a(x)y_p(x) + b(x) = a(x)(y_h(x) + y_p(x)) + b(x)$. Donc $y_h + y_p$ est une solution de $y' = a(x)y + b(x)$.

Soit u une solution de $u' = a(x)u + b(x)$ et soit k la fonction auxiliaire définie par

$$k = e^{-A}(u - y_p).$$

Alors $k' = e^{-A}(u' - y_p') - e^{-A}a(u - y_p) = e^{-A}(u' - y_p' - au + ay_p) =$
$= e^{-A}(\underbrace{(u' - au)}_{=b} - (\underbrace{(y_p' - ay_p)}_{=b}) \equiv 0$. Donc $k \equiv c$ (une constante).
Ainsi $u = ce^A + y_p$.

(3) D'abord on voit que d'après (2), $y_p(x) = e^{A(x)}\left(y_0 + \int_{x_0}^{x} b(t)e^{-A(t)}dt\right)$ est une solution de l'AVI. Soit u une autre solution. Alors (2) $\Longrightarrow u = ce^A + y_p$ pour un $c \in \mathbb{R}$. Mais, $y_0 = u(x_0) = ce^{A(x_0)} + y_p(x_0) = ce^0 + y_0 = c + y_0$. Donc $c = 0$. Ainsi $u = y_p$.

Méthode pratique pour déterminer une solution de $y' = a(x)y + b(x)$

Ou bien on utilise les formules ci-dessus ou bien on utilise la méthode de la variation de la constante :

• 1^{ere} étape : on résout l'équation homogène $y' = a(x)y$. Soit $y_h(x) = e^{\int a(x)dx}$ une solution de $y' = a(x)y$. La solution générale a donc la forme : $cy_h(x), c \in \mathbb{R}$.

• 2^{me} étape : Considérons c comme une fonction de x.
On pose $y_p(x) = c(x)y_h(x)$. Alors $y_p' = c'y_h + cy_h'$. Mais $y_p' = ay_p + b$; donc $c'y_h + cy_h' = a(cy_h) + b$. D'autre part, $y_h' = ay_h$; Ainsi $c'y_h = b$. Donc $c' = be^{-\int a(x)dx} \Longrightarrow c = \int be^{-\int a(x)dx} \Longrightarrow y_p = y_h c = e^{\int a(x)dx} \int be^{-\int a(x)dx}$.
• 3^{me} étape : Solution général : $cy_h + y_p$.

Exemple 1.10. $y' = 2y + e^x, \quad y(0) = 1$

• $y_h' = 2y_h \Longrightarrow y_h = ce^{2x}$
• $y_p(x) = c(x)y_h(x) = c(x)e^{2x}$
$y_p' = c'e^{2x} + 2ce^{2x} \stackrel{!}{=} 2y_p + e^x = 2ce^{2x} + e^x \Longleftrightarrow c'e^{2x} = e^x$
$\Longleftrightarrow c' = e^{-x} \Longleftrightarrow c(x) = -e^{-x}$.
Donc $y_p(x) = -e^{-x}e^{2x} = -e^x$ est une solution paticulière.
• Solution générale : $y(x) = cy_h(x) + y_p(x) = ce^{2x} - e^x, c \in \mathbb{R}$.
• AVI : $1 = y(0) = ce^0 - e^0 = c - 1 \Longleftrightarrow c = 2$;
donc $y(x) = 2e^{2x} - e^x$ est la solution unique de l'AVI.
Contrôle : $y'(x) = 4e^{2x} - e^x = 2y(x) + e^x$.

1.4. **L'équation différentielle de Bernoulli.**
On appelle ainsi l'équation

$$\boxed{y' + p(x)y + q(x)y^\alpha = 0}$$

où $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}, p, q \in C(I), I \subseteq \mathbb{R}$ intervalle ouvert.

Théorème 1.11. *Pour résoudre l'équation différentielle de Bernoulli on substitue $u(x) = y(x)^{1-\alpha}$. Alors on obtient l'équation différentielle linéaire en u :*

$$u' = (\alpha - 1)pu + (\alpha - 1)q.$$

Preuve. On divise $y' + py + qy^\alpha = 0$ par y^α. Alors

$$\frac{y'}{y^\alpha} + py^{1-\alpha} + q = 0.$$

Ensuite, en multipliant par $1 - \alpha$, on a

$$(1-\alpha)\frac{y'}{y^\alpha} + (1-\alpha)py^{1-\alpha} + (1-\alpha)q = 0.$$

Avec $u = y^{1-\alpha}$ et donc

$$u' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y' = (1-\alpha)\frac{y'}{y^\alpha},$$

on obtient :

$$u' + (1-\alpha)pu + (1-\alpha)q = 0.$$

Exemple 1.12.
$(1 + x)y' + y + (1 + x)^2y^4 = 0$, $y(2) = 1/3$, resp. $y(0) = -1$.
Mettons sous forme canonique : $y' + \frac{1}{1+x}y + (1 + x)y^4 = 0$. Alors $\alpha = 4$. Divisons par y^4 : $\frac{y'}{y^4} + \frac{1}{1+x}\boxed{y^{-3}} + (1 + x) = 0$. En posant $u = y^{-3}$ on obtient : $u' = (-3)y^{-4}y'$. Donc

$$u' + (-3)\frac{1}{1+x}u + (-3)(1+x) = 0 \Longrightarrow u' = \frac{3}{1+x}u + 3(1+x).$$

Solution générale : $u(x) = c(1 + x)^3 - 3(1 + x)^2$, $c \in \mathbb{R}$.

$$\Longrightarrow y(x) = u(x)^{-1/3} = \frac{1}{\sqrt[3]{c(1+x)^3 - 3(1+x)^2}}$$

AVI $y(2) = 1/3$: $\frac{1}{3} = \frac{1}{\sqrt[3]{c(3)^3 - 3(3)^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{27(c-1)}} \Longleftrightarrow c = 2$.
Donc

$$y_1(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{2(1+x)^3 - 3(1+x)^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{(1+x)^2(2x-1)}}$$

est une (la) solution de l'AVI. L'intervalle maximal contenant $x_0 = 2$ et où y est une solution est $]1/2, \infty[$.

AVI $y(0) = -1$: Ici on doit noter que la racine cubique d'une nombre négatif est bien définie !

$-1 = \frac{1}{\sqrt[3]{c(1)^3-3(1)^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{c-3}} \Longleftrightarrow c = 2$. Donc y_1 est de nouveau une (la) solution de l'AVI. L'intervalle maximal contenant $x_0 = 0$ et où y est une solution est maintenant $]-1, 1/2[$.

2. Equations différentielles d'ordre supérieur

Définition 2. Soit $F : D \subseteq \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}$ une fonction à $n+2$-variables. Une équation différentielle d'ordre n est une équation de la forme

$$(*) \qquad F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) \equiv 0.$$

Une fonction $y = y(x)$ définie sur un intervalle ouvert $I_0 \subseteq \mathbb{R}$ est une solution de $(*)$ si

(1) y est n-fois différentiable sur I_0 ;
(2) $\forall x \in I_0$ on a : $(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n)}(x)) \in D$;
(3) $\forall x \in I_0$ on a : $F(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n)}(x)) \equiv 0$.

Une équation différentielle d'ordre n est donnée sous forme *explicite* si

$$(**) \qquad y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}),$$

où $f : D' \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$.
Si en plus une solution y de $(**)$ satisfait

$$\begin{cases} y(x_0) & = & y_0 \\ y'(x_0) & = & y_1 \\ y''(x_0) & = & y_2 \\ \cdots & & \cdots \\ y^{(n-1)}(x_0) & = & y_{n-1} \end{cases}$$

où $(x_0, y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}) \in D'$, alors on dit que $y = y(x)$ est une solution de l'AVI

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \quad y^{(j)}(x_0) = y_j, \quad j = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Exemple 2.1.

$$y'' + 2y' + y = 0$$

solutions : $y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}, C_j \in \mathbb{R}$.

2.1. **Equations différentielles de la forme.** $\boxed{y'' = f(x, y')}$

Proposition 2.2. *La substitution $y' = u$ donne une équation différentielle du premier ordre en u ; à savoir $u' = f(x, u)$.*

Exemple 2.3.
$y'' = y'+1 \Longrightarrow u' = u+1 \Longrightarrow \int \frac{du}{u+1} = \int dx \Longrightarrow \log|u+1| = x+c \Longrightarrow |u+1| = e^{x+c} \Longrightarrow u = K_1 e^x - 1 \Longrightarrow y = \int u dx = \int (K_1 e^x - 1) dx = K_1 e^x - x + K_2$.
preuve $y' = K_1 e^x - 1, y'' = K_1 e^x \Longrightarrow y'' = y' + 1$.

2.2. Equations différentielles de la forme. $\boxed{y'' = f(y, y')}$

Proposition 2.4. *La substitution $y'(x) = u(y(x))$ nous mène à une équation différentielle du premier ordre, à savoir*

$$\frac{du}{dy} = \frac{f(y,u)}{u}$$

Preuve. On considère y' comme fonction de y : $y' = u(y) \Longrightarrow y''(x) = u'(y(x))y'(x) = u'(y)\,u \Longrightarrow \frac{du}{dy} = \frac{f(y,u)}{u}$.

Exemple 2.5.
$y'' = 2(y^3 + y), \quad y(0) = 0, y'(0) = 1$

$y' = u(y) \Longrightarrow y'' = u'(y)y' = \frac{du}{dy}u \overset{!}{=} 2(y^3 + y) \Longrightarrow \int u du = 2\int (y^3 + y)dy \Longrightarrow$

$\frac{1}{2}u^2 = \frac{1}{2}y^4 + y^2 + C \overset{!}{=} \frac{1}{2}(y')^2$

$x = 0 \Longrightarrow \frac{1}{2} \cdot 1^2 = 0 + 0 + C \Longrightarrow C = \frac{1}{2}$
$\Longrightarrow (y')^2 = y^4 + 2y^2 + 1 = (1 + y^2)^2 \Longrightarrow y' = \pm(1 + y^2)$
$y'(0) > 0 \Longrightarrow$ signe $+$: donc $y' = (1 + y^2)$
$\Longrightarrow \int \frac{dy}{1+y^2} = \int dx \Longrightarrow \arctan y = x + C$
$y(0) = 0 \Longrightarrow 0 = \arctan 0 + C \Longrightarrow C = 0 \Longrightarrow \arctan y = x \Longrightarrow y = \tan x$.
$I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

<u>Contrôle</u> : $y' = 1 + \tan^2 x, y'' = 2\tan x(1 + \tan^2 x) = 2y + 2y^3$

2.3. Equations différentielles de la forme. $\boxed{y'' = f(y)}$

En multipliant $y'' = f(y)$ par $2y'$ on obtient $2y'y'' = f(y)2y'$. Donc, si F est une primitive de f,

$$\frac{d}{dx}(y')^2 = ((y')^2)' = 2f(y)y' = 2\frac{d}{dx}(F(y(x)).$$

$\Longrightarrow \frac{1}{2}(y')^2 - F = C \Longrightarrow y' = \pm\sqrt{2C + 2F}$.

Exemple 2.6. $y'' = 2(y^3 + y), \quad y(0) = 0, y'(0) = 1$

$\Longrightarrow 2y'y'' = 4y'(y^3 + y) \Longrightarrow ((y')^2)' = (y^4 + 2y^2)' \Longrightarrow (y')^2 = y^4 + 2y^2 + C$.
Le reste comme ci-dessus.

2.4. Equations différentielles linéaires d'ordre n.

On appelle ainsi une équation différentielle de la forme

$$\boxed{(*) \quad y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)},$$

où les a_j et b sont des fonctions continues sur un intervalle ouvert I.
On pose

$$Ly = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y.$$

C'est l'opérateur différentielle associé à $(*)$. $(*)$ s'écrit donc : $\boxed{Ly = b}$.
L est une application linéaire de $C^n(I)$ dans $C(I)$:
$L(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha L y_1 + \beta L y_2$.
Si $b(x) \equiv 0$, $\forall x \in I$, alors l'équation différentielle $(*)$ est dite *homogène*, sinon *inhomogène*.

Théorème 2.7. *Soit L un opérateur différentielle d'ordre n, $x_0 \in I, (y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$. Alors l'AVI*

$$\begin{cases} Ly = b \\ y^{(j)}(x_0) = y_j, j = 0, 1, \ldots, n-1 \end{cases}$$

possède une solution unique dans I.

Soit $\delta_{j,k} = 1$ si $j = k$ et $\delta_{j,k} = 0$ si $j \neq k$, $j, k \in \mathbb{N}$ (symbol de Kronecker) et $e_j = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{j^{\text{me}}}, 0, \ldots, 0)$ un des vecteurs de la base canonique $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de $\mathbb{R}^n$.

Théorème 2.8.

(1) *Soit u_p une solution particulière de l'équation différentielle linéaire $Ly = b$ d'ordre n. Alors, si y_h parcourt toutes les solutions de l'équation homogène $Ly = 0$, alors $y = y_h + u_p$ parcourt toutes les solutions de $Ly = b$.*

(2) *$S = \{y \in C^n(I) : Ly = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $C^n(I)$ de dimension n.*

(3) *Soit $x_0 \in I$ fixé et soit y_j* **la** *solution de l'AVI $Ly_j = 0$, $\;y_j^{(k)}(x_0) = \delta_{j,k}$, $j = 1, 2, \ldots, n, k = 0, 1, \ldots n-1$. Donc*

$$(y_j(x_0), y_j'(x_0), \ldots, y_j^{(j)}(x_0), \ldots, y_j^{(n-1)}(x_0)) = e_j$$

Alors $\{y_1, \ldots, y_n\}$ est une base de S.

Remarque : la dimension de l'espace vectoriel $C^n(I)$ est infini, parce que les polynômes $p(x) = x^j$, $(j \in \mathbb{N})$, sont linéairement indépendantes.

Corollaire 2.9. *a) La solution générale de $Ly = b$ est*

$$y = u_p + C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n,$$

où $C_j \in \mathbb{R}$ et u_p est une solution particulière de $Ly = b$.
b) Si $\{v_1, \ldots, v_n\}$ sont n-solutions linéairement indépendantes de $Ly = 0$, alors la solution générale de $Ly = b$ peut s'écrire aussi sous la forme

$$y = u_p + C_1 v_1 + C_2 v_2 + \cdots + C_n v_n.$$

Définition 3. a) Un système $\{v_1, \ldots, v_n\}$ de n solutions de $Ly = 0$, où

$$Ly = y^{(n)} + a_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x) y' + a_0(x) y$$

s'appelle un *système fondamental* si les v_j sont linéairement indépendantes.

Chaque système fondamental est donc une base de l'espace vectoriel $S = \operatorname{Ker} L$ des solutions de $Ly = 0$.

b) Soit $\{v_1, \cdots, v_n\}$ un ensemble de solutions de $Ly = 0$. Le *déterminant de Wronski* est le déterminant $W(x) := W_{(v_1,\ldots,v_n)}(x)$ de la matrice

$$\begin{pmatrix} v_1(x) & v_2(x) & \cdots & v_n(x) \\ v_1'(x) & v_2'(x) & \cdots & v_n'(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ v_1^{(n-1)}(x) & v_2^{(n-1)}(x) & \cdots & v_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

Théorème 2.10. *Les solutions $v_1, \ldots, v_n$ de $Ly = 0$ sont linéairements indépendantes $\Longleftrightarrow W_{(v_1,\cdots,v_n)}(x) \neq 0 \quad \forall x \in I$.*

Exemple 2.11. $Ly = y'' - \frac{1}{2x}y' + \frac{1}{2x^2}y$, $I =]0, \infty[$.
Alors $v_1(x) = x$ et $v_2(x) = \sqrt{x}$ sont des solutions de $Ly = 0$. Elles sont linéairements indépendantes, car

$$\begin{vmatrix} x & \sqrt{x} \\ 1 & \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\sqrt{x} - \sqrt{x} = -\frac{1}{2}\sqrt{x} \neq 0, x \in I.$$

Autre approche :
$0 = ax + b\sqrt{x} \Longrightarrow 0 = a\sqrt{x} + b$; pour $x = 1 : 0 = a + b$ et pour $x = 4 :$ $0 = 2a + b$. Ce système homogène admet seulement la solution $(a, b) = (0, 0)$, car son déterminant $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$.

Théorème 2.12 (Représentation du déterminant de Wronski)**.** *Soient $a_j \in C(I)$, $x_0 \in I$ et soient $u_1, \ldots, u_n$ des solutions de*

$$Ly = y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0.$$

Alors

$$W_{(u_1,\ldots,u_n)}(x) = W_{(u_1,\ldots,u_n)}(x_0)e^{-\int_{x_0}^x a_{n-1}(t)dt}.$$

En particulier, $W(x) = 0\ \forall x \in I$ ou bien $W(x) \neq 0\ \forall x \in X$.

Théorème 2.13. *(Alembert) [Réduction de l'ordre] Soit v une solution connue de $Ly = 0$ et supposons que $v(x) \neq 0\ \forall x \in I$. Si u est une solution de $L^*u = 0$ avec*

$$L^*u = u^{(n-1)} + b_{n-2}^*(x)u^{(n-2)} + \cdots + b_1^*(x)u' + b_0^*(x)u,$$

et

$$b_{k-1}^*(x) = \frac{1}{v(x)} \sum_{j=k}^{n} \binom{j}{k} a_j(x)v^{(j-k)}(x), \quad a_n := 1,$$

alors $y(x) = v(x)\int u(x)dx$ est une deuxième solution (linéairement indépendante de v) de $Ly = 0$.
Si $\{u_1, \ldots, u_{n-1}\}$ est un système fondamental de $L^*u = 0$, alors

$$\{v,\ v\textstyle\int u_1,\ v\int u_2, \ldots, v\int u_{n-1}\}$$

est un système fondamental de $Ly = 0$.

Dans les applications on pose donc $y = vw$ et on détermine $u = w'$, puis u.

Preuve. $y^{(j)} = (vw)^{(j)} \overset{\text{Leibniz}}{=} \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} w^{(k)} v^{(j-k)} \overset{a_n:=1}{\Longrightarrow}$

$L(y) = L(vw) = \sum_{j=0}^{n} a_j \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} w^{(k)} v^{(j-k)} = \sum_{j=0}^{n} a_j \sum_{k=1}^{j} \binom{j}{k} w^{(k)} v^{(j-k)}$ car $Lv = \sum_{j=0}^{n} a_j v^{(j)} = 0$. En échangeant l'ordre de sommation, on obtient :

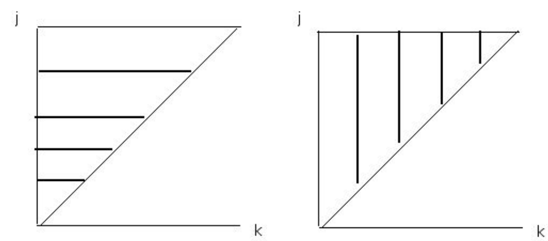

Fig. 4. Fubini discret

$$Ly = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=k}^{n} a_j \binom{j}{k} v^{(j-k)} \right) w^{(k)} = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{j=k}^{n} a_j \binom{j}{k} v^{(j-k)} \right)}_{:=b_{k-1}} (w')^{(k-1)}.$$

Donc, si $u = w'$ est une solution de $\sum_{i=0}^{n-1} b_i u^{(i)} = 0$, alors $y = v \int u$ est une solution de $Ly = 0$. Notons que $b_{n-1} = v$. En posant $b_i^* = b_i/v$ on obtient l'assertion.

Exemple Résoudre l'équation différentielle $(*) \quad (1-x^2)y'' + 2xy' - 2y = 0$.

Considérons l'opérateur différentiel $Ly = y'' + \frac{2x}{1-x^2} y' - \frac{2}{1-x^2} y$, $I_1 =]-\infty, -1[$ ou $I_2 =]-1, 1[$ ou $I_3 =]1, \infty[$.
On voit immédiatement que $v(x) = x$ est une solution de $Ly = 0$ sur I_j. On peut utiliser le procédé d'Alembert sur $I = I_1$, $I = I_3$, $I =]-1, 0[$ ou $I =]0, 1[$, car là, $v \neq 0$.
Posons $y = vw$. Remplaçons dans $(*)$: Alors

$$0 = (1-x^2)(xw)'' + 2x(xw)' - 2(xw) = (1-x^2)(2w' + xw'') + 2x(w + xw') - 2xw$$
$$= x(1-x^2)w'' + 2w'.$$

Donc $w'' = \frac{2}{x(x^2-1)} w'$. Avec $u = w'$ on obtient $u(x) = \exp\left(\int \frac{2}{x(x^2-1)} dx \right)$.

Comme $\frac{2}{x(x^2-1)} = -\frac{2}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}$, on voit que $\displaystyle\int \frac{2}{x(x^2-1)}dx = \log\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$.
Donc $u(x) = 1-\frac{1}{x^2}$ et $y(x) = x\int(1-\frac{1}{x^2})dx = x(x+\frac{1}{x}) = x^2+1$.
Ainsi $\{x, x^2+1\}$ est un système fondamental pour $Ly = 0$ sur I. Donc l'ensemble des solutions de $(*)$ est égal à $\{c_1x+c_2(1+x^2), c_j \in \mathbb{R}\}$; à postériori on voit que ces solutions existent même sur $\mathbb{R}$.

Théorème 2.14 (Variation des constantes II).
Si $\mathscr{F} = \{y_1, \ldots, y_n\}$ un système fondamental de $Ly = 0$, alors

$$u_p(x) = \sum_{k=1}^{n} y_k(x) \int \frac{W_k(x)}{W(x)}dx$$

est une solution particulière de $Ly = b(x)$.
Ici $W(x)$ est le déterminant de Wronski associé à $\mathscr{F}$ et W_k est le déterminant qu'on obtient si on remplace dans W la k-me colonne par $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(x) \end{pmatrix}$.

Preuve. Découle de 5.6

3. Rappel : Nombres complexes, polynômes

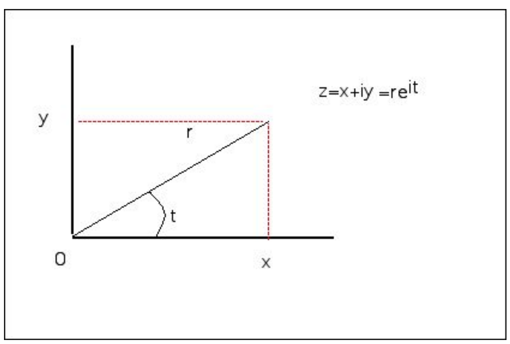

Fig. 5. $\mathbb{C}$= plan euclidien

$\mathbb{C} = \{z = x+iy, x, y \in \mathbb{R}\}$, $i^2 = -1$ (l'unité imaginaire). Identifier z avec le couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$; $x = \text{Re } z; y = \text{Im } z$. Le module de z est donné par $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$; c'est la distance du point z à l'origine.
Représentation polaire : $z = re^{i\theta}$, où $r = |z|$ et $\theta = \arg z$, $\theta \in [0, 2\pi[$. $\tan\theta = \frac{y}{x}$.
Formule d'Euler : $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.
$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$; $|e^z| = e^x = e^{\text{Re } z}$.

Une fonction $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ se décompose en $f(t) = u(t)+iv(t)$, où $u(t) = \text{Re } f(t), v(t) = \text{Im } f(t)$; $f'(t) = u'(t)+iv'(t)$
Exemple : $f(t) = e^{it} \Longrightarrow f'(t) = -\sin t + i\cos t = i(\cos t + i\sin t) = ie^{it}$.

Chaque polynôme $p(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j \in \mathbb{C}[z]$ de degré n (i.e. $a_n \neq 0$) admet n racines complexes (pas nécessairement distinctes) et on a

$$p(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j = a_n \prod_{j=1}^{k} (z - z_j)^{m_j},$$

où m_j est la multiplicité de la racine z_j de p et où $m_1 + m_2 + \cdots + m_k = n$.
Une racine a de p a la multiplicité $m \iff p(a) = p'(a) = \cdots = p^{(m-1)}(a) = 0$ et $p^{(m)}(a) \neq 0$. Dans ce cas $p(z) = (z-a)^m q(z)$, où $q(a) \neq 0$.
Si tous les coefficients a_j de p sont réels, alors $p(\lambda) = 0 \iff p(\overline{\lambda}) = 0$.

4. Equations différentielles linéaires d'ordre n à coefficients constants

On appelle ainsi une équation différentielle de la forme

$$\boxed{(*) \quad Ly = a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = b(x)}$$

où $a_j \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$, et $b \in C(I)$, $I \subseteq \mathbb{R}$ intervalle ouvert.

Théorème 4.1. *Soit $x_0 \in I$, $(y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$, $a_j \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$. Alors l'AVI*

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = b(x)$$

$$y^{(j)}(x_0) = y_j, j = 0, 1, \ldots, n-1$$

admet une solution unique sur I.

<u>La structure des solutions</u>

<u>Cas homogène</u> : $b \equiv 0$ (i.e $b(x) = 0 \ \ \forall x \in I$).
Soit

$$p(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0$$

le polynôme caractéristique associé à $(*)$.

Proposition 4.2. *(1) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une racine de $p(\lambda) = 0$. Alors $y(x) = e^{\lambda x}$ est une solution de $Ly = 0$ $(y : \mathbb{R} \to \mathbb{C})$.*

(2) Si $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ est une racine non réelle de $p(\lambda) = 0$, et si les coefficients a_j sont eux-mêmes réels (donc $a_j \in \mathbb{R}$), alors les fonctions

$$y_1(x) = \text{Re } e^{\lambda x} = e^{\alpha x} \cos(\beta x)$$

$$y_2(x) = \text{Im } e^{\lambda x} = e^{\alpha x} \sin(\beta x)$$

sont des solutions réelles de $Ly = 0$ linéairement indépendantes (sur le corps $\mathbb{R}$.)

Preuve. (1) $y(x) = e^{\lambda x} \Longrightarrow y'(x) = \lambda e^{\lambda x} \Longrightarrow y''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x} \Longrightarrow \cdots \Longrightarrow y^{(j)}(x) = \lambda^j e^{\lambda x} \Longrightarrow Ly = \sum_{j=0}^n a_j y^{(j)} = (\sum_{j=0}^n a_j \lambda^j) e^{\lambda x} = p(\lambda) e^{\lambda x} = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$

(2) $L(y_1) = L(\text{Re } y) = \sum_{j=0}^n a_j (\text{Re } y)^{(j)} = \sum_{j=0}^n a_j (\text{Re } (y^{(j)})$
$\underset{a_j \in \mathbb{R}}{=}$ Re $(\sum_{j=0}^n a_j y^{(j)}) = \text{Re } (Ly) = 0$

De même pour $y_2 = \text{Im } y$.

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $ay_1(x) + by_2(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Alors

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad e^{\alpha x}(a \cos(\beta x) + b \sin(\beta x)) = 0.$$

Donc, comme $\beta \neq 0$,

$$\begin{array}{rcrcl} a\cos(\beta x) & + & b\sin(\beta x) & = & 0 \\ -a\sin(\beta x) & + & b\cos(\beta x) & = & 0 \end{array}$$

Ceci est un système d'équations linéaires homogène de déterminant constante 1 ; donc la solution triviale $(a, b) = (0, 0)$ est l'unique solution.

Théorème 4.3. *Soit $Ly = \sum_{j=0}^n a_j y^{(j)}$ un opérateur différentiel linéaire d'ordre n à coefficients constants $a_j \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$. Supposons que les n-racines λ_j du polynôme caractéristique $p(\lambda)$ associé à $Ly = 0$ sont distinctes. Alors*

(1) $\boxed{\mathscr{F}_{\mathbb{C}} = \{e^{\lambda_j x} : j = 1, 2, \ldots, n\}}$ *est un système fondamental de solutions complexes de $Ly = 0$.*

(2) Soit $\mathscr{R} := \{\omega_1, \ldots, \omega_r\}$ le sous-ensemble de $\{\lambda_j : j = 1, 2, \ldots, n\}$ des racines réelles de $p(\lambda) = 0$ et soit $\mathscr{N}_{\mathscr{R}} := \{\mu_1, \overline{\mu}_1, \ldots, \mu_p, \overline{\mu}_p\}$ le sous-ensemble de $\{\lambda_j : j = 1, 2, \ldots, n\}$ des racines non réelles de $p(\lambda) = 0$.

Notons que $2p + r = n$ (avec la convention que $r = 0$ si $\mathscr{R} = \emptyset$ ou $p = 0$ si $\mathscr{N}_{\mathscr{R}} = \emptyset$.

Soient $\mu_j = \alpha_j + i\beta_j$. Alors

$$\boxed{\mathscr{F}_{\mathbb{R}} = \{e^{\omega_1 x}, \ldots, e^{\omega_r x}, e^{\alpha_1 x} \cos(\beta_1 x), e^{\alpha_1 x} \sin(\beta_1 x), \ldots, e^{\alpha_p x} \cos(\beta_p x), e^{\alpha_p x} \sin(\beta_p x)\}}$$

est un système fondamental de solutions réelles de $Ly = 0$.

Preuve. (1) Les n-solutions de $\mathscr{F}_{\mathbb{C}}$ sont linéairement indépendantes parce que le déterminant de Wronski

$$W_{\mathscr{F}_{\mathbb{C}}}(0) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \ldots & \lambda_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \ldots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq j < k \leq n} (\lambda_j - \lambda_k) \neq 0$$

(déterminant de Vandermonde.)

(2) similiaire

Exemple 4.4. $y''' - y'' - 2y' = 0,\ y(0) = 1, y'(0) = 1, y''(0) = -1$
$p(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 - 2\lambda = \lambda(\lambda^2 - \lambda - 2) = \lambda(\lambda+1)(\lambda-2)$
$\Longrightarrow \mathscr{F} = \{e^{-x}, e^{2x}, 1\}$ système fondamental.
Solution générale : $y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} + C_3, \quad C_j \in \mathbb{R}$. Pour résoudre l'AVI on calcule les dérivées et on remplace les valeurs données :

$$\begin{array}{rcrcrcl} y(x) & = & C_1 e^{-x} & + & C_2 e^{2x} & + & C_3 \\ y'(x) & = & -C_1 e^{-x} & + & 2C_2 e^{2x} & & \\ y''(x) & = & C_1 e^{-x} & + & 4C_2 e^{2x} & & \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcl} 1 & = & C_1 & + & C_2 & + & C_3 \\ 1 & = & -C_1 & + & 2C_2 & & \\ -1 & = & C_1 & + & 4C_2 & & \end{array}$$

Système d'équations linéaires : Le déterminant Δ équivaut au déterminant de Wronski $W_{\mathscr{F}}(0)$; donc est non nul (car $\mathscr{F}$ système fondamental)
Solution unique : $(C_1, C_2, C_3) = (-1, 0, 2)$. Donc $y(x) = -e^{-x} + 2$.

Exemple 4.5. $y''' - y'' + 2y' - 2y = 0$
$p(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 + 2\lambda - 2 = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 2)$
$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = i\sqrt{2}, \lambda_3 = -i\sqrt{2}$.

$\mathscr{F}_{\mathbb{C}} = \{e^x, e^{i\sqrt{2}x}, e^{-i\sqrt{2}x}\}$ système fondamental complexe.
$\mathscr{F}_{\mathbb{R}} = \{e^x, \mathrm{Re}\, e^{i\sqrt{2}x}, \mathrm{Im}\, e^{i\sqrt{2}x}\} = \{e^x, \cos(\sqrt{2}x), \sin(\sqrt{2}x)\}$ syst. fond. réel.

Solution générale :
$y(x) = C_1 e^x + C_2 \cos(\sqrt{2}x) + C_3 \sin(\sqrt{2}x), \quad (C_1, C_2, C_3) \in \mathbb{R}^3$.

Exemple 4.6. (oscillateur harmonique)
$y'' + \omega^2 y = 0, \omega > 0$
$p(\lambda) = \lambda^2 + \omega^2 \Longrightarrow \lambda_1 = i\omega, \lambda_2 = -i\omega$.
$\mathscr{F}_{\mathbb{C}} = \{e^{i\omega x}, e^{-i\omega x}\}, \qquad \mathscr{F}_{\mathbb{R}} = \{\cos \omega x, \sin \omega x\}$

Exemple 4.7. $y''' - 5y'' + 17y' - 13y = 0$
$p(\lambda) = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 17\lambda - 13$. $\lambda = 1$ est une racine. Pour calculer les autres, on effectue soit une division polynomiale de p par $\lambda - 1$, ou on utilise le schéma de Horner :

	1	-5	17	13
1		1	-4	-13
$\nwarrow$	1	-4	13	0

On obtient : $p(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 4\lambda + 13)$.

$\lambda_2 = \frac{4+\sqrt{16-52}}{2} = 2 + 3i$
$\lambda_3 = \frac{4-\sqrt{16-52}}{2} = 2 - 3i$.

$\mathscr{F}_{\mathbb{C}} = \{e^x, e^{(2+3i)x}, e^{(2-3i)x}\}$
$\mathscr{F}_{\mathbb{R}} = \{e^x, e^{2x}\cos(3x), e^{2x}\sin(3x)\}$.

Solution générale :
$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x}\cos(3x) + C_3 e^{2x}\sin(3x), \quad (C_1, C_2, C_3) \in \mathbb{R}^3.$

Théorème 4.8. *Soit $Ly = \sum_{j=0}^{n} a_j y^{(j)}$, $a_j \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$.*
(1) Supposons que λ_0 est une racine multiple du polynôme caractéristique p asocié à L avec la multiplicité $m = m(\lambda_0) \geq 2$; c'est à dire
$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^m q(\lambda)$, où $q(\lambda_0) \neq 0$. Notons que le degré de q est $n - m$.

i) Si $\lambda_0 \in \mathbb{C}$, alors $e^{\lambda_0 x}, xe^{\lambda_0 x}, x^2 e^{\lambda_0 x}, \ldots, x^{m-1}e^{\lambda_0 x}$ sont m solutions linéairement indépendantes de $Ly = 0$.

ii) Si $\lambda_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $\lambda_0 = \alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$, alors les parties réelles et parties imaginaires des solutions ci-dessus sont $2m$ solutions réelles linéairement indépendantes de $Ly = 0$; c'est à dire

$$\begin{array}{cc} e^{\alpha x}\cos(\beta x) & e^{\alpha x}\sin(\beta x) \\ x\, e^{\alpha x}\cos(\beta x) & x\, e^{\alpha x}\sin(\beta x) \\ x^2\, e^{\alpha x}\cos(\beta x) & x^2\, e^{\alpha x}\sin(\beta x) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ x^{m-1}\, e^{\alpha x}\cos(\beta x) & x^{m-1}\, e^{\alpha x}\sin(\beta x) \end{array}$$

sont des solutions.

2) Si $\lambda_k \ (k = 1, 2, \ldots, r)$ parcourt toutes les racines distinctes de $p(\lambda) = 0$, alors $\sum_{k=1}^{r} m(\lambda_k) = n$ et on obtient le système fondamental complexe suivant (où $m_k := m(\lambda_k)$ est la multiplicité de λ_k) :

$$\mathscr{F}_{\mathbb{C}} = \{e^{\lambda_1 x}, xe^{\lambda_1 x}, \ldots, x^{m_1 - 1}e^{\lambda_1 x},\ e^{\lambda_2 x}, xe^{\lambda_2 x}, \ldots, x^{m_2-1}e^{\lambda_2 x}, \ldots\ldots, e^{\lambda_r x}, xe^{\lambda_r x}, \ldots, x^{m_r - 1}e^{\lambda_r x}\}$$

Analogue pour $\mathscr{F}_{\mathbb{R}}$.

Preuve. i) $0 \leq q < m$, considérons $F(\lambda) = e^{\lambda x}$. Alors

$$F^{(q)}(\lambda) = \frac{d^q}{d\lambda^q}(e^{\lambda x}) = x^q e^{\lambda x}.$$

Donc $L(x^q e^{\lambda x}) = L\big((\frac{d}{d\lambda})^q e^{\lambda x}\big) = (\frac{d}{d\lambda})^q L(e^{\lambda x}) = (\frac{d}{d\lambda})^q \big[p(\lambda)e^{\lambda x}\big]$. Mais λ_0 est une racine d'ordre m de $\lambda \mapsto p(\lambda)e^{\lambda x}$; donc $(\frac{d}{d\lambda})^q[p(\lambda)e^{\lambda x}] = 0$. Ainsi $L(x^q e^{\lambda x}) = 0$ et $x^q e^{\lambda x}$ est une solution de $Ly = 0$.

Exemple 4.9. $y^{(4)} + 8y'' + 16y = 0$

$p(\lambda) = \lambda^4 + 8\lambda^2 + 16 = (\lambda^2 + 4)^2 = (\lambda + 2i)^2(\lambda - 2i)^2$. Donc $\pm 2i$ racines doubles.
$\mathscr{F}_{\mathbb{C}} = \{e^{2ix}, xe^{2ix}, e^{-2ix}, xe^{-2ix}\}$
$\mathscr{F}_{\mathbb{R}} = \{\cos(2x), \sin(2x), x\cos(2x), x\sin(2x)\}$.

Solution générale :
$y(x) = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x) + C_3\, x\cos(2x) + C_4\, x\sin(2x), \quad C_j \in \mathbb{R}.$

Exemple 4.10. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$

$p(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = (\lambda - 1)^3$. Racine triple.
$\mathscr{F} = \{e^x, xe^x, x^2e^x\}$

Solution générale :
$y(x) = C_1e^x + C_2xe^x + C_3x^2e^x$, $C_j \in \mathbb{R}$.

Cas inhomogène

On va traiter le problème $Ly = b$ seulement pour

$$\boxed{b(x) = (\textstyle\sum_{j=0}^{p} b_jx^j)e^{\mu x}},$$

$b_j \in \mathbb{C}, \mu \in \mathbb{C}$. Le cas général (méthode de la variation des constantes) sera fait plus tard.

Proposition 4.11. *Règle : i) Si μ n'est pas une racine du polynôme caractéristique $p(\lambda) = \sum_{j=0}^{n} a_j\lambda^j$ de $Ly = 0$, alors il existe une solution particulière (complexe) de $Ly = b$ de la forme*

$$\boxed{y_p(x) = (\textstyle\sum_{j=0}^{p} c_jx^j)e^{\mu x}}.$$

ii) Si μ est une racine de multiplicité q, $q \geq 1$, du polynôme caractéristique $p(\lambda) = \sum_{j=0}^{n} a_j\lambda^j$ de $Ly = 0$, alors il existe une solution particulière (complexe) de $Ly = b$ de la forme

$$\boxed{y_p(x) = (\textstyle\sum_{j=0}^{p} c_jx^j)x^qe^{\mu x}}$$

Le cas ii) contient le cas i) si on prend $q = 0$. Le cas ii) s'appelle le cas de *résonnance* (physique !)

Proposition 4.12. *Soit $Ly = \sum_{j=0}^{n} a_jy^{(j)}$, $a_j \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$.*
Si $b(x) = (\sum_{j=0}^{p} b_jx^j)e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ ou $b(x) = (\sum_{j=0}^{p} b_jx^j)e^{\alpha x}\sin(\beta x)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on considère

$$\tilde{b}(x) = (\sum_{j=0}^{n} b_jx^j)e^{(\alpha+i\beta)x}$$

et on résout $Ly = \tilde{b}$ selon la règle 4.11 et on prend Re y*, respectivement* Im y*, de la solution complexe particulière y.*

Exemple 4.13. $(*) \quad y'' - y = xe^{2x}$

$p(\lambda) = \lambda^2 - 1 \Longrightarrow \lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -1$.
Solution général de $Ly = 0$: $C_1e^x + C_2e^{-x}$, $C_j \in \mathbb{R}$.
$Ly = b$: $\mu = 2$. On pose $y_p(x) = (ax + b)e^{2x}$. A déterminer a et $b \in \mathbb{R}$:
$y_p' = (a + 2b + 2ax)e^{2x}, y_p'' = ((2a + 4b + 4ax) + 2a)e^{2x} = (4a + 4b + 4ax)e^{2x}$
Remplacer dans $(*)$:
$(4a + 4b + 4ax)e^{2x} - (ax + b)e^{2x} = xe^{2x} \Longleftrightarrow (4a + 3b) + 3ax = x.$

Comparaison des coefficients :

$$\begin{cases} 4a + 3b &= 0 \\ 3a &= 1 \end{cases}$$

Solution : $(a, b) = (\frac{1}{3}, -\frac{4}{9})$.
Donc y_p a la forme $y_p(x) = (\frac{1}{3}x - \frac{4}{9})e^{2x}$.
L'ensemble des solutions de $(*)$ est donné par :

$$C_1 e^x + C_2 e^{-x} + (\frac{1}{3}x - \frac{4}{9})e^{2x}.$$

Exemple 4.14. $(**)$ $\;y'' - 4y' + 13y = e^{2x}\cos(3x)$

$p(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 13 = (\lambda - (2+3i))(\lambda - (2-3i))$.
$y_h(x) = C_1 e^{2x}\cos(3x) + C_2 e^{2x}\sin(3x)$, $C_j \in \mathbb{R}$,
$b(x) = e^{2x}\cos(3x) = \text{Re}\, e^{(2+3i)x}$
On a $p(2+3i) = 0 \Longrightarrow$ résonance.
Posons $y_p(x) = C_0 x e^{(2+3i)x} \Longrightarrow y_p'(x) = C_0 e^{(2+3i)x}(1 + (2+3i)x) \Longrightarrow y_p''(x) = C_0 e^{(2+3i)x}((2+3i) + (2+3i)(1+(2+3i)x) = C_0 e^{(2+3i)x}(4 + 6i + (12i - 5)x)$.
Remplaçons dans $(**)$:

$$C_0 e^{(2+3i)x}[4 + 6i + (12i - 5)x - 4(1 + (2+3i)x) + 13x] \stackrel{!}{=} e^{(2+3i)x} \Longleftrightarrow$$

$$C_0[\cdots] = 1 \Longleftrightarrow$$

$$C_0(6i) = 1 \Longleftrightarrow C_0 = -\tfrac{1}{6}i.$$

Donc $y_p(x) = -\frac{1}{6}ixe^{(2+3i)x} = -\frac{1}{6}ixe^{2x}(\cos(3x) + i\sin(3x))$.
Solution générale de $(**)$:

$$y_p(x) = C_1 e^{2x}\cos(3x) + C_2 e^{2x}\sin(3x) + \text{Re}\, y_p(x) =$$

$$C_1 e^{2x}\cos(3x) + C_2 e^{2x}\sin(3x) + \frac{1}{6}xe^{2x}\sin(3x).$$

4.1. **L'équation différentielle d'Euler.**

On appelle ainsi une équation différentielle de la forme

$$\boxed{(*) \quad x^n y^{(n)} + a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 x y' + a_0 y = b(x)},$$

où $a_j \in \mathbb{R}$ et $b \in C(I)$.

On voit que $y(x)$ est une solution $\Longleftrightarrow y(-x)$ est une solution. Donc on peut se restreindre au cas $x > 0$. La substitution $u(t) = y(e^t)$ (i.e. $t = \log x$) nous mène vers une équation différentielle linéaire inhomogène d'ordre n à coefficients constants. Plus précisement, $y(x)$ est une solution de $(*) \Longleftrightarrow u(t)$ est une solution de

$$u^{(n)} + A_{n-1}u^{(n-1)} + \cdots + A_1 u' + A_0 u = b(e^t),$$

où les coefficients A_j sont donnés par le polynôme suivant :

$$a_0 + za_1 + \boxed{z(z-1)a_2} + \cdots + \boxed{z(z-1)\cdots(z-(n-2))a_{n-1}} + \boxed{z(z-1)\cdots(z-(n-1))} =$$
$$z^n + A_{n-1}z^{n-1} + \cdots + A_1 z + A_0.$$

Méthode pratique pour l'équation homogène : on cherche des solutions de la forme $y(x) = x^\alpha$. Cela nous donne :

$$x^j\, y^{(j)}(x) = x^j \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-j+1)x^{\alpha-j} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-j+1)x^\alpha.$$

Donc, avec $a_n = 1$,

$$0 = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j y^{(j)}(x) = a_0 + x^\alpha \sum_{j=1}^{n} \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-j+1)a_j.$$

Exemple 4.15. $x^2y'' - 3xy' + 13y = x^2\cos(\log x^3)$

$t = \log x\,;\ z(z-1) - 3z + 13 = z^2 - 4z + 13$
C'est le polynôme caractéristique de
$u''(t) - 4u'(t) + 13u(t) = e^{2t}\cos(3t)$

Solution général : $u(t) = c_1 e^{2t}\cos(3t) + C_2 e^{2t}\sin(3t) + \frac{1}{6}te^{2t}\sin(3t)$
Donc la solution générale de l'équation d'Euler est :

$$y(x) = C_1x^2\cos(\log x^3) + C_2x^2\sin(\log x^3) + \tfrac{1}{6}x^2\log x\sin(\log x^3).$$

Méthode pratique pour l'équation homogène : on cherche les solutions de la forme $y(x) = x^\alpha$: $y'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$, $y''(x) = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$
$\Longrightarrow 0 = x^2y'' - 3xy' + 13y = (\alpha(\alpha-1) - 3\alpha + 13)x^\alpha \Longrightarrow \alpha^2 - 4\alpha + 13 = 0 \Longrightarrow$
$\alpha = 2 \pm 3i$
$\Longrightarrow x^\alpha = x^{2+3i} = e^{(2+3i)\log x} = x^2(\cos(3\log x) + i\sin(3\log x)).$

5. Systèmes d'équations différentielles d'ordre n

On appelle ainsi un système de la forme

$$\boxed{(*)\quad \begin{cases} y_1' &= a_{11}y_1 &+& a_{12}y_2 &+& \ldots & a_{1n}y_n \\ y_2' &= a_{21}y_1 &+& a_{22}y_2 &+& \ldots & a_{2n}y_n \\ \cdots & & \cdots & & & & \cdots \\ y_n' &= a_{n1}y_1 &+& a_{n2}y_2 &+& \ldots & a_{nn}y_n \end{cases}}$$

où $a_{jk}(x)$ sont des fonctions continues sur un intervalle ouvert $I \subseteq \mathbb{R}$. Notons $A(x)$ la matrice $(a_{jk}(x))_{1\le j,k\le n}$ formée par les n^2 fonctions $a_{jk}(x)$ et notons le vecteur colonne $(y_1,\ldots,y_n)^t$ par y respectivement $(y_1',\ldots,y_n')^t$ par y'. Alors $(*)$ nous donne le *système d'équations différentielles linéaire homogène*

$$y' = A(x)y.$$

Soit $b(x) = (b_1(x), \ldots, b_n(x))^t$ un vecteur (colonne) formé de n-fonctions continues $b_j(x)$ sur I. Alors

$$\boxed{(**) \quad y' = A(x)y + b(x)}$$

s'appelle *système d'équations différentielles linéaire inhomogène d'ordre* n

I Une fonction vectorielle $y = (y_1, \ldots, y_n)^t$ s'appelle solution de $(**)$ s'il existe un intervalle $J \subseteq I$ tel que

$$\forall x \in J : \quad y'(x) = A(x)y(x) + b(x).$$

II Soit $x_0 \in I$. Une fonction vectorielle $y = (y_1, \ldots, y_n)^t$ s'appelle solution du système d'équations différentielles linéaire à valeur initiale $y(x_0) = (\eta_1, \ldots, \eta_n)^t \in \mathbb{R}^n$, s'il existe un intervalle $J \subseteq I$ tel que

$$\forall x \in J : \quad y'(x) = A(x)y(x) + b(x)$$

$$\text{et } y(x_0) = (\eta_1, \ldots, \eta_n)^t.$$

Théorème 5.1 (Existence et unicité)**.** *Soit* $A(x) \in \mathscr{A}(n \times n, C(I))$ *une matrice* $(a_{jk}(x))_{1 \le j,k \le n}$ *carrée d'ordre* n *de fonctions continues* $a_{jk}(x)$ *sur un intervalle ouvert* $I \subseteq \mathbb{R}$, $b(x) = (b_1(x), \ldots, b_n(x))^t$ *avec* $b_j \in C(I)$, *et* $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_n)^t \in \mathbb{R}^n$ *un vecteur. Alors le système*

$$\begin{cases} y' = Ay + b \\ y(x_0) = \eta \end{cases}$$

admet une solution unique sur I.

Convention : on n'écrira plus $(\cdot, \ldots, \cdot)^t$ pour les vecteurs colonnes ; mais tout simplement $(\cdot, \ldots, \cdot)$.

Theorem 5.2. *Soit* $A(x) \in \mathscr{A}(n \times n, C(I))$, $x_0 \in I$, $e_j = (0, \ldots, 0, 1, 0 \ldots)^t \in \mathbb{R}^n$ *et* $b \in C(I)^n$.
(1) L'ensemble V *des solutions de* $y' = A(x)y$ *est un sous-espace vectoriel de* $C^1(I)^n := C^1(I) \times \cdots \times C^1(I)$ *de dimension* n.
Les solutions $u_j(x)$ *de* $u_j' = A(x)u_j, u_j(x_0) = e_j$, *forment une base de* V. *Chaque base de* V *est appellée système fondamental de* $y' = A(x)y$.

(2) Si y_h *parcourt toutes les solutions de* $y' = A(x)y$ *et si* y_p *est une solution particulière de* $y' = A(x)y + b(x)$, *alors* $y_h + y_p$ *parcourt toutes les solutions de* $y' = A(x)y + b(x)$.

(3) Soit $\{v_1, \ldots, v_n\}$ *un système fondamnetal arbitraire. Alors l'ensemble* W *de toutes les solutions de* $y' = A(x)y + b(x)$ *a la forme*

$$W = \{C_1 v_1 + C_2 v_2 + \ldots C_n v_n + y_p, C_j \in \mathbb{R}\},$$

où y_p *est une solution particulière de* $y' = A(x)y + b(x)$.

Preuve. (1) $\sum_{j=1}^n \lambda_j u_j = 0 \Longrightarrow \sum_{j=1}^n \lambda_j u_j(x_0) = \sum_{j=1}^n \lambda_j e_j = 0 \Longrightarrow (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = 0$.
Soit $y' = A(x)y$. Alors $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_n) := y(x_0) \in \mathbb{R}^n$. Soit $u(x) = \sum_{j=1}^n \eta_j u_j(x)$. Alors $u' = A(x)u$ et $u(x_0) = \eta$. L'unicité de la solution des AVI nous donne que $y = u$.
On en déduit que $\{u_1, \ldots, u_n\}$ est une base de V.
(2) (3) clair.

Définition 4. Soit $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ un système de solutions de $y' = A(x)y$, $A \in \mathscr{A}(n\times n, C(I))$, $I \subseteq \mathbb{R}$. Notons $v_j = (y_{1,j}, y_{2,j}, \ldots, y_{n,j})^t$, et soit $Y = (v_1, \ldots, v_n)$ la matrice formée par ces vecteurs (colonnes) ; i.e.

$$Y = \begin{pmatrix} y_{1,1} & \cdots & y_{1,n} \\ y_{2,1} & \cdots & y_{2,n} \\ \vdots & & \vdots \\ y_{n,1} & \cdots & y_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Alors $\det Y(x)$ s'appelle le déterminant de Wronski du système d'équations différentielles linéaires $y' = A(x)y$.
On note $W_S(x) = \det Y(x)$. Si $W_S(x) \neq 0 \forall x \in I$, alors $Y(x)$ s'appelle matrice fondamentale du système $y' = A(x)y$.

Théorème 5.3. *(1) Soit $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ un ensemble de n solutions (fonctions vectorielles !) de $y' = A(x)y$ et Y la matrice $(v_1, \ldots, v_n)$. Alors S est linéairement indépendant $\Longleftrightarrow$ $\det Y(x) \neq 0\ \forall x \in I$.*
I.e. S système fondamental $\Longleftrightarrow$ Y matrice fondamentale.
(2) Soit Y une matrice fondamentale associée à $y' = A(x)y$. Alors L'espace vectoriel V de toutes les solutions de $y' = A(x)y$ est donné par :

$$V = \{Yc : c \in \mathbb{R}^n\}$$

et l'ensemble M de toutes les matrices fondamentales est égal à

$$M = \{YC : C \text{ matrice carée inversible d'ordre } n \text{ sur } \mathbb{R}\}.$$

<u>**Rappel**</u> Soit $A(t) = (a_{i,j}(t))_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice carrée d'ordre n. Alors la trace de A est la somme des éléments dans la diagonale de A, i.e. trace $A(t) = \sum_{i=1}^n a_{i,i}(t)$.

Théorème 5.4. *Soient $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ un ensemble de n solutions (fonctions vectorielles !) de $y' = A(x)y$ où $A \in \mathscr{A}(n \times n, C(I))$, $I \subseteq \mathbb{R}$, et $x_0 \in I$. Alors*

$$W_S(x) = W_S(x_0) \exp \int_{x_0}^x \text{trace } A(t)\, dt.$$

Theorem 5.5 (réduction de l'ordre, procédé d'Alembert)**.**

Soit y_1 *une solution de* $y' = A(x)y$*, d'ordre* $n \geq 2$*, et* $\Omega(x) = (0, \omega_2(x), \cdots, \omega_n(x))^t$*. Alors une deuxième solution* y_2*, linéairement indépendante de* y_1*, est donnée par*

$$y_2 = \phi \cdot y_1 + \Omega,$$

où ω_j *et* ϕ *sont des fonctions scalaires.*

Méthode : $y_2' = \phi' y_1 + \phi y_1' + \Omega' = \phi' y_1 + \phi A y_1 + \Omega'$ et
$y_2' \stackrel{!}{=} A y_2 = A(\phi y_1 + \Omega) = \phi A y_1 + A\Omega$.
Donc : $\phi' y_1 + \Omega' = A\Omega$.
Première composante : $(*) \quad \phi' y_{11} = [A\Omega]_1$,
k-me composante : $\omega_k' = [A\Omega]_k - \phi' y_{k1}$. Si $y_{1,1} \neq 0$, on peut diviser et on obtient :

$$\omega_k' = [A\Omega]_k - \frac{[A\Omega]_1}{y_{11}} y_{k1}$$

Ceci est un système d'équations différentielles d'ordre $n-1$ pour Ω. En remplace cette solution dans $(*)$ et on obtient ϕ'. Intégration donne ϕ, et par suite, on obtient y_2.

5.1. **Résolution d'un système d'équations différentielles linéaire inhomogène.**

Théorème 5.6 (Variation des constantes)**.** *Soit* $y' = A(x)y + b(x)$*, où* $A(x) = (a_{ij}(x))_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathscr{A}(n \times n, C(I))$*,* $b(x) = (b_1(x), \ldots, b_n(x))^t \in C(I)^n$*. Soit* $Y(x) = (y_1(x), \ldots, y_n(x))$ *une matrice fondamentale associée à* $y' = A(x)y$*. Posons*

$$n(x) = \int Y^{-1}(x) b(x) dx.$$

Alors

$$S_p(x) = Y(x) n(x)$$

est une solution particulière de $y' = A(x)y + b(x)$*. La représentation de Cramer de* S_p *est donnée par*

$$S_p(x) = \sum_{k=1}^{n} y_k(x) \int \frac{W_k(x)}{W(x)} dx,$$

où $W(x) = \det Y(x)$ *est le déterminant de Wronski de* Y *et où*

$$W_k(x) = \det\,(y_1(x), \ldots, y_{k-1}(x), b(x), y_{k+1}(x), \ldots, y_n(x)).$$

La solution générale est donnée par :

$$y(x) = y_h(x) + S_p(x) = Y(x)c + S_p(x), c \in \mathbb{R}^n$$

Preuve. Rappelons que chaque solution de $y' = A(x)y$ a la forme $y = \sum_{j=1}^{n} c_j y_j = Yc$, où $c = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$. Posons $S_p(x) = Y(x)c(x)$. Donc : $S_p' = Y'c + Yc' = (AY)c + Yc'$. On veut que $S_p' = AS_p + b$. Donc :

$$(AY)c + Yc' = A(Yc) + b \Longleftrightarrow Yc' = b \Longleftrightarrow c' = Y^{-1}b \Longleftrightarrow c = \int Y^{-1}b$$

On obtient : $S_p(x) = Y(x) \int Y^{-1}(x)b(x)$.
Cramer : Soit $v = Y^{-1}b$ solution de $Yv = b$; donc $v = (\frac{W_1}{W}, \dots, \frac{W_n}{W}) \Longrightarrow S_p = Y \int Y^{-1}b = Y(\int \frac{W_1}{W}, \dots, \int \frac{W_n}{W})^t = y_1 \int \frac{W_1}{W} + \dots + y_n \int \frac{W_n}{W}$.

Exemple 5.7. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $b(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}$. Chercher toutes les solutions de $y' = Ay + b$. A résoudre donc le système suivant :

$$y = (u_1, u_2)^t \Longrightarrow \begin{cases} u_1' = -u_2 \\ u_2' = u_1 \quad + \quad x \end{cases}$$

Une solution de $y' = Ay$ est $y_1(x) = (\cos x, \sin x)^t$. D'Alembert :

$$y_2(x) = \phi(x)y_1(x) + \begin{pmatrix} 0 \\ \omega(x) \end{pmatrix} = \phi(x) \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \omega(x) \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow y_2'(x) = \phi'(x) \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix} + \phi(x) \begin{pmatrix} -\sin x \\ \cos x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \omega'(x) \end{pmatrix}$$

D'autre part :

$$y_2'(x) = Ay_2(x) = \phi(x) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \omega(x) \end{pmatrix}$$

$$= \phi(x) \begin{pmatrix} -\sin x \\ \cos x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\omega \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow \phi'(x) \binom{\cos x}{\sin x} + \binom{0}{\omega'(x)} = \binom{-\omega}{0}$.

Donc : $\boxed{(*) \quad -\omega = \phi' \cos x \text{ et } \omega' = -\phi' \sin x}$.

$\Longrightarrow \omega' = \omega \tan x \Longrightarrow \int \frac{d\omega}{\omega} = \int \tan x dx \Longrightarrow \log \omega = -\log \cos x \Longrightarrow \omega = 1/\cos x$
$(*) \Longrightarrow \phi' = -\omega/\cos x = -1/(\cos x)^2 \Longrightarrow \phi = -\tan x$

$$\Longrightarrow y_2 = \begin{pmatrix} -\sin x \\ -\frac{(\sin x)^2}{\cos x} + \frac{1}{\cos x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin x \\ \cos x \end{pmatrix}$$

Donc

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$$

est un système fondamental de $y' = Ay$ car $W(x) = \det Y(x) = 1 \neq 0$.

$$Y^{-1}(x) = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix} \Longrightarrow Y^{-1}(x)b(x) = \begin{pmatrix} x \sin x \\ x \cos x \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow n(x) = \int Y^{-1}(x)b(x)dx = \begin{pmatrix} \int x \sin x \\ \int x \cos x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin x - x \cos x \\ \cos x + x \sin x \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow S_p(x) = Y(x)n(x) = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin x - x\cos x \\ \cos x + x\sin x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ 1 \end{pmatrix}$$

Solution générale de $y' = Ay + b$:

$$y(x) = C_1 \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -\sin x \\ \cos x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x \\ 1 \end{pmatrix}.$$

5.2. **Relations des systèmes d'équations différentielles linéaires avec les équations différentielles linéaires d'ordre n.**

Proposition 5.8. *Chaque équation différentielle linéaire d'ordre n peut s'écrire comme un système de n équations différentielles linéaires d'ordre 1.*

Preuve. Soit

$$Ly = y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x),$$

$a_j, b \in C(I)$. Posons

$$y_1 = y, \quad y_2 = y', \quad y_3 = y'', \quad \ldots, \quad y_n = y^{(n-1)}, \quad \mathbf{b}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(x) \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \ldots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Alors on a

$$\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y} + \mathbf{b}(x) \Longleftrightarrow Ly = b(x),$$

car :

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \ldots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ b(x) \end{pmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_3 \\ \vdots & \vdots \\ y_{n-1}' &= y_n \\ y_n' &= -a_0y_1 \quad -a_1y_2 \quad \ldots \quad -a_{n-1}y_n \quad +b(x) \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow (y^{(n-1)})' = -a_0y_1 - a_1y_2 \cdots - a_{n-1}y_n + b(x) \Longleftrightarrow$$

$$y^{(n)} + a_0 y_1 + a_1 y_2 \cdots + a_{n-1} y_n = b(x) \Longleftrightarrow Ly = b(x).$$

Théorème 5.9 (Variation des constantes II)**.**
Si $\mathscr{F} = \{y_1, \ldots, y_n\}$ un système fondamental de $Ly = 0$, alors

$$u_p(x) = \sum_{k=1}^{n} y_k(x) \int \frac{W_k(x)}{W(x)} dx$$

est une solution particulière de $Ly = b(x)$. Ici $W(x)$ est le déterminant de Wronski associé à $\mathscr{F}$ et W_k est le déterminant qu'on obtient si on remplace dans W la k-me colonne par $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(x) \end{pmatrix}$.

Preuve. Découle de 5.6

6. Systèmes d'équations différentielles linéaires d'ordre n à coefficients constants

On considère ici des systèmes de la forme $y' = Ay$, $A = (a_{ij})$ une matrice carrée d'ordre n dans $\mathbb{C}$, $y = (y_1, \ldots, y_n)^t$.
Rappel
On appelle $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A (notation : $\lambda \in \sigma(A)$) s'il existe $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$, tel que $Av = \lambda v$. Ainsi λ est une valeur propre de $A \Longleftrightarrow \det(A - \lambda I_n) = 0$ (i.e. ssi λ est une racine du polynôme caractéristique p_A associé à A). Le vecteur v est appellé un vecteur propre associé à λ. Les vecteurs propres associés à $\lambda \in \sigma(A)$ sont donc les solutions du système homogène d'équations linéaires $(A - \lambda I_n)v = 0$. L'espace propre E_λ est égal au noyau de (l'application linéaire engendrée par la matrice) $A - \lambda I_n$.

Si A est une matrice réelle, alors λ est une valeur propre $\Longleftrightarrow \overline{\lambda}$ est une valeur propre de A.

A est diagonalisable s'il existe une matrice inversible M telle que $A = MDM^{-1}$, où

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

est une matrice diagonale. Notons que D est formée avec les valeurs propres (pas nécessairement distinctes) λ_j de A. Les n colonnes de M sont formées par des vecteurs propres (linéairement indépendantes) de A et associés à λ_j.

Proposition 6.1. *Soit A une matrice sur $\mathbb{C}$ d'ordre n, $\lambda \in \mathbb{C}, v \in \mathbb{C}^n$. Alors*

$$y(x) = e^{\lambda x} v$$

est une solution de $y' = Ay \Longleftrightarrow \lambda$ est une valeur propre de A et $v \in E_\lambda$. Les solutions $y_j(x) = e^{\lambda_j x} v_j, (j = 1, \ldots, p)$ sont linéairement indépendantes $\Longleftrightarrow$

les vecteurs propres v_j sont linéairement indépendantes. Si A est diagonalisable, alors A admet n vecteurs propres v_j linéairement indépendantes et donc

$$\mathscr{F}_{\mathbb{C}} = \{e^{\lambda_1 x}v_1, \ldots, e^{\lambda_n x}v_n\}$$

est un système fondamental de $y' = Ay$.

Preuve.

$$y'(x) = \lambda e^{\lambda x}v = e^{\lambda x}(\lambda v) = e^{\lambda x}(Av) = A(e^{\lambda x}v) = Ay.$$

Soit $W(x) = \det(y_1(x), \ldots, y_n(x))$ le déterminant de Wronski associé à ce système. Comme $W(0) = \det(v_1, \ldots, v_n)$ et que

$$W(x) = W(0)\exp\int_0^x \operatorname{trace} A\, dt = W(0)e^{x \operatorname{trace} A},$$

on en déduit l'assertion sur l'indépendance linéaire.

Proposition 6.2. *Soient A une matrice réelle d'ordre n, $\lambda = \alpha + i\beta$ une valeur propre non réelle de A et $\mathbf{w} = \mathbf{u} + i\mathbf{v} \in E_\lambda \in \mathbb{C}^n$. Alors la solution complexe $\mathbf{y}(x) = e^{\lambda x}\mathbf{w}$ de $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ donne lieu a deux solutions réelles linéairement indépendantes de $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$; à savoir*

$$\mathbf{y}_1(x) = \operatorname{Re}\mathbf{y}(x) = e^{\alpha x}(\mathbf{u}\cos(\beta x) - \mathbf{v}\sin(\beta x))$$
$$\mathbf{y}_2(x) = \operatorname{Im}\mathbf{y}(x) = e^{\alpha x}(\mathbf{u}\sin(\beta x) + \mathbf{v}\cos(\beta x)).$$

Exemple 6.3. $\begin{cases} u_1' &= u_1 + 2u_2 \\ u_2' &= 2u_1 + u_2 \end{cases}$

Alors, pour $y = (u_1, u_2)^t$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ on obtient le système $y' = Ay$.

Valeurs propres :

$0 = \det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda+1)(\lambda-3)$

donc $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = 3$ sont deux valeurs propres ; la matrice est donc diagonalisable. Vecteur propre associé à λ_1 : $(A - \lambda_1)v_1 = 0 \Longrightarrow$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1+1 & 2 & 0 \\ 2 & 1+1 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{\text{-1}} & 0 \end{array}\right)$$

$\Longrightarrow v_1 = (1, -1)^t \Longrightarrow E_{\lambda_1} = \langle (1,-1)^t \rangle$; espace propre associé à λ_1 avec $\dim E_{\lambda_1} = 1$.

Vecteur propre associé à λ_2 : $(A - \lambda_2)v_2 = 0 \Longrightarrow$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1-3 & 2 & 0 \\ 2 & 1-3 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow\Longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{\text{-1}} & 0 \end{array}\right)$$

$\Longrightarrow v_2 = (-1, -1)^t \Longrightarrow E_{\lambda_2} = \langle (1,1)^t \rangle$; espace propre associé à λ_2 avec $\dim E_{\lambda_2} = 1$.

$\dim E_{\lambda_1} + \dim E_{\lambda_2} = 2 = \dim \mathbb{R}^2$; maximal ; donc A est bien diagonalisable et on a

$$M^{-1}AM = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},$$

avec $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Alors $y_1(x) = e^{-x}\binom{1}{-1}$ et $y_2(x) = e^{3x}\binom{1}{1}$ sont deux solutions linéairements indépendantes de $y' = Ay$.

Une matrice fondamentale de $y = Ay$ est donnée par

$$Y(x) = \begin{pmatrix} e^{-x} & e^{3x} \\ -e^{-x} & e^{3x} \end{pmatrix}.$$

L'ensemble de toutes les solutions de $y' = Ay$ est

$$\left\{ C_1 \begin{pmatrix} e^{-x} \\ -e^{-x} \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} e^{3x} \\ e^{3x} \end{pmatrix} : C_1, C_2 \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$\{Y(x)\mathbf{c} : \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2\}$$

Déterminant de Wronski :

$$W(x) = W(0) \exp \int_0^x \operatorname{tr} A \, dx = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} e^{2x} = 2e^{2x}$$

(ou bien $W(x) = \det Y(x) = 2e^{2x}$.)

Exemple 6.4. $\begin{cases} u_1' & = u_2 \\ u_2' & = -u_1 \end{cases}$

Alors, pour $y = (u_1, u_2)^t$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ on obtient le système $y' = Ay$.

Valeurs propres :

$0 = \det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1$

donc $\lambda_1 = i$ et $\lambda_2 = -i$ sont deux valeurs propres ; la matrice est donc diagonalisable. Vecteur propre associé à λ_1 : $(A - \lambda_1)v_1 = 0 \Longrightarrow$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -i & 1 & 0 \\ -1 & -i & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & i & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & 0 \end{array}\right)$$

$\Longrightarrow v_1 = (i, -1)^t \Longrightarrow E_{\lambda_1} = \langle (i, -1)^t \rangle$; espace propre associé à λ_1 avec $\dim E_{\lambda_1} = 1$.

A étant réelle, il suffit de prendre les conjugés complexes pour le reste :

$\Longrightarrow v_2 = (-i, -1)^t \Longrightarrow E_{\lambda_2} = \langle (i, 1)^t \rangle$; espace propre associé à λ_1 avec $\dim E_{\lambda_2} = 1$.

$\dim E_{\lambda_1} + \dim E_{\lambda_2} = 2 = \dim \mathbb{C}^2$; maximal ; donc A est bien diagonalisable et on a

$$M^{-1}AM = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},$$

avec $M = \begin{pmatrix} i & i \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Système fondamental complexe de $y' = Ay$:

$$\mathscr{F}_{\mathbb{C}} = \left\{ e^{ix}\begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix}, e^{-ix}\begin{pmatrix} -i \\ -1 \end{pmatrix} \right\};$$

Système fondamental réel de $y' = Ay$:

$$\mathscr{F}_{\mathbb{R}} = \left\{ \operatorname{Re} e^{ix}\begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix}, \operatorname{Im} e^{ix}\begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix} \right\} =$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} -\sin x \\ -\cos x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix} \right\}$$

Matrice fondamentale : $Y(x) = \begin{pmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{pmatrix}$.

Exemple 6.5. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

Trouver un système fondamental réelle de $y' = Ay$

$p_A(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2 + \lambda + 2)$;
valeurs propres de A : $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2}, \lambda_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{7}}{2}$.
Vecteurs propres :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2} \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, v_3 = \overline{v}_2.$$

Solutions : $y_1(x) = e^x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $y_2(x) = \operatorname{Re} \left[e^{(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{7}}{2})x} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2} \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right] =$

$e^{-\frac{1}{2}x} \left[\begin{pmatrix} 3/2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \cos((\sqrt{7}/2)x) - \begin{pmatrix} \sqrt{7}/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \sin((\sqrt{7}/2)x) \right]$,

$y_3(x) = \operatorname{Im} .... = e^{-\frac{1}{2}x} \left[\begin{pmatrix} \sqrt{7}/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cos((\sqrt{7}x)/2) + \begin{pmatrix} 3/2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \sin((\sqrt{7}x)/2) \right]$,

$\Longrightarrow \mathscr{F}_{\mathbb{R}} = \{y_1, y_2, y_3\}$.

Question : comment obtient-on un système fondamental si la matrice A n'est pas diagonisable ?

Théorème 6.6. *Soit λ une racine de $p_A(\lambda) = 0$ de multiplicité k. Alors il existe k solutions linéairement indépendantes de $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ qui ont la forme*

$$\mathbf{y}_1(x) = \mathbf{p}_0(x)e^{\lambda x}, \cdots, \mathbf{y}_k(x) = \mathbf{p}_{k-1}(x)e^{\lambda x},$$

où $\mathbf{p}_j(x) = \begin{pmatrix} p_{1,j} \\ \vdots \\ p_{n,j} \end{pmatrix}$ est un polynôme vectoriel de degré au plus j. Cette construction, appliquée à chaque valeur propre, donne un système fondamental complexe de $y' = Ay$. Si A est réelle, on obtient pour λ non réel, un système fondamental réel on prenant les parties réelles et imaginaires de ces solutions (en négligeant ceux associés à $\overline{\lambda}$.)

Cas où λ est une racine double de $p_A(\lambda) = 0$ et $\dim E_\lambda = 1$. Soit $y_1 = e^{\lambda x}v_1$ une solution de $y' = Ay$, où $v_1 \in E_\lambda$. Posons $y_2(x) = (v_1 x + b)e^{\lambda x}$, où $b \in \mathbb{R}^n$ est à déterminer. Donc :

$$y_2'(x) = (v_1 + \lambda v_1 x + \lambda b)e^{\lambda x} \stackrel{!}{=} Ay_2 = A(v_1 x + b)e^{\lambda x} = (\lambda v_1 x + Ab)e^{\lambda x} \Longleftrightarrow$$

$$(v_1 + \lambda b) = Ab \Longleftrightarrow (A - \lambda I_n)b = v_1.$$

Exemple 6.7.
$$\begin{cases} u_1' &= -15u_1 + 9u_2 \\ u_2' &= -25u_1 + 15u_2 \end{cases}$$

$A = \begin{pmatrix} -15 & 9 \\ -25 & 15 \end{pmatrix}$, $y = \binom{u_1}{u_2} \Longrightarrow y' = Ay$

$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -15-\lambda & 9 \\ -25 & 15-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda^2 - 15^2) + 25 \times 9 = \lambda^2$

$\Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $E_0 = \left\langle \binom{-3}{-5} \right\rangle$; $\dim E_0 = 1 < 2$

La matrice n'est donc pas diagonalisable.

Une solution de $y' = Ay$: $\quad y_1(x) = e^{0x}\binom{-3}{-5} = \binom{-3}{-5}$. Posons

$y_2(x) = [\binom{-3}{-5}x + \mathbf{b}]e^{0x} = \binom{-3x+b_1}{-5x+b_2}$. On doit résoudre

$$(A - 0 \cdot I_2)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Une solution suffit : $\binom{b_1}{b_2} = \binom{1/5}{0}$.

Donc

$$y_2(x) = \begin{pmatrix} -3x + \frac{1}{5} \\ -5x + 0 \end{pmatrix}$$

est une deuxième solution de $y' = Ay$ linéairement indépendante de y_1.

7. Exponentiel de matrices

Soit $A(x) = (a_{ij}(x))_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice carrée de d'ordre n de fonctions continues sur $I \subseteq \mathbb{R}$. Soit $A^0 := I_n$, la matrice identité. Alors $e^{A(x)}$ est définie par

$$e^{A(x)} := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}A(x)^j = \lim_m \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{j!}A(x)^j.$$

Si $A(x) = x \cdot A$, alors la fonction matricielle $x \mapsto e^{xA}$ est différentiable et $\frac{d}{dx}e^{xA} = Ae^{xA}$, car la série pour e^{xA} converge uniformément sur $\mathbb{R}$ et donc $\frac{d}{dx}\lim\sum = \lim\sum\frac{d}{dx}$. Notons que $\frac{d}{dx}x^mA^m = mx^{m-1}A^m$. (Par convention on écrit aussi Ax pour la matrice $x \cdot A$.)

Theorem 7.1. *Soit A une matrice carrée d'ordre n sur $\mathbb{C}$. La matrice e^{xA} est une matrice fondamentale du système d'équations différentielles $y' = Ay$.*

Preuve. Ecrivons $Y(x) =: e^{xA} = (y_1, \ldots, y_n)$. Notons que e^{xA} est inversible pour tout x, (car $e^{xA}e^{-xA} = e^{-xA}e^{xA} = I_n$). $Y' = (y_1', \ldots, y_n') = Ae^{xA} = AY$. Donc $y_j' = Ay_j$.

version du : 5.2.2012