Analyse fonctionnelle

Raymond Mortini

Définition

E espace vectoriel sur le corps $K = \mathbf{R}, \mathbf{C}$. $\mathcal{T}$ topologie T_1 sur E. On dit que $(E, \mathcal{T})$ est un *espace vectoriel topologique (evt)* si l'addition $\oplus \begin{cases} E \times E \longrightarrow E \\ (x,y) \mapsto x+y \end{cases}$ et la multiplication scalaire $\underset{S}{\bullet} \begin{cases} \mathbb{K} \times E \to E \\ (\alpha\,,\,x) \mapsto \alpha \cdot x \end{cases}$ sont continues, où $E \times E$ et $\mathbb{K} \times E$ sont munis des topologies du produit.

- Exemple

• chaque espace normé $(E\,,\,\|\cdot\|)$ est un espace vectoriel topologique pour la topologie induite par la distance $d(x,y) = \|x-y\|$

• $(L^p([0,1])\,,\,d_p)$ $\quad 0 < p < 1 \to$ espace métrique complet
$(L^p([0,1])\,,\,\|\cdot\|_p)$ $\quad 1 \leq p < \infty \to$ espace normé
$d_p\,(f,g) = \|f-g\|_p^p = \int_{[0,1]} |f-g|^p$.

Remarques.

1) E evt., $x_0 \in E$. Alors la translation $\begin{cases} E \to E \\ x \mapsto x + x_0 \end{cases}$ est un homéomorphisme.

2) $\alpha \in \mathbb{K}, \alpha \neq 0$. Alors l'homothétie $\begin{cases} E \to E \\ x \mapsto \alpha x \end{cases}$ est un homéomorphisme.

3) $\mathcal{U}(x_0) = x_0 + \mathcal{U}(0)$

4) $U \in \mathcal{U}(x_0) \Longrightarrow \exists V \in \mathcal{U}(0)$ tq $x_0 + V + V \subseteq U$ (ceci est dû à la continuité de $\oplus : 0 + 0 = 0$).

I - THÉORÈMES DE HAHN-BANACH

E evt, f forme linéaire sur E. Alors f n'est pas continue en général (voir 1.10).

Les formes linéaires sont déterminées de façon unique par la donnée de leur image sur une base algébrique de E. Notons que d'après le lemme de Zorn, chaque espace vectoriel possède une base algébrique.

$F \subseteq E$, F sev. $f : F \to \mathbf{K}$ linéaire. Alors f possède un prolongement linéaire $f^* : E \to \mathbf{K}$. En effet, soit $E = F \oplus G$, où G est un supplémentaire algébrique de F. Soit $x = u + v, u \in F, v \in G$. On pose $f^*(x) = f(u)$.

$\Rightarrow \; f^* \in l\,(E, \mathbf{K})$

Définition

E espace vectoriel sur $\mathbf{C}$. On peut considérer le même ensemble de vecteurs E avec la même addition comme un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ en restreignant à $\mathbf{R} \times E$ l'application $(\lambda\,,\,x) \mapsto \lambda \cdot x$, définie primitivement sur $\mathbf{C} \times E$. L'espace vectoriel définie ainsi sera noté par $E_{\mathbf{R}}$ et est appelé l'*espace vectoriel réel sous-jacent à E.*

Proposition 1.1

E espace vectoriel sur $\mathbf{C}$, $E_{\mathbf{R}}$ l'espace vectoriel réel sous-jacent à E.

1 - Soit f une forme linéaire (complexe) sur $E\,(f \in l\,(E, \mathbf{C}))$ et soit u sa partie réelle ie $u\,(x) = Re\,f(x)\,,\, x \in E$. Alors u est une forme linéaire sur $E_{\mathbf{R}}$ $(u \in l\,(E_{\mathbf{R}}\,,\,\mathbf{R}))$ et $\forall\, x \in E\,,\; f(x) = u\,(x) - i\,u\,(i\,x)$ $\quad (*)$

2 - Soit $u \in l\,(E_{\mathbf{R}}\,,\,\mathbf{R})$. On définit f par $(*)$. Alors $f \in l\,(E\,,\,\mathbf{C})$ et $u = Re\,f$.

3 - Si E est normé alors u continue $\Longleftrightarrow$ f continue. Dans ce cas, ces formes linéaires ont la même norme.

Démonstration

1) $\bullet$ $z = a + ib \Rightarrow z = Re\,z - i\,Re\,(i\,z) \Rightarrow (*)$

$\bullet$ $\alpha, \beta \in \mathbf{R}\,,\, x, y \in E \Rightarrow u\,(\alpha\,x + \beta\,y) = \alpha\,u\,(x) + \beta\,u\,(y)$

2) $u \in l\,(E_{\mathbf{R}}\,,\,\mathbf{R})\,,\, f$ donnée par $(*)$

$\Rightarrow \;\; f(x+y) = f(x) + f(y)$

et $f(i\,x) = u\,(i\,x) - i\,u\,(i(ix)) = u\,(i\,x) - i\,u\,(-x) = u\,(ix) + i\,u\,(x) = i\,f(x)$

$\Rightarrow \;\; f \quad \mathbf{C}$-linéaire.

(Notons que $f\,(i\,\alpha\,x) = \alpha\,f\,(ix)$ par la $\mathbf{R}$-linéarité de u). De plus, $Re\,f = u$.

3) $\bullet$ L'assertion sur la continuité est claire

$\bullet$ $|u\,(x)| = |Re\,f(x)| \leq |f(x)| \Rightarrow \sup\limits_{\|x\|=1} |u(x)| \leq \sup\limits_{\|x\|=1} |f(x)| \Longrightarrow$

$\|u\| \leq \|f\|$.

$\forall\, x \in E\,,\, \exists\, \lambda \in \mathbf{C}\,,\, |\lambda| = 1 \;\; t.q. \;\; |f(x)| = \lambda\,f(x)$

$\Rightarrow |f(x)| = \lambda\,f(x) \underset{\mathbf{C}-lin}{=} f\,(\lambda\,x) \underset{\substack{\text{image} \\ \text{réelle}\ (*)}}{=} u\,(\lambda\,x) \leq \|u\|\;\|\lambda\,x\| = \|u\|\;\|x\|$

$\overset{\sup}{\Rightarrow} \|f\| \leq \|u\|$.

Finalement $\|u\| = \|f\|$ $\quad \bigcirc$

Définition
E espace vectoriel sur $\mathbf{K}$. Une application $p \,:\, E \to \mathbf{R}$ est dite *sublinéaire* si :

1) $p\,(\lambda\, x) = \lambda\, p\,(x) \quad \forall\, x \in E\,,\, \forall\, \lambda > 0.$
2) $p\,(x+y) \le p\,(x) + p\,(y) \quad \forall\, x, y \in E.$

- Exemple Chaque semi-norme est sublinéaire

$$\|\cdot\| \,:\, E \to [0, +\infty[\quad t.q. \quad \bullet \ \ \|x\| \ge 0 \quad \forall\, x \in E$$

$$\bullet\ \|x+y\| \le \|x\| + \|y\| \ x, y \in E \bullet \ \ \|\lambda\, x\| = |\lambda|\, \|x\| \quad \forall\, \lambda \in \mathbf{K}\,, \forall\, x$$

Lemme 1.2
E espace vectoriel sur $\mathbf{R}$, p application sublinéaire sur E, $M \subseteq E$ sev., $l \,:\, M \to \mathbf{R}$ linéaire, $l\,(x) \le p\,(x) \quad \forall\, x \in M$. Soit $x_0 \in E \setminus M$. Alors il existe sur

$$H = M \oplus \mathbf{R}\, x_0 = \ vect\,(M\,,\, \{x_0\}) = \{x + \alpha\, x_0\,,\, x \in M\,,\, \alpha \in \mathbf{R}\}$$

une application linéaire L t.q. $L|_M = l$ et $L(x) \le p\,(x) \quad \forall\, x \in H$

Démonstration

$$\xi\,,\, \eta \in M \Rightarrow l\,(\xi) + l\,(\eta) = l\,(\xi + \eta) \le p(\xi + \eta)$$

$$p(\xi + \eta) = p(\xi + x_0 + \eta - x_0) \overset{p\ subli.}{\le} p(\xi + x_0) + p(\eta - x_0)$$

$\Rightarrow \ \ l\,(\eta) - p\,(\eta - x_0) \le p\,(\xi + x_0) - l\,(\xi)$

$\Rightarrow \ \ m_0 := \sup\limits_{\eta \in M} \ [l\,(\eta) - p\,(\eta - x_0)] \le \inf\limits_{\xi \in M} \ [p\,(\xi + x_0) - l\,(\xi)] =: m_1$

Soit $m_0 \le m_2 \le m_1$. Pour $x \in M$, $\lambda \in \mathbf{R}$, on pose

$$L\,(x + \lambda\, x_0) = l\,(x) + \lambda\, m_2 \Rightarrow L \in l\,(H, \mathbf{R})\,.$$

Soit $\lambda > 0\,,\, x \in M$.

$$\Rightarrow L\,(x + \lambda\, x_0) = l\,(x) + \lambda\, m_2 \le l\,(x) + \lambda\, m_1$$

$$\le l\,(x) + \lambda \left[p\Big(\underbrace{\frac{1}{\lambda}\ \ x}_{\xi} + x_0 \Big) - l\Big(\frac{x}{\lambda}\Big) \right] \overset{p\ sublin.}{=} p\,(x + \lambda\, x_0)$$

Pour $\lambda < 0$ et $x \in M$, on a :

$$L(x + \lambda\, x_0) = l\,(x) + \lambda\, m_2 \overset{\lambda < 0}{\le} l\,(x) + \lambda\, m_0$$

$$\le l\,(x) + \lambda \left[-p\left(-\frac{x}{\lambda} - x_0 \right) + l\left(-\frac{x}{\lambda} \right) \right] = p\,(x + \lambda\, x_0)$$

Pour $\lambda = 0 \,:\, L(x) = l\,(x) \le p\,(x)$

$\Rightarrow L(y) \le p\,(y) \quad \forall\, y \in H\,.$ $\bigcirc$

Théorème 1.3 (*Hahn-Banach*)
E espace vectoriel sur $\mathbf{R}$, p appli. sublinéaire sur E, $M \subseteq E$ sev., $l : M \to \mathbf{R}$ linéaire t.q. $l(x) \leq p(x) \quad \forall x \in M$. Alors $\exists L \in l(E, \mathbf{R})$ t.q. $L|_M = l$ et $L(x) \leq p(x) \quad \forall x \in E$.

Démonstration
Soit $\mathcal{M} = \{(V, L) : M \subseteq V \subseteq E, V$ sev, $L \in l(V, \mathbf{R}), L|_M = l, \quad L(x) \leq p(x) \quad \forall x \in V\}$.
$\mathcal{M} \neq \emptyset$ car $(M, l) \in \mathcal{M}$. On définit une relation d'ordre "$\leq$" sur $\mathcal{M}$ par :

$$(V_1, L_1) \leq (V_2, L_2) \Longleftrightarrow V_1 \subseteq V_2 \;,\; L_2|_{V_1} = L_1$$

• $\mathcal{M}$ est inductif, i.e. chaque partie $\mathcal{K}$ totalement ordonnée de $\mathcal{M}$ est majorée par un élément de $\mathcal{M}$:

$$U_0 := \{x \in E : \exists (U, L) \in \mathcal{K} \text{ avec } x \in U\} = \bigcup_{(U,L) \in \mathcal{K}} U$$

U_0 sev de E, car $\forall x_1, x_2 \in U_0, \exists (U_j, L_j) \in \mathcal{K}$ *t.q.* $x_j \in U_j$ $(j = 1, 2)$
Sans perte de généralité $U_1 \subseteq U_2$ ($\mathcal{K}$ tot. ord.) $\Rightarrow x_1, x_2 \in U_2$

$$\overset{U_2 \text{ esp.vect.}}{\Longrightarrow} \quad \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in U_2 \overset{(U_2, L_2) \in \mathcal{K}}{\Longrightarrow} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in U_0$$

• Posons $L_0(x) := L(x)$ si $x \in U$ et $(U, L) \in \mathcal{K}$
$\Rightarrow$ L_0 bien définie car: supposons que $(U_1, L_1), (U_2, L_2) \in \mathcal{K}$ avec $x \in U_1 \cap U_2$. $\mathcal{K}$ totalement ordonné $\underset{s.p.g.}{\Longrightarrow}$ $(U_1, L_1) \leq (U_2, L_2)$ *ie* $U_1 \subseteq U_2$ et $L_2|_{U_1} = L_1 \Longrightarrow L_2(x) = L_1(x)$.
De plus, L_0 linéaire, $(U_0, L_0) \in \mathcal{M}$, et $(U, L) \leq (U_0, L_0) \quad \forall (U, L) \in \mathcal{K}$
• Lemme de Zorn $\Rightarrow$ $(\mathcal{M}, \leq)$ possède un élt max. (U, L)
$\overset{\text{Lemme 1.2}}{\Longrightarrow}$ $U = E$ et d'après la définition de $\mathcal{M}$, L a les propriétés voulues. ○

Théorème 1.5 (*Hahn-Banach 2ème version*)
E espace vectoriel sur $\mathbf{K}$, $M \subseteq E$ sous-espace vectoriel, p semi-norme, $l : M \to \mathbf{K}$ linéaire, $|l(x)| \leq p(x) \quad \forall x \in M$. Alors $\exists L \in l(E, \mathbf{K})$ t.q. $L|_M = l$ et $|L(x)| \leq p(x) \quad \forall x \in E$.

Démonstration

- <u>1er cas</u> : $\mathbf{K} = \mathbf{R}$

hyp. 1.5 $\Rightarrow$ l et p satisfont les hyp. de 1.3

$\Rightarrow \exists L \in l(E, \mathbf{R})$ *t.q.* $L|_M = l$ et $L(x) \leq p(x) \quad \forall x \in E$

$\Rightarrow -L(x) = L(-x) \leq p(-x) \overset{p \text{ semi-norme}}{=} |-1|\, p(x) = p(x)$

$\Rightarrow |L(x)| \leq p(x) \quad \forall x \in E$

- <u>2ème cas</u> : $\mathbf{K} = \mathbf{C}$

Considérons $E_{\mathbf{R}}$ l'espace vectoriel réel sous-jacent. On définit
$u : M_{\mathbf{R}} \to \mathbf{R}$ par $u(x) = Re\,(l(x))$
$\Rightarrow u \in l\,(M_{\mathbf{R}}\,,\,\mathbf{R})$ et $|\underbrace{u\,(x)}_{\in \mathbf{R}}| \leq |\underbrace{l\,(x)}_{\in \mathbf{C}}| \leq p\,(x) \quad \forall\, x \in M_{\mathbf{R}}$

$l\,\mathbf{C}$-linéaire $\overset{\text{prop. 1.1}}{\Longrightarrow}$ $l\,(x) = u\,(x) - i\;u\,(i\,x) \quad \forall\, x \in M$

Le 1er cas nous donne un $\widetilde{L} : E_{\mathbf{R}} \to \mathbf{R}$ *t.q.* $\widetilde{L}|_{M_{\mathbf{R}}} = u$ et $|\underbrace{\widetilde{L}(x)}_{\in \mathbf{R}}| \leq p\,(x) \quad \forall\, x \in E_{\mathbf{R}}$.

On définit $L : E \to \mathbf{C}$ par $L(x) = \widetilde{L}(x) - i\,\widetilde{L}\,(ix)$

$\Rightarrow L$ est $\mathbf{R} - lin$. On a même que L est $\mathbf{C} - lin$ (prop. 1.1).
En plus $L|_M = l$.
Soit $x \in E\,,\, \exists\, \sigma \in \mathbf{C}\,,\, |\sigma| = 1$ *t.q.* $|L(x)| = \sigma\, L(x)$

$\Rightarrow |L(x)| = \sigma\, L(x) = L\,(\sigma\, x) = Re\,(L(\sigma\, x)) = \widetilde{L}\,(\sigma\, x) = |\widetilde{L}\,(\sigma\, x)| \leq p\,(\sigma\, x)$

p semi-norme $\Rightarrow p\,(\sigma\, x) = |\sigma|\, p\,(x) = p(x) \quad \forall\, x \in E$. Donc $|L(x)| \leq p(x)$. ○

Corollaire 1.6
E espace vectoriel sur $\mathbf{K}$, p semi-norme sur E, $x_0 \in E$, $x_0 \neq 0$. Alors

$$\exists\, L \in l\,(E\,,\,\mathbf{K}) \;\; t.q. \;\; L(x_0) = p(x_0) \quad et \quad |L(x)| \leq p(x) \quad \forall\, x \in E\,.$$

Démonstration
Soit $F = vect\, x_0 = \mathbf{K}\, x_0$. On définit $l : F \to \mathbf{K}$ par $l\,(\lambda\, x_0) = \lambda\, p\,(x_0) (\lambda \in \mathbf{K})$

$\Rightarrow l$ est $\mathbf{K}$-linéaire et $l(x_0) \underset{p}{=} p(x_0)$. Pour $x = \lambda x_0 \in F$ on obtient: $|l(x)| = |l\,(\lambda\, x_0)| = |\lambda\, p(x_0)| = |\lambda|\, p(x_0) \overset{\text{semi-norme}}{=} p(\lambda\, x_0) = p(x)$

$\overset{\text{Theor. 1.5}}{\Longrightarrow} \quad \exists\, L \in l\,(E, \mathbf{K}) \;\; t.q. \;\; L|_F = l \quad$ et $\quad |L(x)| \leq p\,(x) \quad \forall\, x \in E$ ○

Théorème 1.7 Hahn-Banach pour les espaces normés.
E espace normé sur $\mathbf{K}$, F sev. de E, $l : F \to \mathbf{K}$ forme linéaire continue. Alors il existe une application linéaire continue $L : E \to \mathbf{K}$ t.q. $L|_F = l$ et $\|L\| = \|l\|$.

Démonstration
Soit $p : E \to [0, +\infty[$ définie par $p(x) = \|l\|\; \|x\|_E$

$\Rightarrow p$ semi-norme et $\forall\, x \in F\; |l\,(x)| \leq \|l\|\, \|x\|_E = p(x)$

$\overset{1.5}{\Rightarrow} \exists\, L : E \to \mathbf{K}$ linéaire, $L|_F = l$ telle que $|L(x)| \leq p\,(x) = \|l\|\; \|x\|_E \quad \forall\, x \in E$.

$\Rightarrow L$ continue (appl. lin. bornée) et $\|L\| \leq \|l\|$. Supposons $F \neq \{0\} \Longrightarrow$

$$\|L\| = \sup_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} \frac{|L(x)|}{\|x\|} \geq \sup_{\substack{x \in F \\ x \neq 0}} \frac{|L(x)|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \in F \\ x \neq 0}} \frac{|l(x)|}{\|x\|} = \|l\|.$$

Donc $\|L\| = \|l\|$. ○

Lemme 1.8
E espace normé, $F \subseteq E$ sev. propre, $x_0 \in E \backslash F$. Supposons que $\delta := dist\,(x_0, F) > 0$. Alors il existe une forme linéaire continue L sur E t.q. $\|L\| = 1$, $L(x_0) = \delta$ et $L|_F \equiv 0$.

Démonstration
Posons $F_0 = [x_0\,,\,F] = \{x = \alpha\, x_0 + y\,,\ \alpha \in \mathbf{K}\,,\ y \in F\}$ (représ. uniq.). On définit
$$l\,:\,\begin{cases} F_0 \to \mathbf{K} \\ x = \alpha\, x_0 + y \mapsto l\,(x)\ := \alpha \cdot \delta \end{cases}$$
$\Rightarrow$ l linéaire, $l|_F \equiv 0 \qquad l\,(x_0) = \delta$.

Soit $\alpha \in \mathbf{K} \setminus \{0\}\,,\ y \in F\,,$
$x = \alpha\, x_0 + y \Rightarrow \|x\| = \|\alpha\, x_0 + y\| = |\alpha|\ \left\| x_0 + \frac{1}{\alpha}\, y \right\| \geq |\alpha|\ d\,(x_0\,,\,F) = |\alpha|\ \delta = |l\,(x)|$
$\Rightarrow$ l continue et $\|l\| \leq 1$

Considérons $(y_n) \in F$ t.q. $\|x_0 - y_n\| \to \delta$
$$\underset{(\delta>0)}{\Longrightarrow} \frac{|l(x_0-y_n)|}{\|x_0-y_n\|} \overset{l|_F\equiv 0}{=} \frac{|l(x_0)|}{\|x_0-y_n\|} \to \frac{l(x_0)}{\delta} = \frac{\delta}{\delta} = 1$$
$\Rightarrow \|l\| = 1$
$\overset{\text{th. } 1.7}{\Rightarrow}$ assertion. ○

Définition
$X \neq \emptyset\,,\ \mathcal{F} \subseteq \mathbb{C}^X$. $\mathcal{F}$ *sépare les points* ($\mathcal{F}$ famille séparante) si
$\forall\, x_1\,,\ x_2 \in X\,,\ x_1 \neq x_2\,,\ \exists\, f \in \mathcal{F}$ *t.q.* $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Corollaire 1.9
Soit E^* l'espace normé des formes linéaires continues sur E. Alors on a :

a) Si $E \neq \{0\}$ est un espace normé alors $E^* \neq \{0\}$ et E^* est séparante.
b) De plus, $\forall\, x_0 \neq 0\,,\ x_0 \in E\,,\ \exists\, L \in E^*$ t.q. $\|L\| = 1\,,\ L(x_0) = \|x_0\|$.
c) dim $E^* < \infty \Longrightarrow$ dim E = dim E^*.

Démonstration
• Posons $F = \{0\}$, $\quad \delta = dist\,(x_0\,,\,F) \underset{F \text{ fermé}}{\Longrightarrow} \delta > 0$ et $\delta = \|x_0\|$

$\overset{\text{lemme } 1.8}{\Longrightarrow}$ assertion b)

• Soit $x_1 \neq x_2 \Rightarrow x_1 - x_2 \neq 0 \overset{b)}{\Longrightarrow} \exists\, L \in E^*\,,\ L(x_1 - x_2) = \|x_1 - x_2\| \neq 0$ $\Rightarrow L(x_1) \neq L(x_2)$
$\Rightarrow E^*$ séparante.

• Supposons dim $E = \infty$. Soit $\{x_1, x_2, \cdots\}$ un système libre. Alors d'après 1.7 et 1.10 $\exists\, f_j \in E^*$ tel que $f_j(e_k) = 0$ si $k < j$ et $f_j(x_j) = 1$. Il est clair que $\{f_1, f_2, \cdots\}$ est un système libre dans E^*. Donc $\dim E^* = \infty$. D'autre part si, $\dim E = n$, alors on sait que $\{f_1, \cdots, f_n\}$ engendre $E' = E^*$. ○

Remarque Il est possible que $E^* = \{0\}$ si E est un evt. arbitraire

- Exemple $L^p([0,1])$ $0 < p < 1$. (exo)

Proposition 1.10
$E \neq \{0\}$ espace normé. Alors chaque forme linéaire f sur E est continue $\Leftrightarrow$ $\dim E < +\infty$.

Démonstration

"$\Leftarrow$" Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ base algébrique de E ($\dim E = n < +\infty$). Notons que toutes les normes sur E sont équivalentes. Soient
$y_k \in E$, $y_k = \sum_{\nu=1}^n \alpha_\nu^{(k)} x_\nu$, $y = \sum_{\nu=1}^n \alpha_\nu x_\nu$. Alors $y_k \xrightarrow{\|\cdot\|} y \iff \alpha_\nu^{(k)} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} a_\nu \quad \forall \nu = 1, \cdots, n$ (*).
Soit $f : E \to \mathbf{K}$ linéaire. Alors $f(y_k) = \sum_{\nu=1}^n \alpha_\nu^{(k)} f(x_\nu) \xrightarrow{(*)} \sum_{\nu=1}^n \alpha_\nu f(x_\nu) = f(y)$
"$\Rightarrow$" Soit $\dim E = +\infty$. Construisons une forme linéaire discontinue. Soit $\mathcal{B}$ base algébrique de E. Soit $\{b_n, n \in \mathbf{N}\} \subseteq \mathcal{B}$, s.p.g. $\|b_n\| = 1$. Soit $l(b_\nu) = \nu$, $\nu = 1, 2, \ldots$ et $l(b) = 0 \;\forall b \in \mathcal{B} \setminus \{b_n, n \in \mathbf{N}\}$.
l admet un prolongement linéaire sur E (noté aussi par l).
Mais l est discontinue car l non bornée sur la boule unité de E: $\frac{|l(b_\nu)|}{\|b_\nu\|} = \nu \to \infty$.
○

Définition Soient E un espace normé et E^* son dual topologique.
Notation Si $x^* \in E^*$ et $x \in E$ alors on écrit $(x, x^*) := x^*(x)$. Ainsi le noyau de x^* est donné par $\mathrm{Ker}\, x^* := \{x \in E : (x, x^*) = 0\}$.

1.11 Proposition *Soit E un espace normé et $x \in E$. Alors*

$$||x|| = \max_{||x^*||=1} |(x, x^*)| \quad (x^* \in E^*). \tag{1}$$

Dém $|(x, x^*)| = |x^*(x)| \leq ||x^*||\,||x|| = ||x||$ si $||x^*|| = 1$. Si $x \neq 0$, alors d'après Hahn-Banach $\exists\, x^* \in E^*$ tq $x^*(x) = ||x||$ et $||x^*|| = 1 \Longrightarrow \sup_{||y^*||=1} |(x, y^*)| = \max_{||y^*||=1} |(x, y^*)| = |(x, x^*)| = ||x||$.
Si $x = 0$, l'équation (1) est trivial. ○

1.12 Théorème sur les espaces quotients
a) Soit E un espace normé et $F \subseteq E$ un sev **fermé** de E. Soit $[x] := \tilde{x} := x + F \in E/F$, et $||\tilde{x}|| := \inf_{y\in[x]} ||y||$. Alors

(1) $||\tilde{x}||$ est une norme sur l'espace quotient E/F.
(2) L'homomorphisme canonique $\pi : E \to E/F$ définie par $\pi(x) = [x]$ est continue, surjectif et ouvert. On a $||\pi||_{op} = 1$ si $F \neq E$.
(3) Si E est un espace de Banach, alors E/F l'est aussi.

b) Soit en plus H un espace normé et $A \in \ell(E, H)$ tel que $\mathrm{Ker}\, A \supseteq F$. Alors
(4) $\exists_1\, \hat{A} \in \ell(E/F, H)$ tq $A = \hat{A} \circ \pi$

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{A} & H \\ {}_{\pi}\searrow & & \nearrow_{\hat{A}} \\ & E/F & \end{array}$$

(5) $\hat{A}$ injective $\iff F = \text{Ker } A$ ($\hat{A}$ s'appelle dans ce cas l'injection canonique).
(6) A continue $\iff \hat{A}$ continue. Dans ce cas $||A||_{op} = ||\hat{A}||_{op}$.
(7) Si A est surjective et $\text{Ker}\, A = F$, alors $\hat{A}$ est un isomorphisme de $E/\text{Ker}\, A$ sur H.

Dém. Voir TD.

Soient E un espace normé, $M \subseteq E$ et $N \subseteq E^*$ des sous-espaces (sev). On définit les espaces orthogonaux associés à M et N par

$$M^\perp := \{x^* \in E^* : (x, x^*) = 0 \ \forall x \ \in M\}$$

$$^\perp N := \{x \in E : (x, x^*) = 0 \ \forall x^* \in N\}.$$

On voit que $M^\perp$ et $^\perp N$ sont des sev de E^* resp. E et que $^\perp N$ est fermé dans E, car $^\perp N = \bigcap_{x^* \in N} \text{Ker } x^*$.
En plus, $M^\perp$ est fermé dans E^*, car soit $x_n^* \in M^\perp$ et $||x_n^* - x^*||_{op} \to 0$. Alors $\forall y \in M : 0 = (y, x_n^*) \to (y, x^*)$ et donc $(y, x^*) = 0 \ \forall \ y \in M$. Ainsi $x^* \in M^\perp$.

1.13 Proposition *Soit E un espace normé. Alors pour tout sev M de E on a:* $^\perp(M^\perp) = \overline{M}$.

Dém. "$\supseteq$" Soit $x \in M$. Alors $(x, x^*) = 0 \ \forall x^* \in M^\perp$. Donc $x \in {}^\perp(M^\perp)$. Cet espace étant fermé, on obtient $\overline{M} \subseteq {}^\perp(M^\perp)$.
"$\subseteq$" Si $x \notin \overline{M}$, alors d'après Hahn-Banach, $\exists \ x^* \in E^*$ tq $||x^*|| = 1$, $x^*|_{\overline{M}} \equiv 0$ et $(x, x^*) \neq 0$ Ceci implique que $x^* \in M^\perp$, et ainsi $x \notin {}^\perp(M^\perp)$. ○

1.14 Proposition *Soit E un espace normé et $M \subseteq E$ un sev fermé. Alors*
(1) $M^* \underset{||\cdot||}{\cong} E^*/M^\perp$, i.e. M^* est isomorphe isométrique à l'espace quotient $E^*/M^\perp$, et

$$\sup_{\substack{x \in M \\ ||x||=1}} |(x, x^*)| = \min_{y^* \in M^\perp} ||x^* + y^*|| \quad (x^* \in E^*)$$

(2) $(E/M)^* \underset{||\cdot||}{\cong} M^\perp$ et

$$\max_{\substack{y^* \in M^\perp \\ ||y^*||=1}} |(x, y^*)| = \inf_{y \in M} ||x + y|| \quad (x \in E).$$

Dém. (1) $x^* \in E^* \implies x^*|_M \in M^*$; l'application de restriction $\rho : E^* \to M^*$ définie par $\rho(x^*) := x^*|_M$ est linéaire et, d'après Hahn-Banach, surjective. Notons que $\text{Ker}\, \rho = \{x^* \in E^* : x^*|_M \equiv 0\} = M^\perp$. Considérons l'injection canonique $\hat{\rho}$ associée à ρ:

$$\begin{array}{ccc} E^* & \xrightarrow{\rho} & M^* \\ {}_\pi\searrow & & \nearrow_{\hat\rho} \\ & E^*/\mathrm{Ker}\,\rho & \end{array}$$

$\hat\rho^{-1} : M^* \to E^*/M^\perp$ est donné par: $m^* \mapsto x^* + M^\perp$, où x^* est un prolongement linéaire continue quelconque de m^* sur E.
• $E^*/M^\perp \cong M^*$ clair
• $\hat\rho$ isométrie: Soit $m^* \in M^*$. Hahn-Banach $\Longrightarrow \exists\ x^* \in E^*$ tq $\rho(x^*) = m^*$.
Hahn-Banach: $||\hat\rho^{-1}(m^*)||_{E^*/M^\perp} = ||x^* + M^\perp|| = \inf\{||y^*|| : y^*|_M = m^*\} = ||m^*|| \Longrightarrow \hat\rho$ isométrie. L'infimum est atteint. Donc: $\min_{y^*\in M^\perp} ||x^* + y^*|| = \sup_{\substack{||x||=1\\ x\in M}} |(x, x^*)|$.
(2) Soit $\pi : E \to E/M$ l'application quotient. L'isomorphisme isométrique T entre $(E/M)^*$ et $M^\perp$ sera définie par: $T(\Phi) = \Phi \circ \pi$, où $\Phi \in (E/M)^*$.
• T est bien définie: en effet, notons d'abord que $\Phi \circ \pi$ est un élément de E^*. Soit $x \in M$, alors on a $\forall \Phi \in (E/M)^*$: $(\Phi \circ \pi)(x) = \Phi(x + M) = \Phi([0]) = 0$. Donc $T(\Phi) = \Phi \circ \pi \in M^\perp$.
• T linéaire, car Φ et π linéaire.
• T injective, car soit $T\Phi = \mathcal{O}$, i.e. $\forall\ x \in E : (T\Phi)(x) = 0$. Alors $0 = (\Phi \circ \pi)(x) = \Phi(\pi(x))$. Ainsi $\Phi(E/M) = \{0\}$ et donc $\Phi \equiv 0$.
• T est surjective, car car, soit $y^* \in M^\perp \subseteq E^*$. Alors $\mathrm{Ker}\, y^* \supseteq M$. 1.12 $\Longrightarrow \exists_1\ \widehat{y^*} \in (E/M)^* : y^* = \widehat{y^*} \circ \pi$. Ainsi $T(\widehat{y^*}) = \widehat{y^*} \circ \pi = y^*$.
• T et T^{-1} sont des isométries, car d'après 1.12 on a pour $y^* \in M^\perp$ que $||\hat y^*|| = ||y^*|| = ||T\hat y^*||$.
• (estimations des normes): 1.11 $\Longrightarrow \forall\ \ x + M \in E/M$:

$$\inf_{y\in M} ||x+y|| = ||x+M|| = \max_{\substack{\Phi\in(E/M)^*\\ ||\Phi||=1}} |(x+M,\Phi)| =$$
$$= \max_{\substack{\Phi\in(E/M)^*\\ ||\Phi||=1}} |\Phi(x+M)| = \max_{\substack{\Phi\in(E/M)^*\\ ||\Phi||=1}} |T\Phi(x)| =$$
$$= \max_{\substack{y^*\in M^\perp\\ ||y^*||=1}} |y^*(x)| = \max_{\substack{y^*\in M^\perp\\ ||y^*||=1}} |(x,y^*)|.$$

1.15 Théorème sur les opérateurs duaux
Soient E, F des espaces normés. Alors $\forall A \in L(E,F)\ \exists_1\ A^* \in \ell(F^*, E^*)$ tq

$$\forall\, x \in E, \forall\, y^* \in F^* : y^*(Ax) = (\underbrace{Ax}_{\in F}, \underbrace{y^*}_{\in F^*}) = (\underbrace{x}_{\in E}, \underbrace{A^*y^*}_{\in E^*}) = (A^*y^*)(x) \qquad (2)$$

On a $A^*y^* = y^* \circ A$, $\forall y^* \in F^*$. En plus A^* est (automatiquement) continue, donc $A^* \in L(F^*, E^*)$, et $||A^*||_{op} = ||A||_{op}$.

Dém. Posons $A^*y^* := y^* \circ A$. Alors
• A^* satisfait (2), car

$$(x, A^*y^*) = (A^*y^*)(x) = (y^* \circ A)(x) = y^*(Ax) = (Ax, y^*).$$

• A^* est bien sûr linéaire.
• A^* est déterminé de façon unique par (2). En effet, supposons que $\tilde{A} \in \ell(F^*, E^*)$ satisfait (2), alors $\forall x \in E, \forall y^* \in F^* : \; (Ax, y^*) = (x, \tilde{A}y^*) \Longrightarrow (x, \tilde{A}y^*) = (x, A^*y^*) \; \forall x \in E, \forall y^* \in F^*$. Donc $\forall y^* \in F^* : \; \tilde{A}y^* = A^*y^*$. Ainsi $A^* = \tilde{A}$.
• A^* est continue, car $||A^*y^*|| = ||y^* \circ A|| \leq ||y^*|| \, ||A|| \Longrightarrow ||A^*|| \leq ||A||$.
D'autre part, Hahn-Banach 1.9 b) $\Longrightarrow \forall x \in E$ avec $Ax \neq 0 \; \exists \; y^* \in F^* : ||y^*|| = 1$ et $|y^*(Ax)| = ||Ax||$. Donc:

$$||Ax|| = |(Ax, y^*)| = |(x, A^*y^*)| = |(A^*y^*)(x)| \leq ||A^*y^*|| \, ||x|| \leq$$

$$\leq ||A^*|| \underbrace{||y^*||}_{=1} ||x|| = ||A^*|| \, ||x||.$$

Donc $||A|| \leq ||A^*||$.

1.16 Theorème *Soient E, F des espaces normés et $A \in L(E, F)$. Alors*
(1) $\operatorname{Ker} A = {}^{\perp}\big(A^*(F^*)\big)$;
(2) $\operatorname{Ker} A^* = A(E)^{\perp}$;
(3) ${}^{\perp}(\text{Ker } A^*) = \overline{A(E)}$.

Dém. (1) $x \in \text{Ker } A \Longleftrightarrow Ax = 0 \overset{(1.9b)}{\underset{H.B.}{\Longleftrightarrow}} \forall y^* \in F^* : (Ax, y^*) = 0 \Longleftrightarrow \forall y^* \in F^* : (x, A^*y^*) = 0 \Longleftrightarrow x \in {}^{\perp}(A^*(F^*))$.
(2) $y^* \in \text{Ker } A^* \Longleftrightarrow A^*y^* = 0 \Longleftrightarrow \forall x \in E : (x, A^*y^*) = 0 \Longleftrightarrow \forall x \in E : (Ax, y^*) = 0 \Longleftrightarrow y^* \in A(E)^{\perp}$. ◯

(3) (2) $\Longrightarrow {}^{\perp}(\text{Ker } A^*) = {}^{\perp}\big(A(E)^{\perp}\big) \overset{1.13}{=} \overline{A(E)}$.

II Théorème de Baire et ses conséquences

Définition Soit X un espace topologique. On dit que X est un *espace de Baire*, si toute intersection dénombrable d'ouverts dense de X est dense dans X.

Proposition 2.1 *X est un espace de Baire $\Longleftrightarrow$ toute réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide est d'intérieur vide.*

Dém. Clair; utiliser $A^\circ = \emptyset \Longleftrightarrow A^c := X \setminus A$ dense et les règles de de Morgan. ○

Corollaire 2.2 *Soit X un espace de Baire, $F_n \subseteq X$ fermé, $X = \bigcup_{n=1}^\infty F_n$. Alors $\exists\, n_0$ tel que $F_{n_0}^\circ \neq \emptyset$.*

2.3 Théorème de Baire *Chaque espace métrique complet (X, d) est un espace de Baire.*

Dém. Soit $E = \bigcap U_n$, U_n ouvert et dense dans X. A Montrer que $\forall\ U$, U ouvert on a : $E \cap U \neq \emptyset$. U_1 dense $\Longrightarrow$ $\exists x_1 \in U \cap U_1 \neq \emptyset$. $U \cap U_1$ ouvert, X T_3, $\Longrightarrow$ $\exists \varepsilon_1 \in]0, 1/2[$ tel que la boule $B_1 := B(x_1, \varepsilon_1)$ satisfait $\overline{B_1} \subseteq U \cap U_1$. De même, U_2 dense $\Longrightarrow \exists x_2 \in B_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ $\Longrightarrow \exists \varepsilon_2 \in]0, 1/4[$ tel que la boule $B_2 = B_2(x_2, \varepsilon_2)$ satisfait $\overline{B_2} \subseteq B_1 \cap U_2 \subseteq U \cap U_1 \cap U_2$.
Par récurrence sur n, on trouve des boules $B_n := B(x_n, \varepsilon_n)$, $\varepsilon_n \in]0, 2^{-n}[$ tel que

$$\overline{B_n} \subseteq B_{n-1}, \quad B_n \subseteq U \cap U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_n.$$

Montrons que la suite des centres (x_n) est une suite de Cauchy. En effet, soit $n, m \in \mathbb{N}$ et $n, m \geq N$. Alors $x_n, x_m \in B_N$ et

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_N) + d(x_m, x_N) \leq 2^{-N} + 2^{-N} \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

X complet $\Longrightarrow$ $\exists\, a \in X : d(x_n, a) \to 0$. En plus, $x_n \in B_N$ $\forall n \geq N$. $\overline{B_N}$ fermé $\Longrightarrow a \in \overline{B_N}\ \forall N \Longrightarrow a \in U \cap U_1 \cap \cdots \cap U_N$ $\forall N$. Donc $a \in U \cap E \Longrightarrow U \cap E \neq \emptyset$. ○

2.4 Théorème d'Osgood *Soit X un espace métrique complet et $\mathcal{F} \subseteq C_{\mathbb{R}}(X)$ une famille de fonctions continues à valeurs réelles telle que*

$$\forall x \in X,\ \exists C = C(x) \in \mathbb{R},\ \forall f \in \mathcal{F} : f(x) \leq C. \qquad (*)$$

Alors il existe une boule B telle que $\mathcal{F}$ soit uniformément majorée sur B, i.e.

$$\exists B,\ \exists M,\ \forall x \in B,\ \forall f \in \mathcal{F} : f(x) \leq M.$$

Dém. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathcal{F}$. Posons $F_n(f) = \{x \in X : f(x) \leq n\}$. f continue $\Longrightarrow F_n(f) = f^{-1}(]-\infty, n])$ fermé. Notons que $F_n(f) = \emptyset$ est possible. Posons

$$F_n = \bigcap_{f \in \mathcal{F}} F_n(f) = \{x \in X : \forall f \in \mathcal{F}\ \ f(x) \leq n\}.$$

Alors F_n fermé. En plus, $(*) \Longrightarrow \bigcup F_n = X$. 2.3, 2.2 $\Longrightarrow \exists n_0$ tel que $F_{n_0}^\circ \neq \emptyset$, i.e. $\exists$ boule $B \subseteq F_{n_0}$. Soit $M := n_0$. Alors on a: $\forall x \in B, \forall f \in \mathcal{F} : f(x) \leq M$. ○

2.5 1[er] **Théorème de Banach-Steinhaus** *Soit* $(E, \|\cdot\|_E)$ *un espace de Banach,* $(F, \|\cdot\|_F)$ *un espace normé et* $\mathcal{F} \subseteq L(E, F)$ *une famille d'applications linéaires bornées (=continues) t.q.*

$$\forall x \in E, \quad c(x) := \sup_{T \in \mathcal{F}} \|Tx\|_F < \infty.$$

Alors la famille $\{\|T\|_{op} : T \in \mathcal{F}\}$ *est bornée, i.e.* $\sup_{T \in \mathcal{F}} \|T\|_{op} < \infty$.

Dém. Considérons pour $T \in \mathcal{F}$ la fonction $f_T : E \to \mathbb{R}$ définie par $f_T(x) = \|Tx\|_F$. T et $\|\cdot\|_F$ continues $\Longrightarrow f_T$ continue (sémi-norme). La famille $\mathcal{P} = \{f_T : T \in \mathcal{F}\}$ est simplement bornée, donc d'après Osgood (2.4) $\exists$ boule $B = B(x_0, 2\varepsilon) \subseteq E$ et $M > 0$ tq $\forall x \in B$, $\forall T \in \mathcal{F}\ : f_T(x) \leq M$. Alors $\forall x \in E$ avec $\|x\|_E = 1$ on obtient:

$$\|Tx\|_F = \frac{1}{\varepsilon}\|T(\varepsilon x)\|_F = \frac{1}{\varepsilon}\|T(\varepsilon x + x_0) - Tx_0\|_F \leq$$

$$\leq \frac{1}{\varepsilon}\left(\|T(\underbrace{\varepsilon x + x_0}_{\in B})\|_F + \|Tx_0\|_F\right) \leq$$

$$\leq \frac{1}{\varepsilon}(M + M) = \frac{2M}{\varepsilon}$$

Donc $\|T\|_{op} = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|_F \leq \frac{2M}{\varepsilon}$ pour tout $T \in \mathcal{F}$. ○

2.6 2^{me} **Théorème de Banach-Steinhaus** *Soient* $(E, \|\cdot\|_E)$ *un espace de Banach,* $(F, \|\cdot\|_F)$ *un espace normé et* $T_n \in L(E, F)$. *Supposons que* $\lim_n T_n(x) =: Tx$ *existe* $\forall x \in X$, *i.e.* $\|T_n x - Tx\|_F \to 0$. *Alors* $(\|T_n\|_{op})$ *est une suite bornée,* T *est linéaire et continue et*

$$\|T\|_{op} \leq \liminf_n \|T_n\|_{op}.$$

Dém. T linéaire: clair. Hypothèse $\Longrightarrow \forall x \in E : \sup_n \|T_n(x)\|_F < \infty$. 2.5$\Longrightarrow$ $\exists M\ \sup_n \|T_n\|_{op} \leq M$. Comme

$$\|Tx\|_F \overset{n \to \infty}{\longleftarrow} \|T_n x\|_F \leq \|T_n\|_{op} \|x\|_E \leq M\|x\|_E$$

on voit que T est bornée (=continue) et que $\|T\|_{op} \leq M$. Il est facile de voir que pour M on peut choisir $\liminf_n \|T_n\|_{op}$, en choisissant une sous-suite (n_k) tq $\|T_{n_k}\|_{op} \to \liminf_n \|T_n\|_{op}$. ○

2.6 3^{me} **Théorème de Banach-Steinhaus** *Soient* $(E, \|\cdot\|_E)$ *et* $(F, \|\cdot\|_F)$ *des espaces de Banach et* $T_n \in L(E, F)$. *Alors* (T_n) *converge simplement vers* $T \in L(E, F)$ *si et seulement si*

(1) $\|T_n\|_{op} \leq M$ *et*

(2) $(T_n x)$ *converge pour tout* $x \in S$, *où* S *est dense dans* E.

Dém " $\Longrightarrow$ " (1) découle de 2.6. (2) évident.

" $\Longleftarrow$ " Soit $x_0 \in E$ et $\varepsilon > 0$. Comme $\overline{S} = E$, $\exists\ \tilde{x} \in S$ tq $\|\tilde{x} - x_0\|_E < \frac{\varepsilon}{3M}$. (2) $\Longrightarrow$ $\exists n_0$ tq $||T_n\tilde{x} - T_m\tilde{x}||_F < \frac{\varepsilon}{3}\ \forall n, m \geq n_0$. Ainsi

$$||T_n x_0 - T_m x_0||_F \leq ||T_n x_0 - T_n\tilde{x}||_F + ||T_n\tilde{x} - T_m\tilde{x}||_F + ||T_m\tilde{x} - T_m x_0||_F \leq$$
$$||T_n||_{op}||\tilde{x} - x_0||_E + \frac{\varepsilon}{3} + ||T_m||_{op}||\tilde{x} - x_0||_E \leq$$
$$M\frac{\varepsilon}{3M} + \frac{\varepsilon}{3} + M\frac{\varepsilon}{3M} = \varepsilon.$$

Donc $(T_n x_0)$ est une suite de Cauchy dans F. F complet $\Longrightarrow$ $(T_n x_0)$ converge. Posons $Tx = \lim_n T_n x$ pour $x \in E$. Alors, 2.6 $\Longrightarrow$ T linéaire et continue. ○

Remarques préliminaires $f : (X, \mathcal{T}_1) \to (Y, \mathcal{T}_2)$ continue $\Longleftrightarrow \forall\ V \in \mathcal{T}_2 : f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_1$. Si f est continue et bijective, alors l'inverse f^{-1} existe et est une application ouverte. On sait que f^{-1} est continue $\Longleftrightarrow$ $(f^{-1})^{-1}(U) = f(U)$ est ouvert $\forall U \in \mathcal{T}_1$; i.e. si f est une application ouverte.

2.7 Théorème de Banach (principe de l'application ouverte)
Chaque application linéaire continue surjective T d'un espace de Banach $(E, \|\cdot\|_E)$ sur un espace de Banach $(F, \|\cdot\|_F)$ est ouverte.

Dém. *Etape 1:* Montrons que si U est une boule (ouverte) dans E avec $0_E \in U$, alors $\overline{T(U)}$ contient une boule centrée en 0_F.

En effet, soit $U = B_2 := B(0_E, 2\varepsilon)$ et $B_1 = B(0_E, \varepsilon)$. Notons pour plus tard que $B_1 - B_1 = B_2$. En effet $B_1 - B_1 \subseteq B_2$ est dû à l'inégalité triangulaire et si $x \in B_2$, alors $x = \frac{1}{2}x - (-\frac{1}{2}x) \in B_1 - B_1$.
On a que $E = \bigcup_n nB_1$. T surjective $\Longrightarrow$

$$F = T(E) = T(\bigcup_n nB_1) = \bigcup T(nB_1),$$

et ainsi $F = \bigcup_n \overline{nT(B_1)}$. 2.3 $\Longrightarrow$ F espace de Baire $\stackrel{2.3}{\Longrightarrow}$ $\exists\ m$ tel que $\overline{mT(B_1)} = m\overline{T(B_1)}$ contient une boule ouverte S_0. Posons $S_1 := \frac{1}{m}S_0$. Alors $S_1 \subseteq \frac{1}{m}(m\overline{T(B_1)}) = \overline{T(B_1)}$. Notons que S_1 n'est pas nécessairement une boule contenant 0_F. Mais S_1 est ouvert, et chaque translation est un homéomorphisme. Donc $S_1 - x$ est ouvert $\forall x \in F \Longrightarrow S_1 - S_1 := \{s - t : s, t \in S_1\} = \bigcup_{x \in S_1}(S_1 - x)$ ouvert. Comme $0_F \in S_1 - S_1$, il existe une boule B centrée en 0_F telque

$$B \subseteq S_1 - S_1 \subseteq \overline{T(B_1)} - \overline{T(B_1)} \subseteq \overline{T(B_1) - T(B_1)} = \overline{T(B_1 - B_1)} = \overline{T(B_2)}.$$

Ainsi $B \subseteq \overline{T(U)}$.

Etape 2: Montrons que ci U est une boule dans E avec $0_E \in U$, alors $T(U)$ contient une boule centrée en 0_F.

En effet, soit $U = B_E(0_E, 2\varepsilon_0)$. Prenons $\varepsilon_n > 0$ tel que $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < \varepsilon_0$. Etape 1 $\Longrightarrow$ $\exists\ \rho_n > 0$ tel que

$$B_F(0_F, \rho_n) \subseteq \overline{TB_E(0_E, \varepsilon_n)} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

S.p.g. $\rho_n \searrow 0$. A montrer que

$$B_F(0_F, \rho_0) \subseteq T(B_E(0_E, 2\varepsilon_0)) = T(U). \tag{2}$$

Soit $y \in B_F(0_F, \rho_0)$. Cherchons $x \in B_E(0_E, 2\varepsilon_0)$ avec $Tx = y$.
(1) $\Longrightarrow y \in \overline{TB_E(0_E, \varepsilon_0)} \Longrightarrow \exists\, x_1 \in B_E(0_E, \varepsilon_0)$ telque $||Tx_1 - y||_F < \rho_1$. Ainsi $y - Tx_1 \in B_F(0_F, \rho_1)$.
(1) $\Longrightarrow y - Tx_1 \in \overline{TB_E(0_E, \varepsilon_1)} \Longrightarrow \exists\, x_2 \in B_E(0_E, \varepsilon_1)$ telque $||y - Tx_1 - Tx_2|| < \rho_2$.
Par récurrence, on obtient une suite (x_n) dans $B_E(0_E, \varepsilon_{n-1})$ telque

$$||y - Tx_1 - Tx_2 - \cdots - Tx_n||_F < \rho_n \quad (n \in \mathbb{N}^*) \tag{3}$$

Notons que $\sum_{n=M}^{N} ||x_n||_E \leq \sum_{n=M}^{N} \varepsilon_{n-1} \to 0$ si $N \geq M \to \infty$. E complet $\Longrightarrow$ $\exists\, x_0 \in E$ tel que $||\sum_{n=1}^{N} x_n - x_0||_E \to 0$ et $||x_0||_E \leq \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_{n-1} < 2\varepsilon_0$.
T continue $\Longrightarrow T(x_1 + \cdots + x_N) \overset{||\cdot||_F}{\to} Tx_0$;

$$\Longrightarrow y - Tx_1 - \cdots - Tx_N \overset{||\cdot||_F}{\longrightarrow} y - Tx_0$$

$$\Longrightarrow ||y - Tx_0||_F = \lim_N ||y - Tx_1 - \cdots - Tx_N||_F \overset{(3)}{\leq} \lim \rho_N = 0.$$

On déduit que $y = Tx_0$ avec $x_0 \in B_E(0_E, 2\varepsilon_0)$. Donc $y \in TB_E(0_E, 2\varepsilon_0) = T(U)$.

Etape 3: Il reste à démontrer le cas général: U ouvert $\Longrightarrow T(U)$ ouvert.
Soit $y \in T(U)$. Alors $\exists\, x \in U$ avec $y = Tx$ et $B_E := B_E(0_E, \varepsilon)$ tq $B_E(x, \varepsilon) = x + B_E \subseteq U$ (car U ouvert). Etape 2 $\Longrightarrow \exists\, B_F := B_F(0_F, \delta)$ tel que $B_F \subseteq T(B_E)$. Soit $V = y + B_F$. Alors $V \subseteq y + T(B_E) = T(x + B_E) \subseteq T(U)$. V étant une boule, on obtient que $y \in (TU)^\circ$. Donc $T(U)$ ouvert. ○

2.8 Théorème sur la continuité de l'inverse *Soient E et F des espaces de Banach et $T : E \to F$ linéaire, continue et bijective. Alors $T^{-1} : F \to E$ est continue (et linéaire).*

Dém. 2.7 $\Longrightarrow (T^{-1})^{-1}(U) = T(U)$ ouvert $\forall U \subseteq E$, U ouvert. Donc T^{-1} continue. ○

2.9 Corollaire *Soient E et F des espaces de Banach et $T \in L(E, F)$. Les assertions suivantes sont équivalentes:*

i) T est injective et l'image $T(E)$ fermé.
ii) $\exists\, C > 0$, $\forall x \in E :$ $||Tx||_F \geq C||x||_E$.
En particulier (i) ou (ii) impliquent que $T^{-1} : T(E) \to E$ est continue et que $||T||_{op}\, ||T^{-1}||_{op} \geq 1$
Dém. i) $\Longrightarrow$ ii). $T(E)$ fermé, F complet, T linéaire $\Longrightarrow T(E)$ espace de Banach. 2.8 $\Longrightarrow T^{-1} : T(E) \to E$ continue, i.e.

$$\exists\, D > 0,\ \forall y \in T(E) : ||T^{-1}y||_E \leq D||y||_F.$$

Comme $y = Tx$ pour $x \in E$ on obtient $||x||_E \leq D||Tx||_F$, i.e. ii).

ii) $\Longrightarrow$ i). Hypothèse ii) $\Longrightarrow T$ injective et que $T^{-1} : T(E) \to E$ satisfait

$$\forall y \in T(E) : ||y||_F \geq C||T^{-1}y||_E;$$

donc T^{-1} borné sur la boule unité de $T(E)$ par $1/C$, i.e. $T^{-1} : T(E) \to E$ continue. Montrons que $T(E)$ est fermé. Soit $y_n \in T(E)$ et $y \in F$ tq $||y_n - y||_F \to 0$. $\exists\, x_n \in E$ tq $Tx_n = y_n$. (Tx_n) est une suite de Cauchy, donc:

$$||x_n - x_m||_E = ||T^{-1}(Tx_n) - T^{-1}(Tx_m)||_E \leq ||T^{-1}||_{op}||y_n - y_m||_F \to 0$$

Donc (x_n) est une suite de Cauchy dans E. E complet $\Longrightarrow \exists\, x \in E$ tq $||x_n - x||_E \to 0$.
T continue $\Longrightarrow y_n = Tx_n \to Tx \Longrightarrow Tx = y \Longrightarrow y \in T(E)$.
On a que $T^{-1} \circ T = id_E$. Donc $1 = ||id_E||_{op} \leq ||T^{-1}||_{op}\, ||T||_{op}$. ○

2.10 Corollaire *Soit E un ev. Supposons que $||\cdot||_1$ et $||\cdot||_2$ soient deux normes sur E tq $(E, ||\cdot||_j)$ soient des espaces de Banach. Supposons que $||\cdot||_1$ domine $||\cdot||_2$, i.e. $\exists\, C > 0$ tq $\forall x \in E : ||x||_2 \leq C||x||_1$. Alors les deux normes sont équivalentes.*

Dém. Considérons la bijection $I : (E, ||\cdot||_1) \to (E, ||\cdot||_2)$ définie par $I(x) = x$. Alors I est linéaire et continue car $||I(x)||_2 \leq C||x||_1$. 2.8 $\Longrightarrow I^{-1}$ continue, donc $\frac{1}{C}||x||_2 \leq ||x||_1 = ||I^{-1}(x)||_1 \leq D||x||_2$. ○

Pour $j \in \{1, \cdots, n\}$, soient $(E_j, ||\cdot||_j)$ des espaces normés et $E = \prod_{j=1}^n E_j$ leur produit cartésien. Si $1 \leq p < \infty$ et $x = (x_1, \cdots, x_n) \in E$ on définit les normes $||x||_p = (\sum_{j=1}^n ||x_j||_j^p)^{1/p}$ resp. $||x||_\infty = \max_j ||x_j||_j$ sur E. Ces normes sont équivalentes. Ils engendrent la topologie du produit sur E.

Rappelons que si X et Y sont des espaces métriques et $f : X \to Y$ une application, alors le graphe de f est l'ensemble $G(f) = \{(x, f(x)) : x \in X\} \subseteq X \times Y$. Notons que si f est continue, alors le graphe est fermé, mais que la réciproque n'est pas correct ($f(x) = 1/x$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.)
2.11 Lemma *Soient E, F deux espaces normés et $f \in \ell(E, F)$. Alors le graphe de f est fermé $\Longleftrightarrow$ on a: $(x_n \to 0 \in E$ et $f(x_n) \to y \in F) \Longrightarrow y = 0$.*

Dém. "$\Longrightarrow$" Supposons que $G(f)$ soit fermé et que $(x_n, f(x_n)) \to (0, y)$. Alors $(0, y) \in G(f)$, donc $y = f(0)$. Mais f linéaire $\Longrightarrow f(0) = 0$. Donc $y = 0$.
"$\Longleftarrow$" Soient $(x_n, f(x_n)) \in G(f)$ et supposons que $(x_n, f(x_n) \to (x, y) \in E \times F$. Alors $x_n \to x$ et $f(x_n) \to y$. f linéaire $\Longrightarrow x_n - x \to 0$ et $f(x_n - x) \to y - f(x)$. Hypothèse$\Longrightarrow y - f(x) = 0$. Donc $y = f(x)$ et ainsi $(x, y) \in G(f)$. Donc $G(f)$ fermé.
○

2.12 Théorème du graphe fermé *Soient E et F des espaces de Banach et $T \in \ell(E, F)$. Alors T est continue $\Longleftrightarrow$ le graphe de T est fermé.*

Dém. Il reste à démontrer que T est continue si $G(T)$ est fermé. Notons que $G(T)$ est un sous-espace vectoriel de $E \times F$. Donc $G(T)$ est un espace de Banach. Considérons

les projections $\pi_1 : \begin{cases} G(T) \to E \\ (x,y) \mapsto x \end{cases}$ et $\pi_2 : \begin{cases} G(T) \to F \\ (x,y) \mapsto y \end{cases}$.
π_1 et π_2 sont continues et linéaires et $\pi_2 = T \circ \pi_1$. En plus, π_1 est bijective. Donc, 2.8 $\Longrightarrow \pi_1^{-1}$ continue et ainsi $T = \pi_2 \circ \pi_1^{-1}$ est continue. ○

III Opérateurs compacts

Définition Soient E, F des espaces normés. Un opérateur linéaire $T : E \to F$ est dite compact, si pour toute suite bornée (x_n) de E il existe une sous-suite $(x_{n_k})_k$ de (x_n) telle que $(T(x_{n_k}))_k$ converge.

$$\mathcal{K}(E,F) := \{T : E \to F \,|\, T \text{ compact }\}.$$

$$\mathcal{K}(E) := \mathcal{K}(E,E).$$

3.1 Proposition *Soient E, F des espaces normés et $T : E \to F$ un opérateur linéaire. Si $B = \{x \in E : ||x|| \leq 1\}$, alors*

$$T \text{ compact} \Longleftrightarrow T(B) \text{ relativement compact, i.e. } \overline{T(B)} \text{ compact.}$$

Dém. " $\Longleftarrow$ " Soit $||x_n|| \leq 1$. Alors $Tx_n \in T(B) \subseteq \overline{T(B)}$. Comme $\overline{T(B)}$ est (séquentiellement) compact, il existe une sous-suite (Tx_{n_k}) qui converge vers $y \in \overline{T(B)}$. Donc T est compact.
" $\Longrightarrow$ " Soit (y_n) une suite de $\overline{T(B)}$. Alors il existe $x_n \in B$, tel que $||y_n - Tx_n|| \to 0$. T compact $\Longrightarrow \exists y \in F$ tel que $||Tx_{n_k} - y|| \to 0$. Ainsi

$$||y_{n_k} - y|| \leq ||y_{n_k} - Tx_{n_k}|| + ||Tx_{n_k} - y|| \to 0.$$

Donc (y_n) contient une sous-suite convergente, i.e. $\overline{T(B)}$ est compact. ○

3.2 Proposition *(1) Chaque opérateur linéaire compact est continue, i.e. $\mathcal{K}(E,F) \subseteq L(E,F)$*
(2) $\mathcal{K}(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de $L(E,F)$
(3.1) $T \in L(E,F)$ et $S \in \mathcal{K}(F,G) \Longrightarrow S \circ T \in \mathcal{K}(E,G)$
(3.2) $S \in \mathcal{K}(E,F)$ et $T \in L(F,G) \Longrightarrow T \circ S \in \mathcal{K}(E,G)$
(4) $\mathcal{K}(E)$ est un idéal dans l'algèbre $L(E)$.
Dém. (1) T compact $\overset{3.1}{\Longrightarrow} \overline{T(B)}$ compact $\Longrightarrow T(B)$ borné $\Longrightarrow \sup_{||x|| \leq 1} ||Tx|| \leq C < \infty \Longrightarrow T$ continue.
(2) trivial

(3.1) Soit $x_n \in E$ et $||x_n|| \leq 1$. T continue $\Longrightarrow ||Tx_n|| \leq ||T||$; S compact $\Longrightarrow$ $S(Tx_{n_k})$ converge, i.e. $(S \circ T)(x_{n_k})$ converge; i.e. $S \circ T$ compact.
(3.2) Soit $x_n \in E$ et $||x_n|| \leq 1$. S compact $\Longrightarrow S(x_{n_k})$ converge; T continue $\Longrightarrow$ $T(S(x_{n_k}))$ converge; i.e. $(T \circ S)(x_n)$ admet une sous-suite convergente, donc $T \circ S$ compact.
(4) découle de (2) et (3.1). ○

3.3 Proposition *Chaque opérateur linéaire continue de rang fini est compact.*

Dém Soit $\dim T(E) < \infty$. T continue $\Longrightarrow ||Tx|| \leq ||T||\,||x||$. Donc l'image de $B = \{x \in E : ||x|| \leq 1\}$ par T est borné. Bolzano-Weierstrass $\dim T(E) < \infty \Longrightarrow T(B)$ relativement compact $\overset{3.1}{\Longrightarrow} T$ compact. ○

3.4 Proposition *Soit E un espace normé, F un espace de Banach, $(T_n) \subseteq \mathcal{K}(E,F)$ et $T \in L(E,F)$ tel que $||T_n - T||_{op} \to 0$. Alors $T \in \mathcal{K}(E,F)$.*

Dém. Soit $x_n \in E$, $||x_n|| \leq C$. T_1 compact $\Longrightarrow \exists$ sous-suite (x_n^1) de (x_n) tel que $\big(T_1(x_n^1)\big)$ converge. T_2 compact $\Longrightarrow \exists$ sous-suite (x_n^2) de (x_n^1) tel que $\big(T_2(x_n^2)\big)$ converge. Par récurrence on obtient une sous-suite (x_n^k) de (x_n^{k-1}) tel que $\big(T_k(x_n^k)\big)_n$ converge. Considérons le schéma

$$\begin{array}{cccc} x_1^1 & x_2^1 & x_3^1 & \cdots \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & \cdots . \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

La suite diagonale $(y_j) := (x_j^j)$ est pour tout k, et à partir d'un certain indice $j = j(k)$, une sous-suite de $(x_1^k, x_2^k, \cdots)$. Ainsi $(T_k(y_j))_j$ converge $\forall k$. (Procédé de Cantor). Soit $\varepsilon > 0$. Il existe n_0 tel que $||T_{n_0} - T||_{op} < \varepsilon$. En plus, $\exists\, N$ tel que $\forall j,k \geq N$ on a

$$||Ty_j - Ty_k|| \leq ||Ty_j - T_{n_0}y_j|| + ||T_{n_0}y_j - T_{n_0}y_k|| + ||T_{n_0}y_k - Ty_k|| \leq$$

$$\leq ||T - T_{n_0}||_{op} \cdot ||y_j|| + \varepsilon + ||T_{n_0} - T||_{op} \cdot ||y_k|| \leq \varepsilon C + \varepsilon + \varepsilon C$$

$\Longrightarrow (Ty_j)$ est une suite Cauchy dans l'espace de Banach F. Elle converge. Donc T est compact. ○

3.5 Corollaire *Soit E un espace normé, F un espace de Banach, $T \in L(E,F)$ et (T_n) une suite d'opérateurs linéaires continues à dimension fini tel que $||T_n - T||_{op} \to 0$. Alors T est compact.*

3.6 Corollaire *Si E est un espace normé et F un espace de Banach, alors $\mathcal{K}(E,F)$ est un sous-espace fermé de $L(E,F)$.*

Soit E un espace normé. Alors $(E^*, ||\cdot||_{op})$ est un espace de Banach. On va maintenant d'écrire le procédé d'immergement de E dans son bidual topologique $E^{**} = (E^*)^*$. Pour $x \in E$ considérons $\Phi_x : \begin{cases} E^* \to \mathbb{K} \\ x^* \mapsto \Phi_x(x^*) := (x, x^*) \end{cases}$. Alors Φ_x est linéaire, et continue car:

$$|\Phi_x(x^*)| = |(x, x^*)| \leq ||x^*||\,||x|| \Longrightarrow ||\Phi_x||_{op} \leq ||x||.$$

On a même $||\Phi_x||_{op} = ||x||$, car d'après Hahn-Banach (1.11)

$$||\Phi_x||_{op} = \sup_{||x^*||=1} |\Phi_x(x^*)| = \sup_{||x^*||=1} |(x, x^*)| = ||x||.$$

Soit $J_E : \begin{cases} E \to E^{**} \\ x \mapsto \Phi_x \end{cases}$. Alors J_E est linéaire. En plus J_E est une isométrie, car $||J_E(x)|| = ||\Phi_x||_{op} = ||x||$. Ainsi J_E est un homomorphisme isométrique de E dans E^{**} (immergement de E dans E^{**}). On peut donc considérer E comme un sous-espace normé de E^{**}.

Notons aussi que ceci implique que $J_E(E)$ est complet si E est complet; donc $J_E(E)$ est fermé dans E^{**} si E est un espace de Banach. En plus E Banach $\overset{(2.8)}{\Longrightarrow}$ J_E^{-1} : $J_E(E) \to E$ continue.
Remarquons que J_E n'est pas toujours surjective. Si J_E est surjective, alors on dit que E est un espace réflexif (voir chapitre XX).

Pour conclure rappelons que J_E est donc définie par la formule suivante:

$$(x^*, J_E x) = (x, x^*) \;\; \forall x \in E \;\; \forall x^* \in E^*.$$

3.7 Lemme+déf. de l'opérateur bidual *Soient E, F des espaces normés, $T \in L(E, F)$ et J_E resp. J_F les immergements canoniques de ces espaces dans leurs biduaux topologiques. L'opérateur bidual $T^{**} : E^{**} \to F^{**}$ de T est définie par: $T^{**}y^{**} = y^{**} \circ T^*$, $y^{**} \in E^{**}$. Alors le diagramme suivant est commutatif:*

$$\begin{array}{ccccc} & E^{**} & \overset{T^{**}}{\longrightarrow} & F^{**} & \\ J_E & \uparrow & \nearrow & \uparrow & J_F \\ & E & \underset{T}{\longrightarrow} & F & \end{array}$$

i.e. $T^{**} \circ J_E = J_F \circ T$.
- *T^{**} est l'opérateur dual associé à T^**
- *T injective $\Longrightarrow T^{**}$ injective sur $J_E(E)$.*
- *T^{**} linéaire, continue et $||T^{**}||_{op} = ||T^*||_{op} = ||T||_{op}$.*

Dém • $x \in E, y^* \in F^* \Longrightarrow$

$$\Big(J_F(Tx)\Big)(y^*) = (y^*, J_F(Tx)) \underset{\text{def.}J_F}{=} (Tx, y^*) = y^*(Tx) \qquad (1)$$

$$\Big(T^{**} \circ J_E(x)\Big)(y^*) = \Big(J_E(x) \circ T^*\Big)(y^*)$$
$$= J_E(x)(y^* \circ T) = (y^* \circ T, J_E(x)) \underset{\text{def}J_E}{=} (x, y^* \circ T). \qquad (2)$$

(1) et (2) $\Longrightarrow J_F \circ T = T^{**} \circ J_E$.

- $T^{**}|_{J_E(E)} = J_F \circ T \circ J_E^{-1} \Longrightarrow T^{**}|_{J_E(E)}$ injective si T injective.
- T^{**} continue: clair; l'égalité des normes découle de 1.15. ○

Remarque: $X \hookrightarrow X^{**}$, $Y \hookrightarrow Y^{**} \Longrightarrow T^{**}$ est un prolongement de $T \in L(X,Y)$ avec valeurs dans Y^{**}.

3.8 Théorème de Schauder *Soient X un espace normé, Y un espace de Banach et $T \in L(X,Y)$. Alors T est compact $\Longleftrightarrow T^*$ compact.*

Dém. " $\underset{X,Y\,\text{norme}}{\Longrightarrow}$ " Soit (y_n^*) bornée par C dans Y^* et soit $B = \{x \in X : ||x|| \le 1\}$. T compact $\overset{3.1}{\Longrightarrow} K := \overline{TB} \subseteq Y$ compact. Soit $f_n := y_n^*|_K$. Alors $f_n \in C(K)$ et $||f_n||_\infty \le CM$ car pour $y \in K$ on a: $|f_n(y)| = |(y, y_n^*)| \le ||y_n^*|| \sup_{y \in K} ||y|| \le CM$. Montrons que (f_n) est équicontinue. En effet, pour $y_1, y_2 \in Y$ on a:

$$|f_n(y_1) - f_n(y_2)| \le \sup_n ||y_n^*||\, ||y_1 - y_2|| \le C||y_1 - y_2||.$$

Arzela-Ascoli $\Longrightarrow \exists$ sous-suite (f_{n_ℓ}) qui converge uniformément sur K. En utilisant $(x, T^*y^*) = (Tx, y^*)$ et $T(B)$ dense dans K, on obtient:

$$||T^*y_{n_{\ell'}}^* - T^*y_{n_\ell}^*|| = \sup_{||x|| \le 1} |y_{n_{\ell'}}^*(Tx) - y_{n_\ell}^*(Tx)| = ||f_{n_{\ell'}} - f_{n_\ell}||_\infty.$$

Donc $(T^*y_{n_\ell}^*)$ est une suite de Cauchy dans X^*. Elle est convergente. Donc T^* est compact.

" $\underset{Y\,\text{complet}}{\Longleftarrow}$ " T^* compact $\Longrightarrow T^{**}$ compact $\Longrightarrow T^{**} \circ J_X$ compact $\Longrightarrow J_Y \circ T = T^{**} \circ J_X$ compact $\Longrightarrow T$ compact car: soit (x_n) borné dans $X \Longrightarrow J_Y(Tx_{n_k}) \in J_Y(Y)$ converge dans Y^{**}. Y Banach $\Longrightarrow J_Y(Y)$ complet, donc fermé dans Y^{**}. Ainsi $J_Y(Tx_{n_k})$ converge dans $J_Y(Y)$. J_Y^{-1} continue $\Longrightarrow Tx_{n_k}$ converge dans Y. ○

<u>Rappel</u>: X espace de Banach $\Longrightarrow \mathcal{A} := L(X)|| \cdot ||_{op})$ algèbre unitaire de Banach; notons que $||ST||_{op} \le ||S||_{op}||T||_{op}$ et que $T \in L(X,Y)$ inversible dans $\mathcal{A} \Longleftrightarrow \exists\, S \in \mathcal{A}$ tel que $ST = TS = I$, où $I(x) = x$ est l'identité. Soit $T \in \mathcal{A}$ bijective. Banach-Steinhaus $\Longrightarrow T^{-1}$ continue, donc T inversible.
Rappellons aussi le lemme de Riesz qui nous dit qu'un espace normé E est localement compact $\Longleftrightarrow \dim\, E < \infty$.

Déf. Soit X un evt, $M \subseteq X$ un sev fermé. On dit que M admet un supplémentaire topologique (ou est complémenté) s'il existe un sev *fermé* N de X tel que $X = M \oplus N$.

3.9 Lemme *Soit E un espace normé, $M \subseteq E$ sev fermé. Alors sous chacune des conditions suivantes, M est complémenté:*

a) dim $M < \infty$,
b) codim $M := \dim(E/M) < \infty$.

Dém a) Soit $\{e_1, \cdots, e_n\}$ une base de M et $x \in M \Longrightarrow \exists_1 (\alpha_1(x), \cdots, \alpha_n(x)) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum_{j=1}^n \alpha_j(x) e_j \Longrightarrow f_j : \begin{cases} M \to \mathbb{K} \\ x \mapsto \alpha_j(x) \end{cases}$ est linéaire et continue. D'après

Hahn-Banach, f_j admet un prolongement linéaire continue sur E, noté aussi par f_j. Soit $N = \bigcap_{j=1}^n \text{Ker } f_j$. Alors $E = M \oplus N$.

b) Soit $\{\hat{e}_1, \cdots, \hat{e}_n\}$ une base de E/M et $x_k \in E$ telque $x_k \sim e_k$. Alors $N = Vec\{x_1, \cdots, x_n\}$ est un sev fermé tel que $E = M \oplus N$. ○

Déf. Soit X un espace normé et $T \in L(X)$. Le *spectre* $\sigma(T)$ est l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{K}$ telque $T - \lambda I$ ne soit pas inversible. Les éléments de $\sigma(T)$ sont appellés les *valeurs spectrales* de T. $\lambda \in \mathbb{K}$ est une *valeur propre* de T s'il existe $x \neq 0$, $x \in X$ tel que $Tx = \lambda x$. On voit bien que λ est valeur propre de $T \iff \lambda \in \sigma_p(T) := \{\lambda \in \mathbb{K} : T - \lambda I \text{ n'est pas injective}\}$ et que $\sigma_p(T) \subseteq \sigma(T)$.

On va maintenant développer le théorie de Riesz-Schauder. Rappellons que $B = \{x \in X : ||x|| \leq 1\}$ et que $R(T) = \{Tx : x \in X\}$.

3.10 Proposition *Soient X et Y des espaces de Banach. Alors*
a) $T \in \mathcal{K}(X, Y), R(T)$ fermé $\Longrightarrow$ dim $R(T) < \infty$.
b) $T \in \mathcal{K}(X), \lambda \neq 0 \Longrightarrow \dim \text{Ker } (T - \lambda I) < \infty$
c) dim $X = \infty, T \in \mathcal{K}(X) \Longrightarrow 0 \in \sigma(T)$.

Dém. a) $R(T)$ fermé, Y Banach $\Longrightarrow$ $R(T)$ Banach $\overset{2.7}{\Longrightarrow}$ $T : X \to R(T)$ ouverte $\Longrightarrow 0 \in T(B^\circ) \subseteq \overline{T(B)} \subseteq R(T) \Longrightarrow R(T)$ localement compact $\overset{\text{Riesz}}{\Longrightarrow} \dim R(T) < \infty$.

b) $M := \text{Ker } (T - \lambda I)$; T continue $\Longrightarrow$ M sev fermé $\Longrightarrow$ M Banach. Notons que $T(M) \subseteq M$, car $x \in M \Longrightarrow Tx = \lambda x \in M$. Si $\lambda \neq 0$, alors $T|_M : M \to M$ est surjective. $T|_M$ compact $\overset{a)}{\Longrightarrow} \dim M = \dim R(T|_M) < \infty$.

c) $0 \notin \sigma(T) \Longrightarrow T$ inversible $\Longrightarrow T$ surjective $\Longrightarrow R(T) = X \overset{a)}{\Longrightarrow} \dim X < \infty$. ○

3.11 Lemme *Soit X un espace normé, M un sev de X, M non dense, et $r > 1$. Alors $\exists\, x \in X, ||x|| < r$ tel que $dist(x, M) \geq 1$.*

Dém. M non dense $\Longrightarrow \exists\, x_1 \in X$ tel que $\text{dist}(x_1, M) = 1$. Choisir $y_1 \in M$ tel que $||x_1 - y_1|| < r$. Posons $x := x_1 - y_1$. ○

3.12 Lemme *Soit X un espace de Banach, $T \in \mathcal{K}(X), r > 0$, $V \subseteq \sigma_p(T) \cap \{z \in \mathbb{K} : |z| > r\}$. Alors*
a) $\lambda \in V \Longrightarrow R(T - \lambda I) \neq X$,
b) V fini.
c) $\sigma_p(T)$ est au plus dénombrable.

Dém. Notons d'abord que c) découle de b). Supposons maintenant que a) ou b) est faux. On va montrer qu'alors $\exists\, M_n \subseteq X$, M_n sev fermé, $\exists\, \lambda_n \in V$ tel que:
i) $M_n \subset M_{n+1}$, l'inclusion étant stricte.
ii) $TM_n \subseteq M_n$.
iii) $(T - \lambda_n I)(M_n) \subseteq M_{n-1}$.

En effet, si a) est faux, alors $S := T - \lambda_0 I$ est surjective pour un certain $\lambda_0 \in V$. Notons que $S \circ T = T \circ S$ et ainsi $S^n \circ T = T \circ S^n$. Posons $M_n = \text{Ker } (S^n)$. $\lambda_0 \in \sigma_p(T) \Longrightarrow \exists\ x_1 \in M_1, x_1 \neq 0$. $R(S) = X \Longrightarrow \forall n\ \exists\ x_n \in X$ tel que $S(x_{n+1}) = x_n$. Notons que $x_n \neq 0$ et que $x_{n+1} \in M_{n+1} \setminus M_n$, car $S^{n+1}(x_{n+1}) = S^n\left(S(x_{n+1})\right) = S^n(x_n) = \cdots = S(x_1) = 0$ et $S^n(x_{n+1}) = S^{n-1}\left(S(x_{n+1})\right) = S^{n-1}(x_n) = \cdots = S(x_2) = x_1$
Par conséquent, on a i)-iii) avec $\lambda_n := \lambda_0$.

Si b) est faux, alors $\exists\ \lambda_n \in V, \lambda_n \neq \lambda_j$. Soit e_n un vecteur propre associé à λ_n et $M_n = \text{Vec}\{e_1, \cdots, e_n\}$. Alors i) est satisfait. Soit $x \in M_n \Longrightarrow x = \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j \Longrightarrow Tx = \sum \alpha_j \lambda_j e_j \in M_n \Longrightarrow TM_n \subseteq M_n$ et $(T - \lambda_n I)x = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j(\lambda_j - \lambda_n)e_j \in M_{n-1} \Longrightarrow$ ii) et iii).

Mais, 3.11 $\Longrightarrow\ \forall n \geq 2\ \ \exists\ y_n \in M_n$ tel que $||y_n|| \leq 2$, dist $(y_n, M_{n-1}) \geq 1$ (d'après i). Pour $2 \leq m < n$ posons $z = Ty_m - (T - \lambda_n I)y_n$. Alors ii), iii) $\Longrightarrow z \in M_{n-1}$ et $||Ty_n - Ty_m|| = ||z - \lambda_n y_n|| = |\lambda_n|\,||y_n - \lambda_n^{-1} z|| \geq |\lambda_n|\,\text{dist}\,(y_n, M_{n-1}) \geq |\lambda_n| > r$. Donc (Ty_n) n'admet pas de sous-suite convergente. Contradiction à la compacité de T. $\bigcirc$

3.13 Théorème de Riesz-Schauder *Soit X un espace de Banach, $T \in \mathcal{K}(X)$, $\lambda \in \mathbb{K}, \lambda \neq 0$, $S = T - \lambda I$ et $S^* = T^* - \lambda I$ l'opérateur dual associé à S. Alors*

a) $R(S)$ et $R(S^*)$ sont fermés
b) Si
$\alpha = \dim \text{Ker } S$,
$\beta = \text{codim}\, R(S)$,
$\alpha^* = \dim \text{Ker } S^*$,
$\beta^* = \text{codim}\, R(S^*)$,
alors $\alpha, \beta, \alpha^*, \beta^*$ sont finis et coïncident.

c) $\lambda \in \sigma(T), \lambda \neq 0 \Longrightarrow \lambda \in \sigma_p(T)$ et $\lambda \in \sigma_p(T^*)$.

d) $\sigma(T)$ est non vide si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou si $\dim X = \infty$.
e) $\sigma(T)$ est compact, au plus dénombrable et si λ est un point d'accumulation de $\sigma(T)$, alors $\lambda = 0$.

Dém. a) Considérons le diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "S"] \arrow[dr, "\pi"'] & & R(S) \subseteq X \\ & X/\text{Ker}\, S \arrow[ur, "\hat{S}"'] & \end{tikzcd}$$

Pour montrer que $R(S)$ est fermé, on va utiliser 2.9 et vérifier si $||\hat{S}([x])|| \geq C\,||[x]||_{X/\text{Ker } S}$. Supposons qu'il existe x_n tel que $||[x_n]||_{X/\text{Ker } S} = 1$ et $S(x_n) = \hat{S}([x_n]) \to 0$. S.p.g. $||x_n|| \leq 2$. T compact $\Longrightarrow \exists\ x_{n_k} : T(x_{n_k}) \to y \Longrightarrow \lambda x_{n_k} = -\left(T(x_{n_k}) - \lambda x_{n_k}\right) + T(x_{n_k}) = -S(x_{n_k}) + T(x_{n_k}) \to y \Longrightarrow S(y) = \lambda \lim_k S(x_{n_k}) = 0 \Longrightarrow [y] = [0] \Longrightarrow ||[y]||_{X/\text{Ker } S} = 0$. Mais $||[x_{n_k}]||_{X/\text{Ker } S} = 1 \Longrightarrow ||[y]||_{X/\text{Ker}\, S} = \lambda \lim_k ||[x_{n_k}]||_{X/\text{Ker } S} = \lambda \neq 0$. Contradiction. Donc $||\hat{S}([x])|| \geq C\,||[x]||_{X/\text{Ker } S}$

et d'après 2.9, $\hat{S}(X/\mathrm{Ker}\, S) = S(X)$ est fermé. De même pour $S^*(X)$ car T^* est compact.

b) • 3.10(b) $\Longrightarrow \alpha^* < \infty$ car T^* compact. $R(S)$ fermé $\overset{1.14}{\Longrightarrow} (X/R(S))^* \underset{\|\cdot\|}{\cong} R(S)^{\perp}$. En plus, 1.16 $\Longrightarrow R(S)^{\perp} = \mathrm{Ker}\, S^*$. Donc $(X/R(S))^* \underset{\|\cdot\|}{\cong}$ Ker S^*. $\Longrightarrow$ $\dim\,(X/R(S))^* = \dim\,\mathrm{Ker}\, S^* = \alpha^* < \infty \Longrightarrow \beta = \dim X/R(S) \overset{1.9}{=} \dim\,(X/R(S))^* = \alpha^*$.

• a) $\Longrightarrow R(S^*) = \overline{R(S^*)} \overset{1.13}{=} \left({}^{\perp}R(S^*)\right)^{\perp} \overset{1.16(1))}{=} (\mathrm{Ker}\ S)^{\perp} \overset{1.14(1)}{\Longrightarrow} X^*/R(S^*) = X^*/(\mathrm{Ker}\ S)^{\perp} \underset{\|\cdot\|}{\cong} (\mathrm{Ker}\ S)^* \Longrightarrow \beta^* = \dim X^*/R(S^*) = \dim\,(\mathrm{Ker}\ S)^* \overset{1.9}{=} \dim\,\mathrm{Ker}\, S = \alpha < \infty$.

On a montré que $\beta = \alpha^*$ et $\beta^* = \alpha$. Reste à vérifier que $\alpha \leq \beta$, car dans ce cas, par un raisonnement analogue dû à la compacité de T^*, on aura aussi $\alpha^* \leq \beta^*$. Donc, en vue de la ligne précédente, $\beta \leq \alpha$ et ainsi $\alpha = \beta$.

Supposons que $\alpha > \beta$. On sait déjà que $\alpha = \dim \mathrm{Ker}\ S < \infty$. Donc $\beta = \mathrm{codim}\, R(S) < \infty$. 3.9 $\Longrightarrow \exists$ sev fermés E et F tel que $X = \mathrm{Ker}\, S \oplus E = R(S) \oplus F$. Soit $x = \xi + \eta \in \mathrm{Ker}\, S + E$. Considérons la projection $P : X \to \mathrm{Ker}\, S$ définie par $P(x) = \xi$. P est linéaire et le graphe de P est fermé. En effet supposons que $x_n = \xi_n + \eta_n \to x$ et que $P(x_n) \to y$. Alors $\xi_n \to y$ et ainsi $\eta_n = x_n - \xi_n \to x - y$. $\mathrm{Ker}\, S$ fermé $\Longrightarrow y \in \mathrm{Ker}\, S$. E fermé, $\eta_n \in E \Longrightarrow x - y \in E \Longrightarrow x = y + (x-y) \in \mathrm{Ker}\, S + E$. Unicité de la décomposition $\Longrightarrow P(x) = y$. Comme X est complet, 2.12 $\Longrightarrow P$ continue.

Notre hypothèse $\infty > \alpha = \dim \mathrm{Ker}\ S > \beta = \dim F \geq 0$ implique qu'il existe une application linéaire surjective $\varphi \in \ell(\mathrm{Ker}\ S, F)$ tel que $\varphi(x_0) = 0$ pour un $x_0 \neq 0,\ x_0 \in \mathrm{Ker}\, S$. Les dimensions étant finies, on a que φ est continue. Posons $\Phi = T + \varphi \circ P$. Alors $\Phi \in L(X)$. $\dim R(\varphi) < \infty \Longrightarrow \varphi \circ P$ compact. T compact $\Longrightarrow \Phi = T + \varphi \circ P$ compact. On a que $\Phi - \lambda I = S + \varphi \circ P$. On va voir que λ est une valeur propre de Φ. En effet, $x_0 \in \mathrm{Ker}\ S \Longrightarrow Px_0 = x_0 \Longrightarrow (\varphi \circ P)(x_0) = 0 \Longrightarrow (\Phi - \lambda I)(x_0) = 0$. Donc $\lambda \in \sigma_p(\Phi)$. Φ compact $\overset{3.12}{\Longrightarrow} R(\Phi - \lambda I) \neq X$.

D'autre part, $x \in E \Longrightarrow P(x) = 0 \Longrightarrow (\Phi - \lambda I)(E) = S(E) = S(X) = R(S)$ et $x \in \mathrm{Ker}\ S \Longrightarrow P(x) = x \Longrightarrow (\Phi - \lambda I)(\mathrm{Ker}\ S) = \varphi(\mathrm{Ker}\ S) = F$.

Donc $R(\Phi - \lambda I) = R(S) + F = X$, une contradiction.

c) Soit $\lambda \neq 0$. Si λ n'est pas une valeur propre de T, alors Ker $S = \{0\}$. Ainsi $\beta = \alpha = 0$ et donc $R(S) = X$. 2.8 $\Longrightarrow S$ inversible, i.e $T - \lambda I$ inversible $\Longrightarrow \lambda \notin \sigma(T)$. Donc: $\lambda \in \sigma(T), \lambda \neq 0 \Longrightarrow \lambda \in \sigma_p(T)$. De même pour T^*.

d) Si dim $X = \infty$, alors d'après 3.10, $0 \in \sigma(T)$. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et dim $X = n$, alors les valeurs propres sont données par les racines du polynôme caractéristique de T, donc $\emptyset \neq \sigma_p(T)$. En vue de T est injective $\Longleftrightarrow T$ surjective dans le cas où dim $X = n$, on a en plus que $\sigma_p(T) = \sigma(T)$.

e) Lemme 3.12 $\Longrightarrow$ que $\sigma_p(T)$ admet au plus 0 comme point d'accumulation et est dénombrable. Mais c) $\Longrightarrow$ $\sigma_p(T) \setminus \{0\} = \sigma(T) \setminus \{0\}$. Donc $\sigma(T)$ est au plus dénombrable. Si $\dim X$ est fini, alors $\sigma(T)$ est fini (ou vide), donc compact; si $\dim X = \infty$, alors $0 \in \sigma(T)$ et on conclut que $\sigma(T)$ est compact, non vide.

Ainsi T compact $\Longrightarrow$ $\sigma(T)$ vide ou fini ou bien $\sigma(T) = \{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ avec $0 \neq \lambda_n \to 0$. ○

Remarque On voit aussi que pour $\lambda \neq 0$ et $T \in \mathcal{K}(X)$ l'opérateur $T - \lambda I$ est surjectif $\Longleftrightarrow$ $T - \lambda I$ est injectif. Pour $\lambda = 0$ ceci n'est plus vrai (voir les TD).

3.14 Théorème, l'alternative de Fredholm *Soit X un espace de Banach, $T \in \mathcal{K}(X)$, et $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Alors ou bien l'équation homogène*

$$Tx - \lambda x = 0$$

ne possède que la solution triviale 0 et dans ce cas l'équation inhomogène

$$Tx - \lambda x = y$$

possède pour tout $y \in X$ une solution unique, ou bien les équations homogènes

$$Tx - \lambda x = 0 \quad \text{et} \quad T^*x - \lambda x = 0$$

ont n solutions linéairement indépendantes ($n = n(\lambda)$), et l'équation inhomogène

$$Tx - \lambda x = y$$

a une solution $\Longleftrightarrow$ $y \in^{\perp} \mathrm{Ker}\,(T^* - \lambda I)$.

Dém. Le premier cas découle de la remarque ci-dessus. Le deuxième cas est une conséquence du fait qu'un opérateur $S \in L(X)$ sur un espace de Banach dont $R(S)$ est fermé a la propriété que $Sx = y$ possède une solution $\Longleftrightarrow$ $[S^*y^* = 0 \Longrightarrow (y, y^*) = 0]$. Notons que ceci est vrai dû au fait que ${}^{\perp}(\mathrm{Ker}\ S^*) = \overline{R(S)}$, voir 1.16.

Soit E un espace de Banach et $T \in L(E)$. Est-ce que $\sigma(T) \neq \emptyset$? Est-ce que $\sigma(T)$ est fermé? compact? Les réponses vont être données dans le chapitre suivant.

IV Algèbres de Banach

Déf. Soit A un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. En plus, soit $\bullet : A \times A \to A$ une opération dite *multiplication* définie sur A tel que $(A, +, \bullet)$ soit un anneau et tel que $\alpha(xy) = x(\alpha y) = (\alpha x)y \quad \forall x, y \in A, \alpha \in \mathbb{K}$. Alors A s'appelle algèbre sur $\mathbb{K}$. A est commutative si $xy = yx \quad \forall x, y \in A$. A est une algèbre *unitaire* s'il existe

$e \in A$ tel que $ex = xe = x \quad \forall x \in A$. e est déterminé de façon unique s'il existe. Si en plus A est muni d'une norme $||\cdot||$ tel que $||xy|| \leq ||x||\,||y||$, alors A est une algèbre normé réelle ou complexe. Si $||\cdot||$ est complet, alors $(A, +, \underset{sc}{\cdot}, \bullet, ||\cdot||)$ est une algèbre de Banach. Si A possède un élément unitaire e, alors on exige que $||e|| = 1$. Dans ce cas on dit qu'un élément $x \in A$ est *inversible* s'il existe $x^{-1} \in A$ tel que $xx^{-1} = x^{-1}x = e$. L'inverse x^{-1} de x est déterminé de façon unique (s'il existe). L'ensemble des éléments inversibles muni de la multiplication est un groupe et est noté par $G(A)$. Notons que si $a, b \in G(A)$ alors $ab \in G(A)$ et $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.

Soit $x \in A$. Alors $\sigma(x) = \{\lambda \in \mathbb{K} : x - \lambda e \notin G(A)\}$ est le spectre de x. Le rayon spectral $r(x)$ de x est le nombre $\sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x)\}$. $\rho(x) = \mathbb{K} \setminus \sigma(x)$ est l'ensemble résolvant de x, l'application $R(x; \cdot) : \rho(x) \to A$, définie par $R(x; \lambda) = (x - \lambda e)^{-1}$ est la résolvante de x.

Si E est un espace de Banach, alors $(L(E), ||\cdot||_{op})$ est une algèbre de Banach unitaire; ici e est l'application identité et, d'après 2.8, $T \in L(E)$ est inversible $\iff$ Test bijective.

4.1 Proposition *Soit A une algèbre de Banach unitaire et $x \in A$. Supposons que $||x|| < 1$. Alors $e - x \in G(A)$,*

$$(e - x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad (x^0 := e)$$

et

$$||(e - x)^{-1} - e - x|| \leq \frac{||x||^2}{1 - ||x||}.$$

Dém. Posons $s_n := e + x + x^2 + \cdots + x^n$. Comme $||x^n|| \leq ||x||^n$ et que $||x|| < 1$ on obtient que

$$||s_{n+k} - s_n|| \leq ||x||^{n+1} + \cdots + ||x||^{n+k} \to 0 \quad (n \to \infty) \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

i.e. (s_n) est une suite de Cauchy dans A. A complet $\Longrightarrow \exists\, s \in A : ||s_n - s|| \to 0$. En plus, $s_n(e - x) = e - x^{n+1} = (e - x)s_n$.
Donc, dû à la continuité de la multiplication, $s(e-x) = (e-x)s = e$, i.e. $e-x \in G(A)$ et $s = (e - x)^{-1}$. Finalement,

$$||s - e - x|| = ||x^2 + x^3 + \cdots|| \leq \sum_{n=2}^{\infty} ||x||^n = \frac{||x||^2}{1 - ||x||}.$$

$\bigcirc$

4.2 Lemme *Soit A une algèbre de Banach unitaire, $x \in G(A)$, $h \in A$. Supposons que $||h|| < \frac{1}{2}||x^{-1}||^{-1}$. Alors $x + h \in G(A)$ et*

$$||(x + h)^{-1} - x^{-1} + x^{-1}hx^{-1}|| \leq 2||x^{-1}||^3||h||^2.$$

Dém. Notons que $x+h = x(e+x^{-1}h)$ et que $||x^{-1}h|| < \frac{1}{2}$. 4.1 $\Longrightarrow e+x^{-1}h \in G(A)$. Donc $x+h \in G(A)$. En plus

$$||(x+h)^{-1} - x^{-1} + x^{-1}hx^{-1}|| = ||\big[(e+x^{-1}h)^{-1} - e + x^{-1}h\big]x^{-1}||$$

$$\leq ||x^{-1}|| \frac{||x^{-1}h||^2}{1 - ||x^{-1}h||} < 2||x^{-1}||^3||h||^2.$$

○

4.3 Théorème *Soit A une algèbre de Banach unitaire. Alors $G(A)$ est ouvert, et l'application* $\mathrm{Inv} : G(A) \to G(A), \mathrm{Inv}\, x := x^{-1}$ *est un homéomorphisme.*

Dém. 4.2 $\Longrightarrow G(A)$ ouvert. Si $x \in G(A)$ on a:

$$||(x+h)^{-1} - x^{-1}|| \leq 2||x^{-1}||^3||h||^2 + ||x^{-1}||^2||h|| \to 0 \quad h \to 0.$$

Donc Inv est continue. Comme $\mathrm{Inv}^{-1} = \mathrm{Inv}$, on a que Inv est un homéomorphisme. ○

4.4 Théorème *Soit A une algèbre de Banach unitaire et $x \in A$. Alors $\sigma(x)$ est compact et $r(x) \leq ||x||$.*

Dém. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $|\lambda| > ||x||$. 4.1 $\Longrightarrow e - \lambda^{-1}x \in G(A) \Longrightarrow x - \lambda e = -\lambda(e - \lambda^{-1}x) \in G(A) \Longrightarrow \lambda \notin \sigma(x) \Longrightarrow r(x) \leq ||x|| \Longrightarrow \sigma(x)$ borné. Soit $(\lambda_n) \in \sigma(x)$ et $\lambda_n \to \lambda$. Alors $x - \lambda_n e \notin G(A)$ et $x - \lambda_n e \to x - \lambda e$. $G(A)$ ouvert $\Longrightarrow A \setminus G(A)$ fermé $\Longrightarrow x - \lambda e \notin G(A) \Longrightarrow \lambda \in \sigma(x)$. Donc $\sigma(x)$ est fermé. ○

Déf Soit X un evt, $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ouvert et $f : \Omega \to X$. f s'appelle *faiblement holomorphe* si $\varphi \circ f \in H(\Omega)$ $\forall \varphi \in X^*$.

4.5 Proposition *Soit A une algèbre de Banach unitaire complexe et $x \in A$. Alors la résolvante $R(x;\cdot) : \rho(x) \to A$ est faiblement holomorphe sur l'ensemble résolvant $\rho(x)$. En plus, $\lim_{\lambda\to\infty}\big(\varphi \circ R(x;\cdot)\big)(\lambda) = 0$ $\forall \varphi \in A^*$.*

Dém. Soit $\lambda \in \rho(x), \varphi \in A^*$ et $f := \varphi \circ R$. Appliquons 4.2 à $x - \lambda e$ au lieu de x et à $(\lambda - \mu)e$ au lieu de h avec $|\lambda - \mu|$ petit. Ainsi

$$||(x - \mu e)^{-1} - (x - \lambda e)^{-1} + (\lambda - \mu)(x - \lambda e)^{-2}|| \leq C|\mu - \lambda|^2.$$

Donc

$$\frac{1}{\mu - \lambda}\big[(x - \mu e)^{-1} - (x - \lambda e)^{-1}\big] \to (x - \lambda e)^{-2} \quad (\mu \to \lambda).$$

En composant avec φ, on obtient

$$\frac{f(\mu) - f(\lambda)}{\mu - \lambda} \to \varphi\big((x - \lambda e)^{-2}\big) \quad (\mu \to \lambda).$$

Donc f est $\mathbb{C}$-différentiable en λ avec $f'(\lambda) = \varphi\big((x - \lambda e)^{-2}\big)$.

4.3 $\Longrightarrow \lambda f(\lambda) = \varphi\big(\lambda(x - \lambda e)^{-1}\big) = \varphi\big((\lambda^{-1}x - e)^{-1}\big) \to \varphi(-e) = -\varphi(e) \quad (\lambda \to \infty).$

On conclut que $\lim_{\lambda\to\infty} f(\lambda) = 0$. ○

4.6 Théorème *Soit A une algèbre de Banach unitaire complexe et $x \in A$. Alors $\sigma(x) \neq \emptyset$.*

Dém. Soit $\lambda_0 \in \rho(x)$. Alors $(x - \lambda_0 e)^{-1} \neq 0$. Hahn-Banach $\Longrightarrow \exists\ \varphi \in A^*$ tel que $f(\lambda_0) \neq 0$, où $f = \varphi \circ R(x;\cdot)$. Supposons que $\sigma(x) = \emptyset$. 4.4 $\Longrightarrow f$ est une fonction entière avec $\lim_{\lambda\to\infty} f(\lambda) = 0$. D'après le théorème de Liouville $f \equiv 0$, une contradiction. ○

4.7 Théorème *Soit A une algèbre de Banach unitaire complexe. Alors*

$$r(x) = \lim ||x^n||^{1/n} = \inf ||x^n||^{1/n}.$$

Dém.: Voir Rudin.

V - FORMES LINÉAIRES CONTINUES SUR DES ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES - SÉPARATION D'ENSEMBLES CONVEXES

A - Préliminaires

Théoreme 5.1

Soit E evt. et $l \in l(E, \mathbb{K})$, $l \neq 0$, une forme linéaire. Alors sont équivalentes :

1) l continue
2) $Ker\, l$ fermé
3) $Ker\, l$ n'est pas dense dans E
4) $\exists\ V$ voisinage $\in \mathcal{U}(0)$ t.q. l bornée sur V
5) l est continue à l'origine.

Démonstration

- (1) $\Rightarrow$ (2) : $Ker\, l = l^{-1}(\{0\})$ fermé

- (2) $\Rightarrow$ (3) : $l \neq 0 \Rightarrow Ker\, l \neq E$

- (3) $\Rightarrow$ (4)

Hyp. $\Rightarrow \exists x_0 \in (E \setminus Ker\, l)^0 \neq \emptyset \Rightarrow \exists$ voisinage W de x_0 *t.q.* $W \cap Ker\, l = \emptyset \quad (**)$

$W = x_0 + U$ où $U \in \mathcal{U}(0)$. Comme la multiplication par un scalaire est continue, $\exists\, \delta > 0$, et $\widetilde{U} \in \mathcal{U}(0), \widetilde{U}$ ouvert, *t.q.* $\alpha\, \widetilde{U} \subseteq U \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{K}$ *t.q.* $|\alpha| < \delta$.

Posons $V := x_0 + \widetilde{V}$ où $\widetilde{V} = \bigcup_{|\alpha|<\delta} \alpha\, \widetilde{U} \Rightarrow V \in \mathcal{U}(x_0)$.

On a $x \in \widetilde{V} \Rightarrow \lambda\, x \in \widetilde{V} \quad \forall\, |\lambda| \leq 1 \quad (*)$

De plus, $l(\widetilde{V})$ borné dans $\mathbb{K}$ car : supposons que $l(\widetilde{V})$ soit non borné $\Rightarrow l(\widetilde{V}) = \mathbb{K}$ car :

Soit $t \in \mathbb{K}, t \neq 0$. Hyp. $\Rightarrow \exists\, x_t \in \widetilde{V}$ *t.q.* $|l(x_t)| \geq |t|$.

Soit $\lambda := \frac{t}{l(x_t)} \Rightarrow |\lambda| \leq 1 \overset{(*)}{\Rightarrow} \lambda\, x_t \in \widetilde{V}$ et $l(\lambda\, x_t) = t$.

$l(\widetilde{V}) = \mathbb{K} \Longrightarrow \exists\ y \in \widetilde{V}$ *t.q.* $l(y) = -l(x_0)$

$\Rightarrow \underbrace{x_0 + y}_{\in x_0 + \widetilde{V} = V} \in Ker\, l \Rightarrow V \cap Ker\, l \neq \emptyset$

or $V \cap Ker\, l \subseteq (x_0 + U) \cap Ker\, l \subseteq W \cap Ker\, l$. Contradiction à $(**)$.
Conclusion: $l\,(\widetilde{V})$ borné $\Rightarrow l\,(V)$ borné $\Rightarrow (4)$.

- (4) $\Rightarrow$ (5)

Hyp. $\Rightarrow \exists\, V \in \mathcal{U}\,(0)\,,\, \exists\, M > 0 \;\; t.q. \;\; \forall x \in V :\; |l(x)| < M$
Soit $\varepsilon > 0 \Rightarrow |l\,(x)| < \varepsilon$ si $\; x \in U \;:= \frac{\varepsilon}{M}\, V \in \mathcal{U}\,(0)$

$\Rightarrow l$ continue en 0.

- (5) $\Rightarrow$ (1)

Soit $x_0 \in E$ et K voisinage de $l\,(x_0)$ dans $\mathbb{K}$. $K = l\,(x_0) + \widetilde{K}\,,\; \widetilde{K}$ voisinage de 0 dans $\mathbb{K}$.
l continue en $0_E \Rightarrow \exists\, U \in \mathcal{U}\,(0_E) \;\; t.q. \;\; l\,(U) \subseteq \widetilde{K}$

$\Rightarrow l\,(x_0 + U) = l\,(x_0) + l\,(U) \subseteq l\,(x_0) + \widetilde{K} = K$

$\Rightarrow l$ continue en x_0. ○

Proposition 5.2
E evt., $l \neq 0$ forme linéaire sur E, (donc $l \in l\,(E\,,\,\mathbb{K})$). Alors l est ouverte (ie $l(U)$ ouvert $\forall$ ouvert U).

Démonstration
Comme $l \neq 0\,,\, \exists\, x_0 \in E \;\; t.q. \;\; l\,(x_0) = 1 \in \mathbb{K}$. Soit U ouvert dans E et $w_1 \in l\,(U) \subseteq \mathbb{K}$.

$\Rightarrow \;\exists\, x_1 \in U \;\; t.q. \;\; l\,(x_1) = w_1$.

U ouvert, $\oplus$ et $\underset{S}{\bullet}$ continues $\Rightarrow \;\exists\, \varepsilon_0 > 0 \;\; t.q. \;\; x_1 + \xi\, x_0 \in U\; \forall \xi \in \mathbb{K}$ avec $|\xi| < \varepsilon_0$
$\Rightarrow w_1 + \xi \cdot 1 = l\,(x_1) + \xi\, l\,(x_0) = l\,(x_1 + \xi\, x_0) \in l\,(U) \quad \forall |\xi| < \varepsilon_0 \qquad \Rightarrow B\,(w_1\,,\,\varepsilon_0) \subseteq l\,(U) \Rightarrow w_1$ point intérieur de $l\,(U) \Rightarrow l\,(U)$ ouvert. ○

Définition
E espace vectoriel sur $\mathbb{K}$

1) $C \subseteq E$ *convexe* si $\forall\, x, y \in C :\; 0 \leq \alpha \leq 1 \Rightarrow \alpha\, x + (1 - \alpha)\, y \in C$

2) $M \subseteq E$ *absorbant* si $\forall\, x \in E\,,\, \exists\, \alpha_0 > 0 \;\; t.q. \;\; \forall\, \alpha \in \mathbb{K}\,,\, |\alpha| \geq \alpha_0 \Rightarrow x \in \alpha\, M$

3) $M \subseteq E$ *équilibré* (balanced, kreisfœrmig) si $\lambda\, M \subseteq M \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{K}\,,\, |\lambda| \leq 1$.

Remarques: (exo.)
a) M absorbant $\Rightarrow 0_E \in M$.
b) M équilibré $\Longrightarrow \alpha\, M = |\alpha|\, M \;\; \forall\, \alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.
c) Si E est evt, alors [M équilibré $\Longrightarrow M^0$ équilibré].

Lemme 5.3
E espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. $\widetilde{C}\,,\, C \subseteq E$ convexes. Alors

1) $\forall\, x \in E\,,\, \forall\, \alpha \in \mathbb{K}\,,\, x + C\,,\, \alpha\, C$ *convexes.*

2) C_λ *convexes* $\Longrightarrow \bigcap_\lambda C_\lambda$ *convexe.*

3) $\alpha\,,\, \beta \geq 0 \Rightarrow (\alpha + \beta)\, C = \alpha\, C + \beta\, C$

4) $C + \widetilde{C}$ *convexe.*

5) C^0 et $\overline{C}$ *convexes si* E *evt.*

Démonstration

(1),(2),(4) clairs.

(3) clair pour $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$

si $\alpha > 0$ et $\beta > 0 \Rightarrow (\alpha + \beta)\, C \subseteq \alpha\, C + \beta\, C$

C convexe $\Rightarrow \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\, C + \frac{\beta}{\alpha+\beta}\, C \subseteq C$

$\Rightarrow \alpha\, C + \beta\, C \subseteq (\alpha + \beta)\, C \Rightarrow (3)$

(5),(6) exo. ○

Proposition 5.4

Soit E *evt. Alors chaque voisinage* U *de* 0_E *est absorbant.*

Démonstration

Soit $x \in E$. Si $x = 0_E$ alors $0_E = \alpha\, 0_E \in U$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$ $\forall U \in \mathcal{U}(0_E)$.

Si $x \neq 0_E \overset{\overset{\bullet}{s}\ continue}{\Longrightarrow} \exists\, \varepsilon > 0$ *t.q.* $\alpha\, x \in U$, $\forall\, |\alpha| \leq \varepsilon$. Alors $x \in \beta\, U \quad \forall\, |\beta| \geq \frac{1}{\varepsilon}$ ○

Proposition 5.5

E *evt. Alors chaque voisinage* U *de* 0_E *contient un voisinage de* 0_E *qui est équilibré.*

Démonstration

Soit $U \in \mathcal{U}(0_E) \overset{\overset{\bullet}{s}\ continue}{\Longrightarrow} \exists \quad \delta > 0\,, \exists\, V \in \mathcal{U}(0_E), V$ ouvert tq $\forall\, \alpha \in \mathbb{K}:\ |\alpha| \leq \delta \Longrightarrow \alpha\, V \subseteq U$.

Posons $W := \bigcup_{|\alpha| \leq \delta} \alpha\, V \Rightarrow W$ ouvert, $0_E \in W \subseteq U$.

W est équilibré car : soit $|\beta| \leq 1\,, x \in W \Rightarrow \beta\, x \in \beta\, W$ et $x \in \alpha\, V$ pour un $|\alpha| \leq \delta \Rightarrow \beta\, x \in \beta\, \alpha\, V$.

Comme $|\beta\alpha| \leq |\alpha| \leq \delta$ on a : $\beta\alpha\, V \subseteq W \Rightarrow \beta\, x \in W \Rightarrow \beta\, W \subseteq W$. ○

Définition

E espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, $M \subseteq E$ absorbant. Alors

$p_M(x) = \inf\{\alpha > 0\ :\ x \in \alpha M\}\ (x \in E)$

s'appelle jauge (ou fonctionnelle) de Minkowski associée à M.

Remarque

1) $\forall\, x \in E$, on a $0 \leq p_M(x) < \infty$ car M absorbant

2) si $(E\,, \|\ \|)$ espace normé alors $p_B(x) = \|x\|$ où B est la boule unité de E.

Théorème 5.6

Soit E *espace vectoriel.*

(1) $C \subseteq E$ *convexe, absorbant* $\Rightarrow p_c$ *est sublinéaire.*

(2) Si p *est une semi-norme sur* E*, alors* $B = \{x \in E\ :\ p(x) < 1\}$ *est convexe, absorbant et équilibré et* $p = p_{B}$.

(3) *Si C est convexe, absorbant et équilibré, alors p_C semi-norme.*
(4) *E evt., $U \in \mathcal{U}(0_E)$ convexe $\Rightarrow U = \{x \in E \,:\, p_U(x) < 1\}$*
(5) *E evt., U absorbant, équilibré $\Rightarrow \{p_U < 1\} \subseteq U \subseteq \{p_U \leq 1\}$*
(6) *E evt., U absorbant, équilibré : $U \in \mathcal{U}(0_E) \Leftrightarrow B \in \mathcal{U}(0_E)$ où $B = \{p_U < 1\}$.*
(7) E evt., U absorbant, équilibré, ouvert $\Rightarrow U = \{x \in E \,:\, p_U(x) < 1\}$.

Démonstration

1) $\forall \varepsilon > 0\,,\, \exists\, \alpha, \beta > 0$ *t.q.* $p_c(x) \leq \alpha < p_c\,(x) + \varepsilon$ si $x \in \alpha\, C$ et $p_c(y) \leq \beta \leq p_c\,(y) + \varepsilon$ si $y \in \beta C$.
C convexe $\overset{5.3}{\Longrightarrow} x + y \in (\alpha + \beta)\, C$

$\Longrightarrow\ p_c\,(x+y) \leq \alpha + \beta \leq p_c\,(x) + p_c(y) + 2\varepsilon$
$\overset{\varepsilon \to 0}{\Longrightarrow} p_c\,(x+y) \leq p_c(x) + p_c(y)$

- si $\lambda = 0$: $\quad p_c\,(0 \cdot x) = p_c\,(0_E) = \inf\{\alpha > 0 \,:\, 0_E \in \alpha\, C\} = 0$, car $0_E \in C\,(C$ absorbant$)$.
Comme $0 \cdot p_c\,(x) = 0$ on obtient l'assertion.

- si $\lambda > 0$: $\quad p_c\,(\lambda\, x) = \inf\, \left\{\alpha > 0 \,:\, x \in \frac{\alpha}{\lambda}\, C\right\} \overset{\beta = \frac{\alpha}{\lambda}}{=}$
$\lambda \inf\{\beta > 0 \,:\, x \in \beta\, C\} = \lambda\, p_c\,(x)$

2) B convexe car $p(x) < 1\,,\, p(y) < 1\,,\, 0 \leq t \leq 1$

$$\Longrightarrow p(tx + (1-t)\,y) \overset{\text{semi-norme}}{\leq} p\,(t\,x) + p\,((1-t)\,y) \quad = t\,\underbrace{p\,(x)}_{<1} + (1-t)\,\underbrace{p\,(y)}_{<1} < 1$$

- B équilibré car : $x \in B\,,\, |\alpha| \leq 1\,,\, \alpha \neq 0 \Rightarrow p\,(\alpha\, x) \overset{\text{semi-norme}}{=} |\alpha|\, p\,(x) \underset{\alpha \neq 0}{<} |\alpha| \cdot 1 \leq 1 \Rightarrow \alpha\, x \in B$.
En plus $0_E \in B$ et $p(0x) = p(0_E) = 0$. Donc B est equilibré.
- B absorbant car : soit $x \in E\,,\, \alpha_0 > p\,(x)$

$$\alpha \in \mathbb{K} \;\; t.q. \;\; |\alpha| \geq \alpha_0 \Rightarrow p\left(\frac{1}{\alpha}\, x\right)$$

$$\overset{\text{s.n}}{=} \frac{1}{|\alpha|}\, p\,(x) \leq \frac{1}{\alpha_0}\, p\,(x) < 1$$

$\Longrightarrow \frac{1}{\alpha}\, x \in B \Rightarrow x \in \alpha\, B$.

$$- \; p = p_B \,:\, p_B(x) = \inf\{\alpha > 0 \,:\, x \in \alpha\, B\} \quad (B \text{ abs.})$$
$$= \inf\left\{\alpha > 0 \,:\, \frac{x}{\alpha} \in B\right\} = \inf\left\{\alpha > 0 \,:\, p\,\left(\frac{x}{\alpha}\right) < 1\right\}$$
$$\overset{\text{s.n.}}{=} \inf\{\alpha > 0 \,:\, p\,(x) < \alpha\} = p(x)$$

3) hyp. $\overset{(1)}{\Longrightarrow} p_c$ sublinéaire. Soit $\beta \in \mathbb{K}\,,\, \beta \neq 0$.

$$p_c\,(\beta\, x) = \inf\{t > 0\,,\, \beta\, x \in t\, C\} = \inf\left\{t > 0\,,\, x \in \frac{t}{\beta}\, C\right\}$$

$$\overset{C \text{ éq.}}{=} \inf\left\{t > 0\,,\, x \in t\left(\frac{1}{|\beta|}C\right)\right\}$$

$$= |\beta| \inf\left\{\frac{t}{|\beta|} > 0 \,:\, x \in \frac{t}{|\beta|}C\right\} = |\beta|\, p_c\,(x)$$

$\Longrightarrow p_c$ semi-norme.

4) $U \in \mathcal{U}(0_E) \underset{5.4}{\Longrightarrow} U$ absorbant $\Longrightarrow p_U$ bien définie.

Soit $p_U(x) < 1 \Rightarrow \exists\, \alpha > 0$ *t.q.* $p_U(x) \leq \alpha < 1$ et $x \in \alpha\, U$, disons $x = \alpha\, y\,,\, y \in U$.

U convexe $\Rightarrow x = \alpha\, y + (1-\alpha)\, 0_E \in U$

$\Longrightarrow \{p_U < 1\} \subseteq U$.

- Soit $x \in U$, $0_E \in U$, $x = x + 0_E \in U$

$\oplus$ continue $\Rightarrow \exists$ voisinage V de 0_E dans E *t.q.* $x + V \subseteq U$.

Comme $0_E = 0{\cdot}x \in V$ et mult. scalaire continue $\exists\, \delta > 0$ *t.q.* $\delta\, x \in V$ et $x + \delta\, x = (1+\delta)\, x \in U \Rightarrow p_U(x) \leq \frac{1}{1+\delta} < 1 \Longrightarrow U = \{p_U < 1\}$

5) - $x \in E$, $p_U\,(x) < 1 \Rightarrow \exists\, \alpha \in]0,1[$ *t.q.* $x \in \alpha\, U$

$\Longrightarrow \frac{x}{\alpha} \in U$.

U équilibré $\overset{|\alpha| \leq 1}{\Longrightarrow} x = \alpha \cdot \frac{x}{\alpha} \in U$

$\Longrightarrow \{p_u < 1\} \subseteq U$.

- $x \in U \Rightarrow x \in 1\,.\,U \Rightarrow p_U(x) = \inf\{\alpha > 0 \,:\, x \in \alpha\, U\} \leq 1$

$\Longrightarrow U \subseteq \{p_U \leq 1\}$

6) "$\Rightarrow$" $U \in \mathcal{U}\,(0_E) \Rightarrow \exists$ ouvert $\widetilde{U}$ *t.q.* $0_E \in \widetilde{U} \subseteq U$.

Soit $x \in \widetilde{U} \Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0$ *t.q.* $x + \varepsilon\, x = (1+\varepsilon)\, x \in \widetilde{U} \subseteq U$

$\Longrightarrow p_U(x) \leq \frac{1}{1+\varepsilon} < 1 \Rightarrow \widetilde{U} \subseteq B \Rightarrow B \in \mathcal{U}(0_E)$

"$\Leftarrow$" $B \in \mathcal{U}(0_E) \overset{(5)}{\Longrightarrow} 0_E \in B \underset{(U \text{ équil.})}{\subseteq} U$

$\Longrightarrow U \in \mathcal{U}(0_E)$

7) $B \underset{(5)}{\subseteq} U$ (équil.) $\quad 0_E \in U \underset{(\text{ abs.})}{\subseteq} B$ (voir dém. 6 "$\Rightarrow$" , $\widetilde{U} \to U$) ○

Proposition 5.7

Soient E evt. et $U \subseteq E$ absorbant, équilibré et convexe. Alors U est un voisinage de $0_E \Leftrightarrow p_U$ continue sur E.

Démonstration

" $\Leftarrow$" $[0,1[$ ouvert dans $[0\,,+\infty[$, p_U continue $\Rightarrow B = \{p_U < 1\} = p_U^{-1}\,([0,1[)$ ouvert (dans E).

$0_E \in B \underset{(5)}{\subseteq} U \quad \underset{B \text{ ouvert}}{\Longrightarrow} \quad U \in \mathcal{U}(0_E)$.

" $\Rightarrow$ " $\alpha > 0$, $p_U^{-1}\,([0,\alpha[) = \{x \,:\, p_U(x) < \alpha\} = \alpha\, B$ car p_U semi-norme. (5.6, (3))

$U \in \mathcal{U}(0_E) \underset{(6)}{\Longrightarrow} B \in \mathcal{U}(0_E) \Longrightarrow \alpha\, B \in \mathcal{U}(0_E)$

$\Longrightarrow p_U$ continue en 0_E.

Enfin $|p_U(x) - p_U(y)| \underset{\substack{p_U \\ \text{semin.}}}{\overset{5.6(1),(3)}{\leq}} p_U(x-y) \Rightarrow p_U$ continue sur E. ○

B - Théorèmes de Hahn-Banach (*versions géométriques*)

$$x_0 + Ker\, u = \{x \in E \,:\, u(x) = u(x_0)\}$$

5.8 : 1er théorème de séparation

E evt., $A, B \subseteq E$, $A, B \neq \emptyset$, convexes, $A \cap B = \emptyset$, A ouvert.
Alors $\exists\, L \in E^*$, $\exists\, \gamma \in \mathbb{R}$ t.q. $\forall\, a \in A$, $\forall\, b \in B$ $\quad Re\, L(a) < \gamma \leq Re\, L(b)$

Démonstration

- 1 - E réel, $a_0 \in A$, $b_0 \in B$, $x_0 := b_0 - a_0$. Posons $C := A + x_0 - B \Longrightarrow 0_E \in C$.
C convexe (5.3) et C ouvert car

$$C = \bigcup_{b \in B} \underbrace{(\underbrace{A}_{\text{ouvert}} + \underbrace{x_0 - b}_{\substack{\text{transl. de}_A \\ = \text{homéomorph.}}})}_{\text{ouvert}} \quad \text{ouvert.}$$

$x_0 \notin C$ (sinon $A \cap B \neq \emptyset$).
Soit $p = p_c$ la fonctionnelle de Minkowski associée à C (notons que cela est bien déf. car $C \in \mathcal{U}(0_E)$, donc, d'après 5.4 absorbant)
$5.6(4) \overset{C \text{ conv.}}{\Longrightarrow} C = \{x \,:\, p(x) < 1\} \quad (*)$
En particulier $p(x_0) \geq 1$. Soit $F = x_0\, \mathbb{R} = Vect\, \{x_0\}$, $x = \alpha x_0 \in F$.
Sur F on définit une forme linéaire l par $l(\alpha\, x_0) = \alpha$.

a) $\forall\, x \in F$, $l\,(x) \leq p\,(x)$ car :

item si $\alpha \leq 0$, évident (car $p \geq 0$).

item si $\alpha > 0$ on a, $l\,(\alpha\, x_0) = \alpha = \alpha \cdot 1 \leq \alpha\, p\,(x_0) \overset{\substack{p \text{ sublin.} \\ 5.6 \\ \downarrow}}{=} p\,(\alpha\, x_0)$

b) $\overset{1.3}{\,} \overset{\text{Hahn-Banach}}{\Longrightarrow} \exists\, L \in l\,(E\,, \mathbb{R})$ t.q. $L|_F = l$ et

$(**)$ $L(x) \leq p\,(x) \quad \forall\, x \in E$.

c) L est continue car :

$$x \in C \underset{(**)}{\overset{(*)}{\Longrightarrow}} L(x) < 1$$

$\Rightarrow \; - L(x) = L(-x) \leq p\,(-x) < 1$ si $-x \in C$.

Ainsi, $|L(x)| < 1$ si $x \in C \cap (-C)$. En plus $C \cap (-C) \in \mathcal{U}(0_E)$, car $\underset{S}{\bullet}$ est continue et C ouvert. Donc L est bornée sur un voisinage de $0_E \overset{5.1}{\Longrightarrow} L$ continue.

Soient $a \in A$, $b \in B$ alors $L\,a - L\,b + \underset{L(x_0)=1}{1} = L(\underbrace{a - b + x_0}_{\in C}) < 1 \Longrightarrow L(a) < L(b) \Longrightarrow$

$LA \cap LB = \emptyset$ et LA est à gauche de LB.

A ouvert, $L \not\equiv 0 \overset{5.2}{\Longrightarrow} LA$ ouvert.

Posons $\gamma = \sup\{La \,:\, a \in A\}$.

$\Rightarrow L(a) < \gamma \leq L(b) \quad \forall\, a \in A\,, \forall\, b \in B.$

- 2 - E evt. sur $\mathbb{C}$. Considérons $E_{\mathbb{R}}$ l'espace vectoriel réel sous-jacent.

- 1er cas $\Rightarrow \exists\, L \in l\,(E_{\mathbb{R}}\,, \mathbb{R})$ avec les propriétés voulues.

Considérons $\widetilde{L}(x) = L(x) - i\,L\,(ix) \overset{1.1}{\Longrightarrow} \widetilde{L} \in L\,(E\,, \mathbb{C})$ et $Re\,\widetilde{L} = L$. En plus, $\widetilde{L}$ continue et $Re\,\widetilde{L}\,a < \gamma \leq Re\,\widetilde{L}\,b \quad \forall\, a \in A\,, b \in B.$ ○

Définition

Un evt. E est *localement convexe* si chaque point de E possède une base de voisinages d'ensembles convexes, *ie* $\forall\, x \in E\,, \forall\, U \in \mathcal{U}(x)$, $\exists\, C$ convexe, $C \in \mathcal{U}(x)$, *t.q.* $x \in C \subseteq U$.

(Notons que C^0 est convexe, donc on pourrait choisir des convexes ouverts).

- Exemple

1) Chaque espace normé $(E\,, \|\ \ \|)$ est un espace vectoriel topologique localement convexe (evtlc)

2) contre - exemple : $L^p([0,1])\,,\ 0 < p < 1$; car C convexe ouvert non vide $\Rightarrow C = L^p$ (voir TD).

5.9 : 2ème théorème de séparation

E evtlc., $\emptyset \neq A, B \subseteq E$, $A \cap B = \emptyset$, A, B convexes.

B fermé, A compact.

Alors $\exists\, L \in E^*$, γ_1, $\gamma_2 \in \mathbb{R}$ t.q. $Re\,L\,a < \gamma_1 < \gamma_2 < Re\,L\,b \quad \forall\, a \in A\,, \forall\, b \in B$.

En d'autres termes :

$$\sup_{a \in A} Re\,L\,a < \inf_{b \in B} Re\,L\,b.$$

Démonstration

1) Montrons d'abord $\exists\, V \in \mathcal{U}\,(0)$, convexe *t.q.* $(A + V) \cap B = \emptyset$

Soit $a \in A$. $A \cap B = \emptyset$, B fermé $\underset{E \text{ loc. conv.}}{\Longrightarrow} \exists\, V_a \in \mathcal{U}(0)$, V_a convexe, ouvert, t.q. $(a + V_a + V_a) \cap B = \emptyset$.

$\Rightarrow A \subseteq \bigcup_{a \in A} \underbrace{(a + V_a)}_{\text{ouvert}}$ ouvert.

A compact $\Rightarrow A \subseteq \bigcup_{j=1}^{N} (a_j + V_{a_j})$. Posons $V_j = V_{a_j} \quad V = V_1 \cap \ldots \cap V_N$

$\Rightarrow V$ ouvert, convexe et $0 \in V$.
En plus, $A + V \subseteq \bigcup_{j=1}^{N}(a_j + V_j) \; + \; V \subseteq \bigcup_{j=1}^{N}(a_j + V_j + V_j)$. Comme chacun de ces ensembles est disjoint avec B, on obtient que $(V + A) \cap B = \emptyset$.

2) <u>1er cas</u> : E réel

Posons $\widetilde{A} = A + V \quad \widetilde{B} = B$
$\widetilde{A}$ ouvert car $\widetilde{A} = \bigcup\limits_{a \in A} \underbrace{(a + V)}_{\text{ouvert}}$ et $\widetilde{A} \cap \widetilde{B} = \emptyset$.

$\widetilde{A}$ convexe (A, V convexes $+5.3$), $\widetilde{B}$ convexe

$$\overset{5.8}{\Longrightarrow} \; \exists\, L \in E^* \;\; t.q. \;\; L(A+V) \text{ est à gauche de } L(B) \text{ et } L(A+V) \cap L(B) = \emptyset.$$

$A + V$ ouvert $\underset{5.2}{\Longrightarrow} L(A + V)$ ouvert.
A compact, L continue $\Rightarrow L(A)$ compact et $L(A) \subseteq L(A + V)$. Ainsi $L(A)$ est strictement à gauche de $L(B)$.
Choisir $\gamma_1 = \frac{2}{3} \sup LA + \frac{1}{3} \inf LB$ et $\gamma_2 = \frac{1}{3} \sup LA + \frac{2}{3} \inf LB \Longrightarrow$ assertion.

- <u>2ème cas</u> : E complexe : comme d'habitude on passe à $E_{\mathbb{R}}$. ○

Corollaire 5.10

Soit E espace vectoriel top. loc. conv. Alors E^* séparante.

Démonstration

$x_1 \neq x_2 \in E$, $\{x_j\}$ convexe, compact, fermé (car $T1$).
Appliquer 5.9 à $A = \{x_1\}$ et $\quad B = \{x_2\}$ ○

Proposition 5.11

E evtlc., $F \subseteq E$ sev, $x_0 \in E$, $x_0 \notin \overline{F}$. Alors $\exists\, L \in E^* \;\; t.q. \;\; L(x_0) = 1$ et $L(x) = 0 \;\; \forall\, x \in F$.

Démonstration

Appliquer le 2ème théorème de séparation 5.9 à $A = \{x_0\}$ et $B = \overline{F}$ (sev. convexe).
Ainsi $\exists\, \widetilde{L} \in E^* \;\; t.q. \;\; Re\, \widetilde{L}\,(x_0) < \gamma_1 < \gamma_2 < Re\, \widetilde{L}(x) \quad \forall\, x \in F$.

$$\overset{0_E \in F}{\Longrightarrow} \; \widetilde{L}(x_0) \neq 0 \text{ et } \widetilde{L}(x_0) \notin \widetilde{L}(F) \subseteq \mathbb{K} \Longrightarrow \widetilde{L}(F) \text{ sev. propre de } \mathbb{K} \Rightarrow \widetilde{L}\,(F) = \{0\}$$

Posons $L = \frac{\widetilde{L}}{\widetilde{L}(x_0)} \Rightarrow L$ a les propriétés désirées. ○

Théorème 5.12 : théorème de Hahn-Banach pour les evtlc :

E evtlc., $F \subseteq E$ sev., l forme linéaire continue sur F. Alors $\exists\, L \in E^* \;\; t.q. \;\; L|_F = l$.

Démonstration

S.p.g. $l \not\equiv 0$. Posons $F_0 = \{x \in F \,:\, l\,(x) = 0\}$. Alors $F_0 \subset F$ (strict). Choisir $x_0 \in F \;\; t.q. \;\; l\,(x_0) = 1 \overset{l \text{ continue}}{\Longrightarrow} x_0 \notin \overline{F}_0^F = \overline{F}_0 \cap F \Rightarrow x_0 \notin \overline{F}_0$

$\overset{5.11}{\Longrightarrow} \; \exists\, L \in E^* \;\; t.q. \;\; L(x_0) = 1$ et $L|_{\overline{F}_0} \equiv 0$.

Soit $x \in F \Rightarrow x - l(x)\,x_0 \in F_0$ (car $l(x_0) = 1$) ainsi

$$L(x) - l(x) = L(x) - l(x)\underbrace{L(x_0)}_{=1} = L\underbrace{(x - l(x)\,x_0)}_{\in F_0} = 0$$

$\Rightarrow L|_F = l$ ○

Rappel $X \neq \emptyset$, $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{K}^X = \{f : X \to \mathbb{K} \text{ appli.}\}$, X muni de la topologie initiale $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ associée à $\mathcal{F}$. Alors la famille des $\bigcap_{j=1}^n f_j^{-1}(U) \in \mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ où $U \subseteq \mathbb{K}$ ouvert, $n \in \mathbb{N}$, $f_1, \cdots, f_n \in \mathcal{F}$, forme une base de $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$. On en déduit que l'ensemble de tous les $U_{\varepsilon,f_1,\cdots,f_n}(x_0) := \bigcap_{j=1}^n \{x \in X : |f_j(x) - f_j(x_0)| < \varepsilon\}$, où $\varepsilon > 0, n \in \mathbb{N}, f_1, \cdots, f_N \in \mathcal{F}$ est un système fondamental de vosinages pour $\mathcal{U}(x_0)$, $x_0 \in X$. Si X est un espace vectoriel et $\mathcal{F} \subseteq l(X)$, on a

$$U_{\varepsilon,f_1,\cdots,f_N}(x_0) = x_0 + \bigcap_{j=1}^N \{x \in X : |f_j(x)| < \varepsilon\}.$$

Lemma 5.13
Soient E un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$ et $\ell, \ell_1, \cdots, \ell_n \in l(E, \mathbb{K})$. Supposons que $\bigcap_{j=1}^n Ker\ell_j \subseteq Ker\ell$ $(*)$. Alors il existent $\alpha_j \in \mathbb{K}$ tq $\ell = \sum_{j=1}^n \alpha_j \ell_j$.

Démonstration
Soit $\Phi : E \to \mathbb{K}^n$ définie par $\Phi(x) = (\ell_1(x), \cdots, \ell_n(x))$. Alors, dû à $(*)$, $\Phi(x) = \Phi(x')$ implique que $\ell(x) = \ell(x')$. Ainsi $f(\Phi(x)) = \ell(x)$ définie une application linéaire sur $\Phi(E)$. Celle-ci admet un prolongement linéaire F sur $\mathbb{K}^n$. C'est à dire il existe $\alpha_j \in \mathbb{K}$ tq $F(u_1, \cdots, u_n) = \sum_{j=1}^n \alpha_j u_j$. Donc
$\ell(x) = f(\Phi(x)) = F(\Phi(x)) = F(\ell_1(x), \cdots, \ell_n(x)) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \ell_j(x)$.

Théorème 5.14
E espace vectoriel, $\mathcal{F} \subseteq l(E, \mathbb{K})$, $\mathcal{F}$ sev . Supposons que $\mathcal{F}$ soit séparante. Alors $(E, \mathcal{T}_{\mathcal{F}})$ est un evtlc. L'ens. $E^* := (E, \mathcal{T}_{\mathcal{F}})^*$ des formes linéaires continues sur E coïncide avec $\mathcal{F}$.

Démonstration

1) $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ est T2: En effet, soit $x, y \in E$, $x \neq y$. $\mathcal{F}$ séparante $\Rightarrow \exists\, f \in \mathcal{F}$ *t.q.* $f(x) \neq f(y)$.
Soit $\varepsilon = |f(x) - f(y)| \Rightarrow \underbrace{B\left(f(x)\,,\,\frac{\varepsilon}{3}\right)}_{B_1} \cap \underbrace{B\left(f(y)\,,\,\frac{\varepsilon}{3}\right)}_{B_2} = \emptyset$

$\Rightarrow f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) = \emptyset$ et $x \in f^{-1}(B_1) =: U_1$, $y \in f^{-1}(B_2) =: U_2$. f continue $\Rightarrow U_1$, U_2 ouverts.

2) • Continuité de l'addition : x_0 , $y_0 \in E, z_0 = x_0 + y_0$.
Montrons que $\forall\, W \in \mathcal{U}(z_0)\ \exists U \in \mathcal{U}(x_0)$ et $\exists V \in \mathcal{U}(y_0)$ *t.q.* $U + V \subseteq W$.
Pour cela, soit $\widetilde{W} = \bigcap_{j=1}^N f_j^{-1}(B(0, \varepsilon)) := U_{\varepsilon,f_1,\ldots,f_N}$, $f_j \in \mathcal{F}$, *t.q.* $\widetilde{W} + z_0 \subseteq W$.
Posons $U = x_0 + U_{\frac{\varepsilon}{2},f_1,\ldots,f_N}$, $V = y_0 + U_{\frac{\varepsilon}{2},f_1,\ldots,f_N}$

$\Rightarrow U + V \subseteq W$

• Continuité de $\underset{S}{\bullet}$. Montrons que $\forall\, \alpha_0 \in \mathbb{K}\,,\, \forall\, x_0 \in E\,,\, \forall\, W \in \mathcal{U}\,(\alpha_0\, x_0) \quad \exists\, U \in \mathcal{U}(x_0)$ et

$\delta > 0$ *t.q.* $\forall\, x \in U\,,\, \forall\, \alpha \in \mathbb{K}$ avec $|\alpha - \alpha_0| < \delta$ on a $\alpha\, x \in W$.

Pour cela, écrivons $\alpha\, x = (\alpha - \alpha_0)(x - x_0) + (\alpha - \alpha_0)\, x_0 + \alpha_0\,(x - x_0) + \alpha_0\, x_0$.
Choisir $\widetilde{W} \in \mathcal{U}\,(0), \quad \widetilde{W} = U_{\varepsilon, f_1, \ldots, f_N}\,, \quad t.q. \;\; \alpha_0\, x_0 + \widetilde{W} \subseteq W$.
Soit $V_1 = U_{\frac{\varepsilon}{3}, f_1, \ldots, f_N} \Rightarrow V_1 + V_1 + V_1 \subseteq \widetilde{W}$
Choisir $\delta > 0$ *t.q.* $|f_j((\alpha - \alpha_0)\, x_0)| = |(\alpha - \alpha_0)|\; |f_j\,(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$
$\forall\, |\alpha - \alpha_0| < \delta, \quad j = 1, \ldots, N$.
Pour $\alpha \in \mathbb{K}$ avec $|\alpha - \alpha_0| < \delta$ on donc $(\alpha - \alpha_0)\, x_0 \in V_1$
Choisir $U = x_0 + U_{\frac{\varepsilon}{3\,(\delta + |\alpha_0|)}, f_1, \ldots, f_N}$. Alors $U \subseteq x_0 + U_{\frac{\varepsilon}{3\delta}, f_1, \ldots, f_N}$
Soit $|\alpha - \alpha_0| < \delta$ et $x \in U$.
Alors $|f_j(x) - f_j(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3\delta}$ et

$$|f_j((\alpha - \alpha_0)(x - x_0))| = |\alpha - \alpha_0|\; |f_j(x) - f_j(x_0)|$$
$$< \delta\, \frac{\varepsilon}{3\delta} = \frac{\varepsilon}{3} \text{et} \quad |f_j(\alpha_0(x - x_0))| = |\alpha_0|\; |f_j(x) - f_j(x_0)|$$
$$< |\alpha_0|\, \frac{\varepsilon}{3|\alpha_0|} = \frac{\varepsilon}{3}$$

$\Rightarrow \alpha\, x \in V_1 + V_1 + V_1 + \alpha_0\, x_0 \subseteq \widetilde{W} + \alpha_0\, x_0 \subseteq W$. ○

• Montrons que $E^* = \mathcal{F}$.

Comme chaque élément $f \in \mathcal{F}$ est linéaire et continue, on a $\mathcal{F} \subseteq (E, \mathcal{T}_{\mathcal{F}})^*$ (déf. topologie initiale)

Soit $f\, :\, E \to \mathbb{K}$ linéaire continue. Montrons que $f \in \mathcal{F}$.
Soit $U := \{x \in E\, :\, |f(x)| < 1\} \Rightarrow U$ ouvert, donc $U \in \mathcal{T}_{\mathcal{F}}$.
Comme $0 \in U$ (f linéaire!) $\quad \exists\, V \in \mathcal{U}(0)\,, V = \bigcap_{j=1}^{N} \{x \in E\, :\, |f_j(x)| < \varepsilon\} = U_{\varepsilon, f_1, \ldots, f_N}$ *t.q.* $V \subseteq U,\; f_i \in \mathcal{F}$.
f linéaire $\Longrightarrow \delta\, V \subseteq \delta U = \{x\, :\, |f(x)| < \delta\}$.
Soit $K = \bigcap\limits_{j=1}^{N} Ker\, f_j \Rightarrow K \subseteq Ker\, f$ car :
$x \in K \Rightarrow f_j(x) = 0 \Rightarrow x \in \delta\, V \subseteq \delta\, U = \{|f| < \delta\} \quad \forall\, \delta > 0, \quad \delta \to 0 \Rightarrow f(x) = 0$.
$\underset{5.13}{\Longrightarrow} f = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j\, f_j \quad (\alpha_j \in \mathbb{K}) \underset{\mathcal{F}\text{ sev}}{\Longrightarrow} f \in \mathcal{F}$.

3) $\quad (E, \mathcal{T}_{\mathcal{F}})$ est localement convexe car les ensembles $U_{\varepsilon, f_1, \cdots, f_n} = \bigcap_{j=1}^{n} \{x \in E\, :\, |f_j(x)| < \varepsilon\}$ du système fondamentale de voisinages de $\mathcal{U}(0)$ sont des ensembles conveves, dû à la linéarité des f_j. ○

Theorème 5.15 : 3ème théorème de séparation
$(E, \mathcal{T})$ evt., E^* séparante, $\emptyset \neq A, B \subseteq E$ convexes, $A \cap B = \emptyset$.
Supposons que A, B soient compacts. Alors $\exists\, L \in E^*$ t.q.
$\sup\limits_{a \in A} Re\, L\, a < \inf\limits_{b \in B} Re\, L\, b$.

Démonstration
Soit $\mathcal{F} = E^* \Rightarrow \mathcal{F}$ séparante et $\mathcal{F}$ sev de $l\,(E, \mathbb{K})$
$\overset{5.14}{\Longrightarrow}$ $(E\,,\,\mathcal{T}_{\mathcal{F}})$ evtlc. et $(E\,,\,\mathcal{T}_{\mathcal{F}})^* = \mathcal{F} = E^*$. Il est claire que $\mathcal{T}_{\mathcal{F}} \subseteq \mathcal{T}$.

5.9 $\Longrightarrow$ assertion (car A compact dans $\mathcal{T} \Rightarrow A$ compact dans $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$; B compact dans $\mathcal{T}_{\mathcal{F}} \underset{T_2}{\Rightarrow} B$ fermé dans $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$).

VI - LA STRUCTURE DES ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES LOCALEMENT CONVEXES

$M \subseteq (E\,,\, \|\cdot\|)$ borné s'il $\exists$ une boule $B = B(0,r)$ *t.q.* $M \subseteq B$. Notons aussi que $B = r\,B(0,1)$

Définition
Soit $(E\,,\,\mathcal{T})$ evt.. $M \subseteq E$ est dit $\mathcal{T}$-*borné* si
$\forall\, U \in \mathcal{U}\,(0)\,,\, \exists \lambda_0 > 0$ *t.q.* $\forall\, \lambda \in \mathbb{R} \,:\, \lambda > \lambda_0 \Rightarrow M \subseteq \lambda\, U$

Remarque
- On peut se restreindre à prendre des U d'un système fondamental de $\mathcal{U}\,(0)$.
- Si $(E\,,\,\mathcal{T})$ est un espace normé, alors les deux définitions coïncident.

Lemme 6.1
Soit $(E\,,\,\mathcal{T})$ un evt et V un voisinage convexe de 0, ou bien, soit E un evtlc et U un voisinage arbitraire de 0. Alors U et V contiennent un voisinage Ω de 0 qui est ouvert, convexe, équilibré et absorbant.

Démonstration
$0 \in U\,, E$ loc. convexe $\Rightarrow$ $\exists$ ouvert convexe V *t.q.* $0 \in V \subseteq U$. Comme la multiplication scalaire est continue,
$\exists\, \delta > 0\,, \exists\, W$ ouvert, $0 \in W$ *t.q.* $\mu\, W \subseteq V\ \forall\, |\mu| \leq \delta$
- De plus, soit $\widetilde{U} = \bigcap_{|\alpha|=1} \alpha\, V$; alors $\widetilde{U}$ est convexe (claire) et équilibré car:

$|\lambda| \leq 1$, $\lambda = |\lambda|\, e^{i\theta} \Rightarrow \lambda\, \widetilde{U} = \bigcap_{|\alpha|=1} |\lambda|\, \alpha\, e^{i\theta}\, V = \bigcap_{|\beta|=1} |\lambda|\, \beta\, V \underset{(*)}{\subseteq} \bigcap_{|\beta|=1} \beta\, V = \widetilde{U}$,
Notons que $(*)$ est vraie, car $x \in \beta\, V$, $0 \in \beta\, V$ et $\beta\, V$ convexe $\Rightarrow x\,|\lambda| + (1 - |\lambda|)\, 0 \in \beta\, V$

$\Rightarrow |\lambda|\, \beta\, V \subseteq \beta\, V$
- Soit $W_0 := \underset{|\mu| \leq \delta}{\cup} \mu\, W$. Alors $0 \in W_0$ et W_0 est équilibré, ouvert, $W_0 \subseteq V$ et $W_0 \subseteq \widetilde{U}$

car : soit $x_0 \in W_0$, $|\alpha| = 1$, W_0 *équilibré* $\Rightarrow \overline{\alpha}\, x_0 \in W_0 \subseteq V$

$\Rightarrow$ $x_0 \in \alpha\, V \Rightarrow x_0 \in \widetilde{U}$.
- Donc $\widetilde{U} \in \mathcal{U}(0)$. Soit $\Omega = \widetilde{U}^0 \Rightarrow \Omega$ ouvert, $0 \in \Omega$, Ω convexe, équilibré et absorbant (5.4) ○

Théorème 6.2 : théorème de Kolmogorov
Soit $(E, \mathcal{T})$ evt. Alors E est normable si et seulement si $\exists$ un voisinage convexe et $\mathcal{T}$-borné de 0_E.

Démonstration

" $\Rightarrow$ " E normable $\Rightarrow B = \{x : \|x\| < 1\}$ convexe, ouvert, $\mathcal{T}$-borné.

"$\Leftarrow$"

• Soit V convexe $\mathcal{T}$-borné, $V \in \mathcal{U}(0_E)$, alors d'après 6.1, $\exists\, U \subseteq V$, $U \in \mathcal{U}(0_E)$, U ouvert, équilibré, convexe, absorbant et $\mathcal{T}$-borné (notons que V $\mathcal{T}$-borné, $U \subseteq V \Rightarrow U$ $\mathcal{T}$-borné).

• Soit p_U la jauge de Minkowski associée à U. Posons $\|x\| := p_U(x)$.

5.6 (3) $\Rightarrow p_U$ semi-norme.

Soit $x \neq 0$, E esp. $T_1 \Rightarrow \exists$ voisinage V de 0 *t.q.* $x \notin V$.
U $\mathcal{T}$-borné, $\exists\, t_0 > 0$, $\forall\, t \geq t_0$: $U \subseteq t\, V \Rightarrow \frac{1}{t} U \subseteq V$

$\Rightarrow \; x \notin \frac{1}{t} U \Rightarrow p_U\,(x) \geq \frac{1}{t_0} > 0 \quad \Rightarrow p_U$ norme.

• U ouvert $\overset{5.6(4),(7)}{\Longrightarrow}$ $\{x : p_U(x) < 1\} = U$

$\overset{\forall\, r>0}{\Longrightarrow}$ $\{x : p_U(x) < r\} = r\, U.$

Notons que $\{r\, U \; : \; r > 0\}$ est un système fondamental de $\mathcal{U}(0_E)$ pour la topologie $\mathcal{T}$ car :

soit $W \in \mathcal{T}$, $0_E \in W \Rightarrow \exists\, r > 0$ *t.q.* $r\, U \subseteq W$ car U borné.

Comme un système fondamental de $\mathcal{U}(0_E)$ associé à la topologie induite par la norme est l'ensemble des boules $\{x : \|x\| < r\} = \{x : p_U(x) < r\}$ et que les systèmes fondamentals de voisinages déterminent de façon unique une topologie, on a que $\mathcal{T}$ coïncide avec la topologie induite pour $\|\cdot\|$ sur E ○

Définitions 1) Soit $\mathcal{P}$ une famille de semi-normes sur un espace vectoriel E. On dit que $\mathcal{P}$ est faiblement séparante, si $\forall\, x \in E, x \neq 0_E$, $\exists p \in \mathcal{P}$ *t.q.* $p(x) \neq 0$.
2) Soit $\mathcal{P}$ une famille de semi-normes sur un espace vectoriel E. Soit $U_{\varepsilon,p_1,\cdots,p_n} = \bigcap_{j=1}^{n}\{x \in E : p_j(x) < \varepsilon\}$. Alors la famille des ensembles

$$x_0 + U_{\varepsilon,p_1,\cdots,p_n}, (\varepsilon > 0, n \in \mathbb{N}, p_j \in \mathcal{P}, x_0 \in E)$$

est une base de d'une topologie $\mathcal{O}_{\mathcal{P}}$ sur E, dite "topologie invariante par translation engendrée par $\mathcal{P}$".
Notons que si U parcourt un système fondamental de voisinages de 0_E, alors $x_0 + U$ parcourt un système fondamental de voisinages de x_0.
En plus, $x_0 + U_{\varepsilon,p_1,\cdots,p_n} = \bigcap_{j=1}^{n}\{x \in E : p_j(x - x_0) < \varepsilon\}$

Exemple: Soit E esp. vect., $\mathcal{F} \subseteq l(E, \mathbb{K})$ et $\mathcal{P} = \{|f| : f \in \mathcal{F}\}$. Alors $\mathcal{T}_{\mathcal{F}} = \mathcal{O}_{\mathcal{P}}$. (Voir 5.14).

Proposition 6.3
Soit $\mathcal{P}$ une famille de semi-normes sur un espace vectoriel E. Supposons que $\mathcal{P}$ soit faiblement séparante. Soit $\mathcal{O}_{\mathcal{P}}$ la topologie invariante par translation (i.t.) engendrée par $\mathcal{P}$. Alors

1) $(E, \mathcal{O}_{\mathcal{P}})$ est un evtlc.
2)Chaque $p \in \mathcal{P}$ est continue.
3) $M \subseteq E$ est $\mathcal{O}_{\mathcal{P}}$-borné $\Longleftrightarrow \forall\, p \in \mathcal{P}$, p est bornée sur M
$\left(ie \ \sup\limits_{x\in M} \ p\,(x) < \infty\right)$.

Démonstration

1) voir 5.14. Notons que $\mathcal{O}_{\mathcal{P}}$ est $T1$. En effet, soit $x_0 \in E \setminus \{0_E\}$. $\mathcal{P}$ faiblement séparante $\Longrightarrow \exists\, p \in \mathcal{P} : p(x_0) \neq 0 \Longrightarrow 0_E \notin \{x \in E : p(x - x_0) < \frac{1}{2}p(x_0)\} =: V(x_0)$. Notons que $V(x_0) \in \mathcal{U}(x_0)$ et que V est ouvert. Donc $0_E \notin \bigcup_{x_0 \neq 0_E} V(x_0) = E\setminus\{0_E\}$. Ainsi $\{0_E\}$ est un fermé.
2) clair (par déf. de la topologie invariante par translation)

3) "$\Rightarrow$" M borné, $p \in \mathcal{P} \Rightarrow B = \{x : p(x) < 1\}$ ouvert; $B \in \mathcal{U}(0_E) \overset{\substack{\text{déf.}\\ \text{borné}}}{\Longrightarrow} \exists \alpha > 0 \ M \subseteq \alpha\, B. \overset{p \text{ s.n.}}{\Longrightarrow} \ \forall\, x \in M\,,\, p\,(x) < \alpha\,.$
"$\Leftarrow$" Supposons que chaque $p \in \mathcal{P}$ soit bornée sur M.
Soit $U \in \mathcal{U}\,(0_E)$. Choisir $U_{\varepsilon,p_1,\cdots,p_m} \ := \bigcap\limits_{j=1}^{m} \ \{x \ : \ p_j\,(x) < \varepsilon\} \subseteq U$
$\overset{\text{hyp.}}{\Longrightarrow} \ p_j < C_j$ sur $M\,,\, j = 1, \cdots, m$
Soit $\alpha = \max\limits_{j} \ C_j\, \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow M \subseteq \alpha\, U$ (car si $x \in M \Rightarrow p_j(x) < C_j \leq \alpha\, \varepsilon$) ○

Théorème 6.4
Soit $(E, \mathcal{T})$ evtlc. Alors il existe une famille faiblement séparante $\mathcal{P}$ de semi-normes continues sur E t.q. la topologie $\mathcal{O}_{\mathcal{P}}$ invariante par translation engendrée par $\mathcal{P}$ coïncide avec $\mathcal{T}$.

En d'autres mots, chaque evtlc est déterminé par une famille de semi-normes.

Démonstration
Soit $\mathcal{P} = \{p_U \ : \ U$ convexe, ouvert, équilibré, $0_E \in U\}$, où p_U est la jauge de Minkovski associée à U. Alors

1) $\mathcal{P} \neq \emptyset$ (E loc. convexe + 6.1)
2) $p \in \mathcal{P} \overset{5.6(3)}{\Longrightarrow} \ p$ semi-norme

3) $\mathcal{P}$ faiblement séparante : en effet, soit $x \in E$, $x \neq 0\ E$ esp. $T_1 \overset{6.1}{\Longrightarrow} \exists\, V \in \mathcal{U}(0_E)$, V convexe, équilibré, ouvert *t.q.* $x \notin V$.
Comme $V \overset{5.6(4)}{=} \{x \ : \ p_V(x) < 1\}$ on a $p_V(x) \geq 1$. De plus, $p_V \in \mathcal{P}$.

4) $p_U \in \mathcal{P} \overset{5.7}{\Longrightarrow} p_U$ continue.
5) $\mathcal{O}_{\mathcal{P}} \subseteq \mathcal{T}$, claire car p_U continue $\Longrightarrow \{p_U < \varepsilon\} \in \mathcal{T}$.
6) Soit $U \in \mathcal{T}$, $U \in \mathcal{U}(0_E) \overset{6.1}{\Longrightarrow} \exists$ ouvert, convexe, équilibré V *t.q.* $0_E \in V \subseteq U$.

$\overset{5.6}{\Longrightarrow} \ V = \{x \ : \ p_V\,(x) < 1\}$ et p_V continue (dans $\mathcal{O}_{\mathcal{P}}$ et $\mathcal{T}$).
$\Longrightarrow \ V$ est $\mathcal{O}_{\mathcal{P}}$ ouvert.
donc chaque voisinage U de 0_E dans $\mathcal{T}$ est un voisinage de 0_E dans $\mathcal{O}_{\mathcal{P}} \Rightarrow \mathcal{T} \subseteq \mathcal{O}_{\mathcal{P}}$.

$\Longrightarrow \mathcal{T} = \mathcal{O}_{\mathcal{P}}$ ○

Théorème 6.5 (*Théorème de métrisation d'evtlc.*)
Soit $(E, \mathcal{T})$ evtlc. et $\mathcal{P}$ une famille (faiblement séparante) de semi-normes qui induit la topologie $\mathcal{T}$, i.e. $\mathcal{T} = \mathcal{O}_{\mathcal{P}}$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1) $\mathcal{T}$ peut être définie par une famille faiblement séparante dénombrable de semi-normes.
2) $\exists$ une distance invariante par translation qui induit la topologie $\mathcal{T}$ $\big(d(x,z) = d(x+y\,,\, z+y) \quad \forall\, x,y,z\big)$
3) E métrisable
4) L'espace E est un espace à base dénombrable de voisinages.

Démonstration

(1) $\Rightarrow$ (2) : $(E, \mathcal{T})$ evtlc., $\mathcal{D} = \{p_j \,:\, j = 1, 2, \ldots\}$ engendre la topologie $\mathcal{T}$, i.e $\mathcal{T} = \mathcal{O}_{\mathcal{D}}$ et $\{x_0 + U_{\varepsilon, p_1, \ldots, p_n}\,,\, \varepsilon > 0\,,\, p_j \in \mathcal{D}\,,\, n \in \mathbb{N}\}$ est une base de voisinages de x_0. Notons que tous les $p_j \in \mathcal{D}$ sont continues (voir 6.3).
Posons $d(x,y) = \max\limits_j \frac{c_j\, p_j\,(x-y)}{1 + p_j\,(x-y)} \quad j = 1, 2, \ldots$ où $c_j > 0\,,\, c_j \to 0$

• $\mathcal{D}$ faiblement séparante $\Longrightarrow d$ distance $\left(\frac{\delta}{1+\delta} \text{ monotone}\right)$, d invariante par translation.
• Soit $B_r := \{x \,:\, d(0,x) < r\}$. Montrons que $\{B_r\,,\, r > 0\}$ est un système fondamental de voisinages convexes et équilibrés de 0_E (pour la topologie $\mathcal{T}$).

En effet, fixons $r > 0$. Si $c_i \leq r$ (d'ailleurs vrai pour presque tous les $i \in \mathbb{N}$), alors $\frac{c_i\, p_i}{1+p_i} \leq r$; donc $B_r = \bigcap_{i: c_i > r} \left\{x \,:\, p_i(x) < \frac{r}{c_i - r}\right\}$ est une intersection finie d'ouverts de $\mathcal{T}$.
$\Rightarrow B_r \in \mathcal{T}$
• Soit $V_i = \left\{x \,:\, p_i(x) < \frac{r}{c_i - r}\right\} \Longrightarrow V_i$ convexe (car p_i semi-norme) $\Rightarrow B_r$ convexe.
• $0_E \in B_r$.
• Soit $W \in \mathcal{U}_{\mathcal{T}}(0_E) \Rightarrow \exists p_1, \ldots, p_n \in \mathcal{D}$ *t.q.* $\bigcap\limits_{i=1}^{n} \{x \,:\, p_i\,(x) < \delta_i\} \subseteq W \ (\delta_i < 1)$.

Soit $2r < \min\{c_1\, \delta_1, \ldots, c_n\, \delta_n\}$ et $x \in B_r$. Alors $\frac{c_i\, p_i\,(x)}{1+p_i\,(x)} < r < \frac{c_i\, \delta_i}{2}, \quad i = 1, \ldots, n$
$\underset{\delta_i < 1}{\Rightarrow} \ p_i(x) < \delta_i \Rightarrow B_r \subseteq W$.
• B_r équilibré, car p_i semi-norme.

<u>conclusion</u> : $\{B(0,r)\,,\, r > 0\}$ base de voisinages de $\mathcal{U}_d\,(0_E)$ et de $\mathcal{U}_{\mathcal{T}}\,(0_E) \Rightarrow$ topologie induite par d coïncide avec $\mathcal{T} = \mathcal{O}_{\mathcal{D}}$. (Notons l'invariance par translation: $d(x+y, x+z) = d(y,z)$).

(2) $\Rightarrow$ (3) : claire
(3) $\Rightarrow$ (4) : $\left\{B\left(x_0, \frac{1}{n}\right) \,:\, n \in \mathbb{N}\right\} \subseteq \mathcal{U}_d(x_0)$.
(4) $\Rightarrow$ (1) : Soit $\{V_n \,:\, n \in \mathbb{N}\}$ un système fondamental dénombrable de $\mathcal{U}_{\mathcal{T}}(0)$. Notons que $\mathcal{T} = \mathcal{O}_{\mathcal{P}}$.
$\forall\, n \in \mathbb{N}\,,\, \exists\, \varepsilon > 0\,,\, \exists\, p_1^{(n)}, \ldots, p_m^{(n)} \in \mathcal{P}$ *t.q.* $\bigcap\limits_{j=1}^{m_n} \{p_j^{(n)}\,(x) < \varepsilon\} \subseteq V_n \qquad (*)$.

Soit $\mathcal{P}_n = \left\{p_1^{(n)}, \ldots, p_{m_n}^{(n)}\right\} \subseteq \mathcal{P}, \qquad \mathcal{S} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}_n.$
Notons que $\mathcal{S}$ est faiblement séparante. En effet, soit $x_0 \neq 0_E \Longrightarrow \exists n : x_0 \notin V_n \underset{(*)}{\Longrightarrow}$ $p_{j(n)}^{(n)}(x_0) \geq \varepsilon$.
Montrons que la topologie $\mathcal{O}_{\mathcal{S}}$ i.t. engendrée par $\mathcal{S}$ coïncide avec $\mathcal{T}$. Comme $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}$ on a $\mathcal{O}_{\mathcal{S}} \subseteq \mathcal{O}_{P}$. (exo.).
Soit $U_{\varepsilon,p_1,\ldots,p_m} \in \mathcal{O}_{\mathcal{P}}$ et $0_E \in U_{\varepsilon,p_1,\ldots,p_m}$.
Comme $\{V_n \, : \, n \in \mathbb{N}\}$ est un système fondamental de $\mathcal{U}(0_E)$ pour $\mathcal{O}_{\mathcal{P}}$, on trouve un $n \in \mathbb{N}$ *t.q.* $V_n \subseteq U_{\varepsilon,p_1,\ldots,p_m}$

$\overset{(*)}{\Longrightarrow} \exists\, q_j \in \mathcal{S}$ *t.q.* $\bigcap\limits_{j=1}^{N} \{q_j\,(x) < \tilde{\varepsilon}\} \subseteq V_n$

$\Longrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{P}} \subseteq \mathcal{O}_{\mathcal{S}}$.

Conclusion: $\mathcal{T} = \mathcal{O}_{\mathcal{P}} \subseteq \mathcal{O}_{\mathcal{S}}$ ○

- Remarque • On peut remplacer dans (1) $\Rightarrow$ (2) la distance d par

$$d'(x,y) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{p_j(x-y)}{1+p_j\,(x-y)}$$

• Si E est un espace topologique arbitraire, alors, en général, (4) $\not\Rightarrow$ (3).

Définition

Un evt. E est dit *espace de Fréchet* si E est loc. convexe et métrisable par une distance complète.

- Exemple

• chaque espace de Banach est un espace de Fréchet.
• $(C^\infty([0,1]), \mathcal{P})$, $\mathcal{P} = \{p_n \, : \, n \in \mathbb{N}\}$ où $p_n\,(f) = \max\limits_{x\in[0,1]} |f^{(n)}(x)|$ $(n = 0, 1, \ldots)$ est une semi-norme. Notons que $\mathcal{P}$ est faiblement séparante et que d' est une distance complète.
$\mathcal{B} := \{f_0 + \bigcap\limits_{j=1}^{n} \{|p_j\,(f)| < \varepsilon\} \, : \, n \in \mathbb{N}, \varepsilon > 0\}$ base de voisinage de $\mathcal{U}\,(f_0)$; $f_0 \in C^\infty([0,1])$.

$$\mathcal{B} = \left\{\left\{f \in C^\infty([0,1]) \, : \, \max_{x\in[0,1]} \left|f^{(j)}(x) - f_0^{(j)}(x)\right| < \varepsilon\right\}, j = 0, \ldots, n, \, n \in \mathbb{N}, \, \varepsilon > 0\right\}$$

$(C^\infty([0,1]), \mathcal{P})$ est un espace de Fréchet qui n'est pas normable (exo).

Autre exemple: L'espace des fonctions entières muni de la topologie de la convergence compacte: $f_n \underset{compact}{\longrightarrow} f \Longleftrightarrow \forall\, K \subseteq \mathbb{C}, K$ compact, $\max_{z\in K} |f_n(z) - f(z)| \to 0$ pour $n \to \infty$ (exo).

VII - TOPOLOGIE FAIBLE ET FAIBLE-$*$

A - TOPOLOGIE FAIBLE

Définition

Soit $(E\,,\,\|\cdot\|)$ un espace normé. Alors la *topologie faible* $\sigma := \sigma\,(E, E^*)$ est la topologie la plus grossière sur E *t.q.* tous les éléments de E^* soient continus (c'est la topologie initiale sur E associée à E^*).

Remarque

1) $\overset{5.14}{\Longrightarrow}$ $(E, \sigma\,(E, E^*))$ evtlc. et $(E, \sigma)^* = E^*$.

2) $\sigma \subseteq \mathcal{T}_{\|\cdot\|}$ où $\mathcal{T}_{\|\cdot\|}$ est la topologie induite par $\|\cdot\|$ sur E

3) Système fondamental de $\mathcal{U}\,(x_0)$ $\quad (x_0 \in E, f_j \in E^*\,,\, \varepsilon > 0\,,\, n \in \mathbb{N})$:

$$\begin{aligned} x_0 + U_{\varepsilon, f_1, \ldots, f_n} &= \{x \,:\, |f_j\,(x) - f_j\,(x_0)| < \varepsilon\,,\, j = 1, \ldots, n\} \\ &= x_0 + \bigcap_{j=1}^{n} \; \{x \,:\, |f_j(x)| < \varepsilon\} \end{aligned}$$

4) $(x_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ converge faiblement vers x (not.: $x_n \overset{\sigma}{\longrightarrow} x$)
$\Longleftrightarrow$ $f(x_n) \to f(x)\ \forall f \in E^*$.

Proposition 7.1

Soit $(E, \|\cdot\|)$ *espace normé.*

1) si $\dim\, E = \infty$, *alors chaque voisinage* $\widetilde{V}$ *faible de* 0_E *—i.e.* $\widetilde{V} \in \mathcal{U}_\sigma\,(0)$*— contient un sev. de dimension infinie.*

2) $\sigma = \mathcal{T}_{\|\cdot\|} \Leftrightarrow \dim\, E < \infty$

Démonstration

1) - $\dim\, E = \infty$. Soit $V = U_{\varepsilon, f_1, \ldots, f_n} \subseteq \widetilde{V}$, $f_j \in E^*, f_j \not\equiv 0$. Considérons $N = \bigcap\limits_{j=1}^{n}$ $Ker\, f_j \Longrightarrow N \subseteq V \subseteq \widetilde{V}$.
Soit $T \,:\, E \to \mathbb{K}^n$ définie par $T(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$. Alors T est linéaire et $Ker\, T = N$.
Le théorème des isomorphismes implique que E/N est isomorphe à $T(E) \subseteq \mathbb{K}^n$. Donc $\mathrm{codim} N = \dim\, T(E) \leq n < \infty$. Comme $dim E = \infty$, on obtient $\dim N = \infty$.

2) Soit $r \in]0, +\infty]$. Comme chaque boule $B(0, r)$ contenant un sev. coïncide avec E , on voit avec 1) que $\sigma \subset \mathcal{T}_{\|\cdot\|}$ si $\dim\, E = \infty$.
Soit $\dim\, E = n$ et $\{x_1\,, \ldots, x_n\}$ base algébrique de E. Ainsi $x \in E \Rightarrow x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j\, x_j \quad (\alpha_j \in \mathbb{K})$.
Soit $f_j(x) = \alpha_j \quad (j = 1, \ldots, n)$. Notons que les coefficients α_j sont déterminés de façon unique. Ainsi f_j est bien défini et $f_j \in E^*$.
Soit $U = \bigcap\limits_{j=1}^{n} \; \{x \in E \,:\, |f_j(x)| < 1\} \Longrightarrow U \in \sigma$ et $U = \bigcap\limits_{j=1}^{n} \; \{x \in E \,:\, |\alpha_j| < 1\}$. Donc U est la boule unité pour la norme $\|\cdot\|_\infty$, donnée par $\|x\|_\infty = \max\limits_j\, |\alpha_j|$.
Comme $\|\cdot\|$ est équivalente à $\|\cdot\|_\infty$, il existe $\delta > 0$ tq $\delta\, U \subseteq B_{\|\cdot\|}\,(0, 1)$
$\underset{\text{i.t.}}{\Rightarrow}$ $\mathcal{T}_{\|\cdot\|} \subseteq \sigma$. Par définition, $\sigma \subseteq \mathcal{T}_{\|\cdot\|}$. Donc $\mathcal{T}_{\|\cdot\|} = \sigma$. $\bigcirc$

Remarque Soit $(E\,,\,\|\cdot\|)$ un espace normé de dimension infinie. Alors d'après 7.1(1), l'intérieur faible de la boule unité $B(0, 1)$ est $\emptyset$.

Proposition 7.2
$(E\,,\,\|\cdot\|)$ espace-normé, $C\subseteq E$ convexe. Alors $\overline{C}^w=\overline{C}$, où $\overline{C}^w$ est l'adhérence faible de C.

Démonstration
Soit $\sigma=\sigma\,(E,E^*)$ la topologie faible sur E. $\overline{C}^w$ σ-fermé $\Rightarrow E\setminus\overline{C}^w$ σ-ouvert

$\Rightarrow\ E\setminus\overline{C}^w\quad\mathcal{T}_{\|\cdot\|}$-ouvert $\Rightarrow\overline{C}^w$-fermé pour $\mathcal{T}_{\|\cdot\|}$. Ainsi $\overline{C}\subseteq\overline{C}^w$
(notons que $\overline{C}$ est le plus petit fermé qui contient C)

Soit $x_0\in E\setminus\overline{C}$. $Mq\ \ x_0\notin\overline{C}^w$. Utilisons le 2ème théorème de séparation pour l'evtlc $(E\,,\,\|\cdot\|)$, $A=\{x_0\},B=\overline{C}$. Notons que C convexe $\overset{5.3}{\Longrightarrow}\overline{C}$ convexe.

$\overset{5.9}{\Rightarrow}\ \exists\,f\in E^*=\ (E,\sigma)^*\ ,\ \exists\,\gamma\in\mathbb{R}\,:\,\forall\,x\in\overline{C}$

$$Re\,f(x_0)<\gamma<Re\,f(x)$$

Soit $U=\{x\in E\,:\,Re\,f(x)<\gamma\}\Rightarrow U\quad\sigma$-ouvert car $f\in(E,\sigma)^*$.
Comme $x_0\in U$ et que $U\cap\,C=\emptyset$, on a $x_0\notin\overline{C}^w$. Ainsi $\overline{C}^w\subseteq\overline{C}$.
Conclusion: $\overline{C}=\overline{C}^w$. ○

Corollaire 7.3
E espace normé $((E\,,\,\|\cdot\|))$, $C\subseteq E$ convexe. Sont équivalentes :

1) $C\quad\|\cdot\|$-fermé
2) $C\qquad\sigma$-fermé.

Démonstration clair

Remarque En particulier, la boule $\overline{B}(0,1)=\{x\in E\,,\,\|x\|\le 1\}$ est faiblement fermée.

Théorème 7.4 (Mazur)
Soit $(E\,,\,\|\cdot\|)$ espace normé et $x_n\overset{w}{\to}x$ (convergence faible). Alors il existe des combinaisons convexes y_k de x_n i.e.
$y_k=\sum_{j=1}^{n_k}\alpha_j^{(k)}x_j\,,\ \sum_{j=1}^{n_k}\alpha_j^{(k)}=1\ ,\ \alpha_j^{(k)}\ge 0\quad tq\quad y_k\overset{\|\cdot\|}{\longrightarrow}x.$

Démonstration
Soit H l'enveloppe convexe de $\{x_1,x_2,\cdots\}$. Hyp.: $x\in\overline{H}^w\overset{7.2}{=}\overline{H}\Rightarrow\ \exists\,(y_k)\in H^{\mathbb{N}}$ *t.q.* $y_k\overset{\|\cdot\|}{\longrightarrow}x$.

Lemme 7.5
Soit E espace vectoriel, $\mathcal{F}\subseteq l\,(E,\mathbb{K})$, $\mathcal{F}$ sev séparant, et $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ la topologie initiale sur E induite par $\mathcal{F}$.
Alors $(E,\mathcal{T}_{\mathcal{F}})$ est métrisable $\Leftrightarrow\dim\mathcal{F}$ est au plus dénombrable

Démonstration
"$\Leftarrow$" $\{u_n\,:\,n\in\mathbb{N}\}$ base algébrique de $\mathcal{F}$; $u\in\mathcal{F}\Rightarrow\exists\,\alpha_j\in\mathbb{K}$ *t.q.* $u=\sum\limits_{j=0}^{n}\alpha_j\,u_j$.
Les α_j sont déterminés de façon unique. Soit $p_n(x)\,:=|u_n\,(x)|\,,\,n\in\mathbb{N}\,,\,x\in E\Rightarrow p_n$

semi-norme sur E. $\mathcal{F}$ séparante $\Longrightarrow \mathcal{S} = \{p_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ faiblement séparante. $\mathcal{S}$ engendre la topologie $\mathcal{T}_\mathcal{F}$ car:

- $x_0 + \bigcap\limits_{j=1}^{n} \{|p_j| < \varepsilon\}$ élément d'un système fondamental de $\mathcal{U}(x_0)$ pour la topologie $\mathcal{O}_\mathcal{S}$.
- $\mathcal{O}_\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}_\mathcal{F}$ car chaque p_j est $\mathcal{T}_\mathcal{F}$-continue, donc $\{|p_j| < \varepsilon\}$ $\mathcal{T}_\mathcal{F}$-ouvert.
- $\mathcal{T}_\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}_\mathcal{S}$, car : $u \in \mathcal{F} \underset{(x\in E)}{\Longrightarrow} u\,(x) = \sum\limits_{j=0}^{n} \alpha_j\, u_j\,(x)$

$$\Rightarrow \ |u\,(x)| \leq \overbrace{\sum_{j=0}^{n} |\alpha_j|}^{:=c} \max_{1\leq j\leq n} |u_j(x)| = c \max_{1\leq j\leq n} p_j(x)$$

$$\Rightarrow \bigcap\nolimits_{j=1}^{n}\{|p_j| < \varepsilon/c\} \subseteq \{|u| < \varepsilon\} \Longrightarrow \{|u| < \varepsilon\} \in \mathcal{U}_{\mathcal{O}_\mathcal{S}}(0) \Longrightarrow \mathcal{U}_{\mathcal{T}_\mathcal{F}}(0) \subseteq \mathcal{U}_{\mathcal{O}_\mathcal{S}}(0).$$

Comme $\mathcal{O}_\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}_\mathcal{F}$ sont invariantes par translation, et que les systèmes de voisinages déterminent de façon unique une topologie, on a $\mathcal{O}_\mathcal{S} = \mathcal{T}_\mathcal{F}$.

Donc $\mathcal{T}_\mathcal{F}$ est engendrée par une famille dénombrable de semi-normes $\overset{6.5}{\Longrightarrow}$ $\mathcal{T}_\mathcal{F}$ métrisable.

"$\Rightarrow$" Soit $\mathcal{T}_\mathcal{F}$ métrisable. Notons que d'après 5.14, $(E, \mathcal{T}_\mathcal{F})$ est un evtlc et que $\mathcal{T}_\mathcal{F} = \mathcal{O}_{\{|u|:u\in\mathcal{F}\}}$.
6.5 $\Longrightarrow$ $\exists$ famille $\mathcal{D}$ dénombrable et faiblement séparante de semi-normes continues *t.q.* $\mathcal{T}_\mathcal{F} = \mathcal{O}_\mathcal{D}$ et $\mathcal{D} \subseteq \{|u| \ : \ u \in \mathcal{F}\}$. Donc $\mathcal{D} = \{|u_n| \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ $\ (u_n \in \mathcal{F})$.
Montrons que Vect $\{u_n \ : \ n \in \mathbb{N}\} = \mathcal{F}$. Pour cela, soit $u \in \mathcal{F}$.
Comme $\{|u| < \varepsilon\}$ est $\mathcal{T}_\mathcal{F}$-ouvert $\underset{\text{déf. } \mathcal{O}_\mathcal{D}}{\overset{\mathcal{T}_\mathcal{F}=\mathcal{O}_\mathcal{D}}{\Longrightarrow}}$ $\exists\, u_j$ $(j = 1, \cdots, n)$, $|u_j| \in \mathcal{D}$ *t.q.* $\bigcap\limits_{j=1}^{n}$ $\{|u_j| < \varepsilon_j\} \subseteq \{|u| < \varepsilon\}$. Notons que $n = n\,(\varepsilon)\,,\, \varepsilon_j = \varepsilon_j\,(\varepsilon))$.

Soit $u_j(x) = 0 \ \forall j \in \{1, \cdots, n\}$ $\ \Rightarrow |u_j|(x) < \varepsilon_j \Longrightarrow |u(x)| < \varepsilon$. De plus, en remplaçant x par αx, on a $\forall \alpha$:

$$|\alpha|\ |u(x)| < \varepsilon \qquad \Rightarrow u(x) = 0 \quad \Rightarrow \ Ker\, u \supseteq \bigcap_{1}^{n} Ker\, u_j$$

$$\overset{5.13}{\Rightarrow} u \in \text{Vect}\,\{u_1, \ldots, u_n\}$$

Il existe un sous-système libre maximal de $\{u_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$. Celui-ci est une base algébrique de $\mathcal{F}$. ○

Proposition 7.6
$(E\,,\,\|\cdot\|)$ espace normé, $\sigma = \sigma\,(E, E^*)$ topologie faible. Alors (E, σ) métrisable $\Longleftrightarrow$ dim $E < +\infty$

Démonstration
"$\Leftarrow$" dim $E < \infty \overset{7.1}{\Longrightarrow} \sigma = \mathcal{T}_{\|\cdot\|} \Longrightarrow (E, \sigma)$ métrisable.

"$\Rightarrow$" σ métrisable $\overset{7.5}{\Longleftrightarrow}$ dim E^* au plus dénombrable (notons que $\mathcal{F} := E^* \subseteq l\,(E, \mathbb{K})$ est séparante : cf. théorème de Hahn-Banach, corollaire 1.9).
E^* est un espace de Banach; donc espace métrique complet. Supposons que $\{x_1^*\,, x_2^* \cdots,\}$ soit une base algébrique dénombrable (fini ou non) de E^*. Soit $F_n =$ Vect $\{x_1^*, \cdots, x_n^*\} \Longrightarrow E^* = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$. En plus, dim $F_n = n < +\infty$; donc F_n

complet $\Longrightarrow F_n$ fermé dans E^*
$\overset{\text{Baire}}{\Longrightarrow} \quad \exists\, n_0 \,:\, (F_{n_0})^0 \neq \emptyset$.

Ainsi on a trouvé un sev. V de E^* de dimension finie t.q. $V^0 \neq \emptyset \Rightarrow V = E^*$ et $\dim E^* < \infty \underset{\text{H.B.}}{\Longrightarrow} \dim\, E < +\infty$. ○

B - Topologie faible-$*$

E espace normé, E^* espace de Banach, $E^{**} := (E^*)^*$ l'espace normé des formes linéaires continues sur E^*. Immergeant E dans E^{**}:
Soit $x \in E$, considérons

$$\Phi_x \,:\, \begin{cases} E^* \to \mathbb{K} \\ x^* \mapsto \Phi_x(x^*) \,:= x^*\,(x) =< x, x^* >. \end{cases}$$

$\Rightarrow\;\; \Phi_x$ linéaire et continue car:
$|\Phi_x\,(x^*)| = |x^*(x)| \leq \|x^*\|\;\|x\| \quad \forall\, x^* \in E^* \;\Rightarrow\;\; \|\Phi_x\| \leq \|x\|$.
On a même $\|\Phi_x\| = \|x\|$. En effet, $\|\Phi_x\| = \sup\limits_{\|x^*\|=1} \;|\Phi_x\,(x^*)| =$
$= \sup\limits_{\|x^*\|=1} \;|x^*(x)| \overset{(\leq)}{\underset{9.9}{=}} \|x\|$
(Hahn-Banach$\Longrightarrow \exists\, x^* \in E^*$ $t.q.$ $x^*\,(x) = \|x\|\,, \|x^*\| = 1$ si $x \neq 0$.)
Soit $J_E \,:\, \{E \to E^{**} x \mapsto \Phi_x \Longrightarrow J_E$ injective et linéaire car:

$\Phi_x = 0 \Rightarrow \Phi_x\,(x') = 0 \quad \forall\, x' \in E^*$
$\Rightarrow\;\; x'(x) = 0 \quad \forall\, x' \in E^* \overset{9.9}{\Rightarrow} x = 0 (E^*$ séparante)
$\Rightarrow\;\; Ker\;\, J_E = \{0\}$.

$\|J_E\,(x)\| = \|\Phi_x\| = \|x\| \Rightarrow J_E$ isométrie.

<u>conclusion</u> : J_E est un homomorphisme isométrique; donc E peut être considéré comme un sous-espace normé de E^{**}, (procédé d' immergement de E dans son bidual topologique).

Remarque

1) en général, $J_E\,(E)$ n'est pas fermé dans E^{**}; mais si E est un espace de Banach, alors $J_E(E)$ est complet(car J_E isométrie), donc fermé dans E^{**}.

2) J_E n'est pas surjective en général.

3) On a $< x^*, J_E x > = < x, x^* > \;\; \forall x \in E, x^* \in E^*$ et $\Phi_x = J_E x$.

Définition

On dit q'un espace normé est *réflexif* si J_E est surjective.

Notons que ceci implique que E est complet.

Définition E espace normé, E^* son dual topologique. La topologie la plus grossière sur E^* $t.q.$ toutes les formes linéaires $\Phi_x\,(x \in E)$ soient continues est appelée la *topologie faible-$*$* (sur E^*). Notation : $\sigma^* := \sigma\,(E^*\,,\,E)$.

Remarque

1) σ^* est donc la topologie initiale sur E^* induite par la famille $\{\Phi_x \,:\, x \in E\} := \mathcal{F}$. Notons que $\mathcal{F} = J_E\,(E) \subseteq E^{**}$ est un sev. de E^{**}.
2) 5.14 $\Rightarrow$ $(E^*\,,\,\sigma^*)$ evtlc:
(car $\mathcal{F}$ séparante : $x' \neq y' \in E^*$, supposons que $\forall\, x \in E \,:\, \Phi_x\,(x') = \Phi_x\,(y') \Rightarrow x'(x) = y'(x) \quad \forall\, x \in E$
$\Rightarrow\; x' = y'$
3) De plus, $(E^*\,,\,\sigma^*)^* = \mathcal{F} = J_E\,(E)$.
4) éléments d'une base topologique de σ^*:

$$U_{\varepsilon, x_1, \dots, x_n}(x_0^*) = x_0^* + \bigcap_{j=1}^{n} \{x^* \in E^* \,:\, |\Phi_{x_j}\,(x^*)| < \varepsilon\} =$$

$$= x_0^* + \bigcap_{j=1}^{n} \{x^* \in E^* \,:\, | < x_j, x^* > | < \varepsilon\} =$$

$$= \bigcap_{j=1}^{n} \{x^* \in E^* \,:\, |(x^* - x_0^*)(x_j)| < \varepsilon\}.$$

6) on a ces trois topologies loc. convexes sur E^* :

$$\underbrace{\sigma\,(E^*\,,\,E)}_{\substack{\text{topo. faible-}*\\ \text{sur } E^*}} \subseteq \underbrace{\sigma\,(E^*\,,\,E^{**})}_{\substack{\text{topo. faible}\\ \text{sur} E^*}} \subseteq \mathcal{T}_{\|\cdot\|_{E^*}}.$$

- *Rappel* **Lemme/théorème de Riesz**
Soit E un espace normé. Alors la boule unité $\{\|x\| \leq 1\}$ est compacte $\Longleftrightarrow$ $\dim E < +\infty$ Voir cours DEUG 2 ou licence).

Lemme 7.7
$B^* = \{x' \in E^* \,:\, \|x'\|_{E^*} \leq 1\}$ *est σ^*-fermée dans E^*.*

Démonstration
Montrons que $E^* \setminus B^*$ est σ^*-ouvert. Soit $\|x'\| > 1$, disons $\|x'\| = 1 + \delta\,,\, \delta > 0$
$\Rightarrow\; \exists\, x_0 \in E\,,\, \|x_0\| = 1 \quad t.q. \quad |x'(x_0)| > 1 + \frac{\delta}{2}$

$$U := U_{\frac{\delta}{4}, x_0} = \left\{x^* \in E^* \,:\, |x^*\,(x_0)| < \frac{\delta}{4}\right\} \Rightarrow U \in \sigma^*$$

On a $x' + U \subseteq E^* \setminus B^*$!! En effet, soit $z' \in x' + U \Rightarrow \exists\, y' \in U \;\; t.q. \;\; z' = x' + y'$

$$\Rightarrow\; \|z'\| = \sup_{\substack{x \in E\\ \|x\|=1}} |z'(x)| \geq |z'(x_0)| \geq |x'(x_0)| - |y'(x_0)| \geq$$

$$\geq 1 + \delta/2 - \delta/4 = 1 + \delta/4 > 1.$$

○

Théorème 7.8 : théorème d'Alaoglu-Bourbaki
E espace normé; alors la boule unité $B^* = \{x' \in E^* \,:\, \|x'\| \leq 1\}$ est σ^*-compacte.

Démonstration

Construisons un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ compact, T_2, tel que

(1) $B^* \subseteq X$, B^* $\mathcal{T}$-fermé (donc $\mathcal{T}$-compact) et

(2) $\mathcal{T}|_{B^*} = \sigma^*|_{B^*}$

(dans ce cas B^* sera σ^*-compact).

Soit $x' \in B^* \Rightarrow |x'(x)| \leq \underbrace{\|x'\|}_{\leq 1} \|x\| \leq \|x\| \quad \forall\, x \in E$

Soit $\mathcal{D}_x = \{\alpha \in \mathbb{K} : |\alpha| \leq \|x\|\} \Rightarrow \mathcal{D}_x$ compact dans $\mathbb{K}$.

Soit $X := \prod_{x \in E} \mathcal{D}_x = \{g : E \to \mathbb{K}\ \ t.q.\ \ \forall\, x \in E : |g(x)| \leq \|x\|\}$

$\Longrightarrow B^* \subseteq X$

$\overset{\text{Tychonov}}{\Longrightarrow}$ $(X, \mathcal{T})$ compact, où $\mathcal{T}$ est la topologie du produit.

• $(X, \mathcal{T})$ esp. T2, car $\mathcal{D}_x$ esp. $T2$ pour tout x.

• *Démonstration de (2)*

• $f \in B^*$, $\varepsilon > 0$, $x_1, \ldots, x_n \in E$,

$U_{\varepsilon, x_1, \ldots, x_n}(f) = \bigcap_{j=1}^{n} \{x' \in E^* : |x'(x_j) - f(x_j)| < \varepsilon\}$

élément de base pour σ^*.

$V_{\varepsilon, x_1, \ldots, x_n}(f) = \bigcap_{j=1}^{n} \{g \in X : |g(x_j) - f(x_j)| < \varepsilon\}$

élément de base pour $\mathcal{T}$.

On obtient:

$V_{\varepsilon, x_1, \ldots, x_n}(f) \cap B^* \overset{!}{=} U_{\varepsilon, x_1, \ldots, x_n}(f) \cap B^*$.

• Montrons que B^* est $\mathcal{T}$-fermée.

Soit $f \in \overline{B^*}^{\mathcal{T}} \subseteq X$. Montrons que $f \in B^*$.

(i) f est linéaire : $x_1, x_2 \in E$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $x_3 := \alpha\, x_1 + \beta\, x_2$. Montrons que $f(x_3) - \alpha\, f(x_1) - \beta\, f(x_2) = 0$ (*)

En effet soit $\varepsilon > 0$, $V_{\varepsilon, x_1, x_2, x_3}(f) \in \mathcal{T}$, $f \in \overline{B^*}^{\mathcal{T}}$

$\Rightarrow\ \exists\, f_\varepsilon \in V_{\varepsilon, x_1, x_2, x_3}(f) \cap B^* \neq \emptyset$

$\Rightarrow\ |f(x_3) - \alpha\, f(x_1) - \beta\, f(x_2)| \underset{f_\varepsilon\ lin}{=}$

$= \Big| f(x_3) - f_\varepsilon(x_3) - \alpha\,(f(x_1) - f_\varepsilon(x_1)) - \beta(f(x_2) - f_\varepsilon(x_2)) \Big|$

$\leq |f(x_3) - f_\varepsilon(x_3)| + |\alpha|\ |f(x_1) - f_\varepsilon(x_1)| + |\beta|\ |f(x_2) - f_\varepsilon(x_2)|$

$\leq \varepsilon + |\alpha|\, \varepsilon + |\beta|\, \varepsilon = \varepsilon\,(1 + |\alpha| + |\beta|)$

$\varepsilon \to 0 \Rightarrow (*)$.

(ii) $\|f\| \leq 1$. En effet, soit $x \in E$, $\|x\| \leq 1$. Montrons que $|f(x)| \leq 1$. Pour cela, soit $\varepsilon > 0 \Rightarrow V_{\varepsilon, x}(f) \in \mathcal{T}$, $f \in \overline{B^*}^{\mathcal{T}} \Rightarrow V_{\varepsilon, x}(f) \cap B^* \neq \emptyset$

$\Rightarrow\ \exists\, f_\varepsilon \in V_{\varepsilon, x}(f) \cap B^* \quad \Longrightarrow\ |f_\varepsilon(x) - f(x)| \leq \varepsilon$.

Comme $\|f_\varepsilon\| \leq 1$ on a :

$$|f(x)| \leq |\underbrace{f(x) - f_\varepsilon(x)}_{\leq \varepsilon}| + |\underbrace{f_\varepsilon(x)}_{\leq \|f_\varepsilon\| \leq 1}| \leq \varepsilon + 1$$

$\varepsilon \to 0 \quad \Rightarrow |f(x)| \leq 1.$ ○

Lemme 7.9 *Soient $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ deux topologies sur $X \neq \emptyset$. Supposons que $(X, \mathcal{T}_1)$ soit T2 et $(X, \mathcal{T}_2)$ compact. Alors $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$.*

Dém. Soit F fermé dans $(X, \mathcal{T}_2) \underset{(X,\mathcal{T}_2) \text{ comp.}}{\Longrightarrow}$ F est $\mathcal{T}_2$-compact $\underset{\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2}{\Longrightarrow}$ F est $\mathcal{T}_1$-compact . $(X, \mathcal{T}_1)$ esp. T2 $\Longrightarrow F$ $\mathcal{T}_1$-fermé. Donc $\mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{T}_1$ et ainsi $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$. ○

Soit $x \in E, x^* \in E^*$. Alors $(x, x^*) := x^*(x)$.

Théorème 7.10 *Soit E un espace normé séparable et soit $K \subseteq E^*$ σ^*-compact. Alors (K, σ^*) est métrisable.*

Dém. Soit $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ un ensemble dénombrable dense dans E. Pour $x^* \in E^*$ posons $f_n(x^*) := (x_n, x^*)$. Alors $f_n : (E^*, \sigma^*) \to \mathbb{K}$ est linéaire et σ^*-continue. La famille $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ sépare les points de E^*. En effet, Soit$f_n(x^*) = f_n(y^*)$ $\forall n$. Alors $(x_n, x^*) = (x_n, y^*)$ $\forall n$. Comme $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans E, et que x^*, y^* sont $\big((E, \|\cdot\|), \mathbb{K}\big)$-continues, $(x, x^*) = (x, y^*)$ $\forall x \in E$. Ainsi $x^* = y^*$.
Considérons sur $K \times K$ la fonction

$$d(x^*, y^*) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|f_k(x^*) - f_k(y^*)|}{1 + |f_k(x^*) - f_k(y^*)|}.$$

$\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ séparante $\Longrightarrow d$ définie positive. Ainsi d est une distance sur K. Dû à la convergence uniforme, f_n σ^*-continue implique que d est continue sur $K \times K$ muni avec la topologie $\sigma^* \times \sigma^*$. Ainsi $\forall x_0^*$ et $\varepsilon > 0$, $\{x^* \in K : d(x^*, x_0^*) < \varepsilon\}$ est σ^*-ouvert $\Longrightarrow \mathcal{T}_d \subseteq \sigma^*|_K$. $\mathcal{T}_d$ topologie T2, $(K, \sigma^*|_K)$ compact, T2 $\underset{7.9}{\Longrightarrow} \mathcal{T}_d = \sigma^*|_K$.
○

Théorème 7.11 Alaoglu-Boubarki pour esp. séparables
Soit E un espace normé séparable. Alors $B^* = \{x^* \in E^* : \|x^*\| \leq 1\}$ est séquentiellement σ^*-compact, i.e. $\forall (x_n^*) \in E^*$, $\|x_n^*\| \leq 1$, $\exists (x_{n_k}^*)$ et $x^* \in B^*$ tq $x_{n_k}^* \xrightarrow{\sigma^*} x^*$, donc $(x, x_{n_k}^*) \to (x, x^*)$ $\forall x \in E$.

Dém. Claire d'après 7.10 et 7.8.

VIII - ESPACES RÉFLEXIFS

Soit E un espace de Banach et $J : E \to E^{**}$ l'immergement canonique. Notation: Soit $x \in E, x^* \in E^*$. Alors $(x, x^*) := x^*(x)$. De même pour la dualité entre E^* et E^{**}. Donc J est définie par $(x^*, Jx) = (x, x^*)$. On rappelle que E est réflexif si J est une surjection.

Proposition 8.1 *Soit E un espace normé. Supposons que E^* soit séparable. Alors E est séparable.*

Dém Comme chaque partie d'un espace séparable est séparable (exo), on voit que $S^* = \{x^* \in E^* : \|x^*\| = 1\}$ est séparable. Soit $M^* = \{x_n^* : n \in \mathbb{N}\}$ un ensemble dense dans S^*.

Choisir $x_n \in E$ tq $\|x_n\| = 1$ et $|(x_n, x_n^*)| \geq 1/2 \qquad (1)$.

Soit $F = \text{Vect}\,\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Montrons que F est dense dans E. En effet, supposons qu'il existe $x^* \in E^*$ tq $x^*|_F \equiv 0$ et $\|x^*\| = 1$. Choisir $x_{n_0}^* \in M^*$ tq $\|x_{n_0}^* - x^*\| < 1/2$.

Alors d'après (1):

$1/2 > \|x_{n_0}^* - x^*\| \geq |(x_{n_0}, x_{n_0}^* - x^*)| \underset{x*|_F \equiv 0}{=} |(x_{n_0}, x_{n_0}^*)| \geq 1/2$. Contradiction.

F dense dans $E \Longrightarrow E$ séparable. ○

Proposition 8.2 *Soit E réflexif et $M \subseteq E$ un sev fermé de E. Alors M est réflexif.*

Dém. Soit $x^* \in E^*$. Posons $x_M^* := x^*|_M$. Alors $x_M^* \in M^*$. Soit $m_0^{**} \in M^{**}$. Définir x_0^{**} par $(x^*, x_0^{**}) := (x_M^*, m_0^{**})$, où $x^* \in E^*$.

Alors x_0^{**} est linéaire et

$|(x^*, x_0^{**})| \leq \|m_0^{**}\|\,\|x_M^*\| \leq \|m_0^{**}\|\,\|x^*\|$.

Donc $x_0^{**} \in E^{**}$. E réflexif $\Longrightarrow$ $\exists m_0 \in E$ tq $(x^*, x_0^{**}) = (m_0, x^*)$ $\forall x^* \in E^*$. Montrons que $m_0 \in M$. Pour cela, soit $x^* \in E^*$ tq $x^*|M \equiv 0$. Alors $x_M^* = 0$ et ainsi $(m_0, x^*) = (x^*, x_0^{**}) = (\underbrace{x_M^*}_{=0}, m_0^{**}) = 0$. D'après Hahn-Banach $m_0 \in \overline{M} = M$.

Montrons que $J_M m_0 = m_0^{**}$. Soit $m^* \in M^*$ et x^* un prolongement linéaire continue de m^* sur E (Hahn-Banach). Alors $(m^*, m_0^{**}) = (x^*|_M, m_0^{**}) = (x^*, x_0^{**}) = (m_0, x^*) \underset{m_0 \in M}{=} (m_0, m^*) = (m^*, J_M m_0)$. Donc $J_M m_0 = m_0^{**}$. Ainsi $J_M : M \to M^{**}$ est surjective, i.e M est réflexif. ○

Proposition 8.3 *Soit E un espace de Banach. Alors E réflexif $\Longleftrightarrow$ E^* réflexif.*

Dém. "$\Longrightarrow$": Soit $J_0 : E \to E^{**}$ l'immergement canonique, donc $(x^*, J_0 y) = (y, x^*)$ $\forall y \in E, x^* \in E^*$.

De même: $J_1 : E^* \to E^{***}$, $(x^{**}, J_1 y^*) = (y^*, x^{**}); \forall y^* \in E^*, x^{**} \in E^{**}$. A montrer: J_0 surjectif $\Longrightarrow$ J_1 surjectif.

Soit $x^{***} \in E^{***}$. Définir $x^* : E \to \mathbb{K}$ par $(x, x^*) := (J_0 x, x^{***})$, $x \in E$. Alors x^* est bien définie, linéaire (claire) et continue car:

$|(x, x^*)| = |(J_0 x, x^{***})| \leq \|x^{***}\|\,\|J_0 x\| \underset{J_0 isom.}{=} \|x^{***}\|\,\|x\|$.

On a $J_1 x^* = x^{***}$ car: J_0 surjectif $\Longrightarrow$ $\forall y^{**} \in E^{**}$ $\exists y \in E$ tq $y^{**} = J_0 y \Longrightarrow$ $(y^{**}, x^{***}) = (J_0 y, x^{***}) \underset{\text{déf}_{x^*}}{=} (y, x^*) \underset{\text{déf}_{J_0}}{=} (x^*, J_0 y) \underset{\text{déf}_y}{=} (x^*, y^{**}) \underset{\text{déf}_{J_1}}{=} (y^{**}, J_1 x^*)$.

"$\Longleftarrow$ " Supposons que E ne soit pas réflexif $\Longrightarrow$ $J_0(E) \subsetneq E^{**}$.

E complet, J_0 isométrie $\Longrightarrow$ $J_0(E)$ complet et ainsi fermé dans E^{**}. Hahn-Banach $\Longrightarrow \exists\, L \in E^{***}$ tq $L|_{J_0(E)} \equiv 0$ et $L \neq 0$. $\qquad$ (*)

Montrons que $L \notin J_1(E^*)$. Sinon, $\exists y^* \in E^*$ tq $L = J_1 y^*$

$\Longrightarrow\ \forall x \in E:\ y^*(x) = (x, y^*) \underset{\text{déf}J_0}{=} (y^*, J_0x) \underset{\text{déf}J_1}{=} (\underbrace{J_0x}_{\in E^{**}}, \underbrace{J_1y^*}_{\in E^{***}}) = (J_0x, L) \underset{(*)}{=}$ $0 \Longrightarrow y^* = 0 \Longrightarrow L = 0$. Contradiction.

Donc $J_1(E^*) \underset{\neq}{\subseteq} E^{***}$. Ainsi J_1 n'est pas surjectif, donc E^* pas réflexif. ○

Proposition 8.4. *Soit F un espace réflexif et soit T un isomorphisme homéomorphique entre un espace normé E et F. Alors E est réflexif.*
Dém. Exo.

On va maintenant caractériser les espaces normés pour lesquels la boule unité est faiblement compact.

Lemme 8.5 *Soit E espace normé et $J : E \to E^{**}$ l'immergement canonique. Alors J est un homéomorphisme linéaire entre $(E, \sigma(E, E^*))$ et un sev dense de $(E^{**}, \sigma(E^{**}, E^*))$. Si E est réflexif, i.e. si J est surjectif, alors J est un homéomorphisme linéaire entre $(E, \sigma(E, E^*))$ et $(E^{**}, \sigma(E^{**}, E^*))$.*

Dém.
Soit $\sigma_1 := \sigma(E, E^*)$ la topologie faible sur E et $\sigma_2 := \sigma(E^{**}, E^*)$ la topologie faible-étoile sur E^{**}.

(1) système fondamental de voisinages de 0_E par rapport à σ_1:
$U_{\sigma_1} = \bigcap_{j=1}^N \{x \in E : |(x, x_j^*)| < \varepsilon\},\ x_j^* \in E^*$.
système fondamental de voisinages de $0_{E^{**}}$ par rapport à σ_2:
$U_{\sigma_2} = \bigcap_{j=1}^N \{x^{**} \in E^{**} : |(x_j^*, x^{**})| < \varepsilon\},\ x_j^* \in E^*$.
D'après la définition de J: $(x^*, Jx) = (x, x^*)$. Donc $J(U_{\sigma_1}) = U_{\sigma_2} \cap J(E)$. Donc J est une application ouverte de (E, σ_1) sur $(J(E), \sigma_2|_{J(E)})$. Comme J est injective, $J^{-1} : J(E) \to E$ est $\Big((J(E), \sigma_2|_{J(E)}), (E, \sigma_1)\Big)$-continue. Evidemment J est continue.
(2) Montrons que $J(E)$ est σ_2-dense dans E^{**}.
5.14 $\Longrightarrow$ (E^{**}, σ_2) evtlc. Soit $f : E^{**} \to \mathbb{K}$ linéaire, σ_2-continue et $f|_{J(E)} \equiv 0$. 5.14 $\Longrightarrow \exists\ x_f^*$ *tq* $f(x^{**}) = (x_f^*, x^{**})$. Donc $(x_f^*, x^{**}) = 0\ \forall x^{**} \in J(E)$. Ainsi $0 = (x_f^*, Jx) = (x, x_f^*)\ \forall x \in E$. Donc $x_f^* = 0$ et ainsi $f \equiv 0 \underset{5.11}{\Longrightarrow} J(E)$ dense dans (E^{**}, σ_2).

Le reste est claire. ○

8.6 Lemme de Goldstine

Soit E un espace normé. Alors $J(B)$ est $\sigma(E^{**}, E^*)$-dense dans B^{**}.

Dém. 7.7 $\Longrightarrow B^{**}$ est $\sigma(E^{**}, E^*)$-fermé dans E^{**} (1).
J isométrie $\Longrightarrow J(B) \subseteq B^{**}$ (2).
(1)(2) $\Longrightarrow \overline{J(B)}^{\sigma(E^{**}, E^*)} \subseteq B^{**}$. Notons que cet ensemble est convexe. Supposons que cette inclusion soit stricte. Soit $x_0^{**} \in B^{**} \setminus \overline{J(B)}^{\sigma(E^{**}, E^*)} \underset{\text{th. sép. } 5.9}{\overset{2^{me}}{\Longrightarrow}} \exists$ forme linéaire $f : (E^{**}, \sigma(E^{**}, E^*)) \to \mathbb{K}$ continue, tq $\mathrm{Re} f(x_0^{**}) < \gamma < \mathrm{Re}\ f(x^{**})\ \forall x^{**} \in \overline{J(B)}^{\sigma(E^{**}, E^*)}$. 5.14 $\Longrightarrow \exists\ x_0^* \in E^*$ *tq* $f(x^{**}) = (x_0^*, x^{**})$. S.p.g. $\|x_0^*\| = 1$ (sinon

remplacer γ par $\gamma/\|x_0^*\|$.) Alors $\forall\, x^{**} \in B^{**}$:

$|\text{Re }(x_0^*, x^{**})| \leq |(x_0^*, x^{**})| \leq \|x_0^*\|\, \|x^{**}\| \leq 1 \cdot 1 = 1$.

Donc $-1 < \gamma < 1$. Ainsi $-1 < \gamma < \text{Re }(x_0^*, Jx) = \text{Re }(x, x_0^*)\ \forall x \in B$. Contradiction au fait que $]-1, 1[\, \subseteq x_0^*(B)$ resp. $\mathbb{D} \subseteq x_0^*(B)$ dans le cas complexe. ○

Théorème 8.7 théorème de Banach-Kakutani

E espace normé, $B = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$. Alors B est $\sigma(E, E^*)$-compacte $\iff$ E réflexif.

Dém. "$\Longleftarrow$" Soit E réflexif $\underset{8.5}{\Longrightarrow}$ $J : (E, \sigma(E, E^*)) \to (E^{**}, \sigma(E^{**}, E^*))$ est un homéomorphisme linéaire.

$J(E) = E^{**} \Longrightarrow J(B) = B^{**}$, car, soit $x^{**} \in B^{**}$, alors $\exists x \in E$ *tq* $J(x) = x^{**}$. J isométrie $\Longrightarrow \|x\| = \|x^{**}\| \Longrightarrow x \in B \Longrightarrow B^{**} \subseteq J(B) \underset{J \text{ isom.}}{\subseteq} B^{**}$.

Alaoglu-Bourbaki (7.8) $\Longrightarrow B^{**}$ est $\sigma(E^{**}, E^*)$-compact $\underset{J \text{ homéo}}{\Longrightarrow}$ $J^{-1}(B^{**}) = B$ est $\sigma(E, E^*)$-compact.

"$\Longrightarrow$" Supposons que B soit $\sigma(E, E^*)$-compact. Comme $J : (E, \sigma(E, E^*)) \to (E^{**}, \sigma(E^{**}, E^*))$ est continue, on déduit que $J(B)$ est $\sigma(E^{**}, E^*))$-compact dans E^{**}. $\sigma(E^{**}, E^*)$ étant T2 $\Longrightarrow J(B)$ fermé dans $\sigma(E^{**}, E^*)$. (1)

8.6 $\Longrightarrow J(B)$ est $\sigma(E^{**}, E^*)$-dense dans B^{**} (2)

7.7 $\Longrightarrow B^{**}$ est $\sigma(E^{**}, E^*)$-fermé. (3)

(1)-(3) $\Longrightarrow J(B) = B^{**}$. Soit $0_{E^{**}} \neq x^{**} \in E^{**}$. Alors $\frac{x^{**}}{\|x^{**}\|} \in B^{**} \Longrightarrow \exists x \in B$ *tq* $Jx = \frac{x^{**}}{\|x^{**}\|} \Longrightarrow x^{**} = J(\|x^{**}\|\, x) \Longrightarrow x^{**} \in J(E)$. Donc $J(E) = E^{**}$, i.e. E réflexif. ○

Théorème 8.8

Soit E réflexif. Alors $B = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$ est faiblement séquentiellement compact.

Dém. Soit $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ une suite dans B. Considérons l'adhérence F de $\text{Vect}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Alors F est d'après 8.2 réflexif, i.e. $J_F(F) = F^{**}$. F séparable $\Longrightarrow J_F(F) = F^{**}$ séparable $\underset{8.1}{\Longrightarrow}$ F^* séparable $\underset{7.11}{\Longrightarrow}$ $B^{**}_{F^{**}}$ est séquentiellement $\sigma(F^{**}, F^*)$-compact. En particulier, si $x_n^{**} = J_F x_n$, alors $\exists\, n_k$ et $x_0^{**} \in F^{**}$, $\|x_0^{**}\| \leq 1$ tq $x_{n_k}^{**} \underset{\sigma(F^{**}, F^*)}{\longrightarrow} x_0^{**}$, i.e. $\forall y^* \in F^*$ on a: $(x_{n_k}, y^*) = (y^*, J_F(x_{n_k})) = (y^*, x_{n_k}^{**}) \to (y^*, x_0^{**})$. F réflexif $\Longrightarrow \exists\, x_0 \in F$ tq $J_F(x_0) = x_0^{**}$. Alors $(x_{n_k}, y^*) \to (y^*, J_F(x_0)) = (x_0, y^*)\ \forall y^* \in F^*$.

Si $y' \in E^*$, alors $y^* := y'|_F \in F^*$. Donc

$(x_{n_k}, y') = (x_{n_k}, y^*) \to (x_0, y^*) = (x_0, y')$ car $x_{n_k}, x_0 \in F$. On conclut que $x_{n_k} \underset{\sigma(E, E^*)}{\longrightarrow} x_0$ dans E. Notons que $\|x_0\| \leq 1$. Donc B est faiblement séquentiellement compact. ○

Remarque La réciproque est aussi vraie. Ceci est un corollaire du théorème de Banach-Kakutani et du

Théorème de Eberlein-Smulian
Soit E un espace de Banach. Alors $M \subseteq E$ faiblement compact $\Longleftrightarrow$ M faiblement séquentiellement compact.

Nous allons montrer le cas spécial où M est la boule unité.

8.9 Lemme d'interpolation de Helly
Soit E un espace normé et $\{x_1^*, \cdots, x_n^*\} \subseteq E^*$. Soient $c_j \in \mathbb{K}$, $j = 1, \cdots, n$ et $M > 0$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes:

(1) $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists x \in E\quad tq\quad x_j^*(x) = c_j,\ j = 1, \cdots, n$ *et* $||x|| < M + \varepsilon$
(2) $\forall\, a_j \in \mathbb{K} : \ |\sum_{j=1}^n a_j c_j| \leq M\ ||\sum_{j=1}^n a_j x_j^*||$.

Dém (1) $\Longrightarrow$ (2): clair, car soit $T = \sum_{j=1}^n a_j x_j^*$, alors $|\sum_{j=1}^n a_j c_j| = |Tx| \leq ||T||_{op}||x|| \leq (M + \varepsilon)||T||_{op}$, $\varepsilon \to 0$.
(2) $\Longrightarrow$ (1): Posons $f_j := x_j^*$. Soit $\Phi : E \to \mathbb{K}^n$ définie par $x \mapsto (f_1(x), ..., f_n(x))$. Alors $\Phi(E)$ est un sous-espace fermé de $\mathbb{K}^n$. Soit $\{y_1, ..., y_k\}$ une base de $\Phi(E)$. Choisissons $z_1, \cdots, z_k \in E$ tq $\Phi(z_j) = y_j$. Soit $A = \text{Vect}\ (z_1, ..., z_k)$. Alors $\Psi := \Phi|_A : A \to \Phi(E)$ est bijective. Comme Ψ^{-1} est linéaire et continue (espaces de dimension finie) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tq $\Psi^{-1}(V_\delta(0)) \subset U_\varepsilon(0)$, où U_ε est une boule ouverte dans A et V_δ dans $\Phi(E)$.
Hahn-Banach $\Longrightarrow \exists\ x^{**} \in E^{**}$ tq $||x^{**}|| \leq M$ et $(x_j^*, x^{**}) = c_j$. 8.6 $\Longrightarrow$ $J(B)$ est $\sigma(E^{**}, E^*)$-dense dans B^{**} $\Longrightarrow$ il existe une suite généralisée (y_i) dans E, $||y_i|| \leq M$, tq $\forall\ x^* \in E^* : (y_i, x^*) = (x^*, Jy_i) \to (x^*, x^{**})$. En particulier, $f_j(y_i) = (y_i, x_j^*) \to c_j$, i.e. $\lim_i |f_j(y_i) - c_j| = 0$. Notons que $(f_1(y_i), ..., f_n(y_i)) \in \Phi(E)$ et que $\Phi(E)$ est fermé. Donc $(c_1, \cdots, c_n) \in \Phi(E)$ et
$(f_1(y_i) - c_1, \cdots, f_n(y_i) - c_n) \in \Phi(E)$.
Choisissons i tq $|f_j(y_i) - c_j| < \delta\ \forall j \in \{1, \cdots, n\}$. Alors $\exists w \in U_\epsilon$ tq $\Phi(w) = (-f_1(y_i) + c_1, \cdots, -f_n(y_i) + c_n)$. Donc $\Phi(y_i + w) = (c_1, \cdots, c_n)$ et $||y_i + w|| \leq M + \epsilon$.
○

8.10 Lemme de Riesz *Soit E un espace normé et $F \subseteq E$ un sev fermé propre. Alors $\forall\ 0 < \eta < 1\ \exists\ x_\eta \in E, ||x_\eta|| = 1$ tq dist$(F, x_\eta) > \eta$. en particulier, si dim$E = \infty$, la boule unité $B = \{||x|| \leq 1\}$ n'est pas compact*

Dém. Soit $y \in E \setminus F$. Posons $d :=$ dist $(y, F) \Longrightarrow \exists (x_n) \in F^{\mathbb{N}}$ tq $||x_n - y|| \to d$. Notons que $d > 0 \underset{0<\eta<1}{\Longrightarrow} \exists z \in F$ tq $0 < ||z - y|| < d/\eta$. Posons $\gamma = \frac{1}{||z-y||}$ et $x_\eta = \gamma(y - z)$. Alors $\gamma > \eta/d$ et $||x_\eta|| = 1$. En plus, $\forall x \in F$:

$$||x - x_\eta|| = ||x - \gamma(y - z)|| = ||x + \gamma z - \gamma y|| = \gamma||\underbrace{(\frac{1}{\gamma}x + z)}_{\in F} - y|| \geq \gamma \text{dist}\ (y, F) = \gamma d > \eta.$$

Soit dim$E = \infty$. En prenant $\eta = 1 - 1/n$ on trouve, par récurrence, $x_n \in E \setminus F_{n-1}$, où $F_n = Vect(x_1, \ldots, x_n)$ tel que $||x_n|| = 1$ et dist$(x_n, F_{n-1}) > 1 - 1/n$. Donc $||x_n - x_m|| \geq 1 - 1/n$ si $n > m$. Ainsi (x_n) n'admet pas de sous-suites convergentes, donc B n'est pas compact. ○

Remarque: Il est clair qu'on peut remplacer $\|x_\eta\| = 1$ par $\|x_\eta\| < 1$.

8.11 Théorème (R.C. James)
Soit E un espace de Banach, $B = \{x \in E : \|x\| \le 1\}$ et $B^* = \{x^* \in E^* : \|x^*\| \le 1\}$. Alors sont équivalentes:

(1) E réflexif
(2) B faiblement compact
(3) B faiblement séquentiellement compact
(4) Soit $0 < \theta < 1$. Alors il n'existe pas de suite $(x_n, x_n^*) \in B \times B^*$ telle que $x_i^*(x_j) = \theta$ pour $1 \le i \le j$ et $x_i^*(x_j) = 0$ pour $i > j$. $\qquad (*)$

Dém (1) $\Longleftrightarrow$ (2): 8.7
(1) $\Longrightarrow$ (3): 8.8
(3) $\Longrightarrow$ (4): Montrons la contraposée. Soit (x_n, x_n^*) une suite dans $B \times B^*$ satisfaisant $(*)$. Montrons que (x_n) ne possède pas de sous-suite qui converge faiblement. En effet, supposons que $x_{n_k} \underset{\sigma(E,E^*)}{\longrightarrow} \xi \in E$. Alors $x_n^*(\xi) = \lim_k x_n^*(x_{n_k}) = \theta$ pour tout n. Mazur (7.4) $\Longrightarrow$ ξ est un point adhérent de l'enveloppe convexe des x_n. En particulier, $\exists x_j$, $\exists\ \lambda_j \ge 0$, $\sum_{j=1}^p \lambda_j = 1$ tq $\|\xi - \sum_{j=1}^p \lambda_j x_j\| < \theta$. Mais alors $\forall n > p$ on a: $|x_n^*(\xi)| < \theta$ car $x_n^*(x_j) = 0\ \forall j < n$. Contradiction.

(4) $\Longrightarrow$ (1). Montrons la contraposée. Soit E non réflexif et soit $0 < \theta < 1$. Posons $\hat{E} = J(E)$, où J est l'immergement canonique de E dans E^{**}. Comme $\hat{E}$ est un fermé strictement inclus dans E^{**}, $\exists_{8.10}\ x^{**} \in E^{**}$ tq dist $(x^{**}, \hat{E}) > \theta$ et $\theta < \|x^{**}\| < 1$.
Nous construisons par récurrence une suite (x_n, x_n^*) tq

(a) $\quad \|x_n\| < 1$ et $\|x_n^*\| < 1$,
(b) $\quad x^{**}(x_n^*) = \theta$ pour tout n,
(c) $\quad x_i^*(x_j) = \theta$ si $i \le j$,
(d) $\quad x_i^*(x_j) = 0$ si $i > j$.

En effet, comme $\|x^{**}\| > \theta$, $\exists\ x_1^*$ tq $\|x_1^*\| < 1$ et $x^{**}(x_1^*) = \theta$. $\|x^{**}\| < 1 \Longrightarrow \|x_1^*\| > \theta$. Ainsi $\exists\ x_1$ tq $\|x_1\| < 1$ et $x_1^*(x_1) = \theta$.

Supposons que pour chaque $n < p$ les éléments x_n et x_n^* aient été choisis et que (a)-(d) soient satisfaites pour ces éléments. Cherchons x_p^* tq
$(*) \qquad \|x_p^*\| < 1, x^{**}(x_p^*) = \theta$ et $x_p^*(x_j) = 0$ pour $j < p$.

Soit $\widehat{x}_j = J_E(x_j)$. Posons $M = \theta/(\text{dist }(x^{**}, \hat{X})$. Alors $M < 1$ et
$\theta \le M\|x^{**} + \sum_{j=1}^{p-1} a_j \widehat{x}_j\| \qquad (H)$.
Le lemme de Helly (8.9) (appliqué à $c_1 = \theta$ et $c_j = 0$ $(j > 1)$ implique qu'une solution x_p^* de $(*)$ existe.

Il reste a montrer qu'on peut choisir x_p tq $\|x_p\| < 1$ et $x_i^*(x_p) = \theta$ si $i \le p$.
La condition de Helly sera dans ce cas: $|\sum_{j=1}^p a_j \theta| \le \widetilde{M}\ \|\sum_{j=1}^p a_j x_j^*\|$.
Mais celle-ci est satisfaite, car
$|\sum_{j=1}^p a_j \theta| = \left|\sum_{j=1}^p a_j x^{**}(x_j^*)\right| =$
$= \left|x^{**}(\sum_{j=1}^p a_j x_j^*)\right| \le \|x^{**}\|\ \|\sum_{j=1}^p a_j x_j^*\|.$ $\qquad \bigcirc$

Proposition A3.1. *Chaque espace métrique E est isométrique à une partie de l'espace de Banach $(\mathcal{B}(E), \|\cdot\|_\infty)$ des fonctions continues et bornées sur E.*

Dém. Fixons $a \in E$. Pour $x \in E$ soit $L_x : E \to \mathbb{K}$ définie par $L_x(b) = d(x,b) - d(a,b)$, $b \in E$. Alors L_x est continue et $|L_x(b)| \leq d(x,a)$ $\forall b \in E$. Donc $L_x \in \mathcal{B}(E)$. En plus, $\|L_x - L_y\|_\infty = \sup_{b\in E} |d(x,b) - d(y,b)| \leq d(x,y)$ et $\|L_x - L_y\|_\infty \geq |d(x,x) - d(y,x)| = d(x,y)$. Donc $\|L_x - L_y\|_\infty = d(x,y)$.
L'application $x \mapsto L_x$ est l'isométrie cherchée. ○

Proposition A3.2. *Soit E un espace normé. Alors il existe un esp. top. K, T2 , compact, tq E soit isomorphe-isométrique à un sous-espace de l'espace de Banach $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$.*

Dém. Soit $B^* = \{x^* \in E^* : \|x^*\| \leq 1\}$ et $K = (B^*, \sigma^*)$. Alaoglu-Bourbaki $\Longrightarrow$ K compact. Comme la topologie faible-étoile σ^* est T2 et que cette propriété est héréditaire, K est T2.
Soit $f_x : B^* \to \mathbb{K}$ définie par $f_x(x^*) = (x, x^*)$, $x \in E$ et soit $T : E \to C(K)$ donnée par $T(x) = f_x$. Alors T est bien définie, car les fonctionnelles $x^* \mapsto (x, x^*)$ sont σ^* continues sur E^*. T est linéaire et $\|Tx\|_\infty = \|f_x\|_\infty = \max_{x^*\in K} |f_x(x^*)| = \max_{x^*\in E^*, \|x^*\|\leq 1} |(x,x^*)| \underset{HB}{\overset{1.11}{=}} \|x\|$. Donc T est un isomorphisme isométrique. ○

IX - OPÉRATEURS SUR DES ESPACES DE HILBERT

Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$ et $< \cdot, \cdot >$ une application de $E \times E$ dans $\mathbb{K}$ tel que

H1 $< \alpha x + \beta y, z >= \alpha < x, z > + \beta < x, z >$,

H2 $< x, y >= \overline{< y, x >}$,

H3 $< x, x > \geq 0$ et $< x, x >= 0 \Longleftrightarrow x = 0$.

Une telle application (ou forme) est dite hermitienne. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on dit encore qu'elle est symétrique.

$(E, < \cdot, \cdot >)$ muni avec une forme hermitienne est dite un espace préhilbertien, si en plus E est complet par rapport à la norme $||x|| = \sqrt{< x, x >}$, alors E est une espace de Hilbert.

Si $M \subseteq E$, alors $M^\perp = \{x \in E : \forall m \in M :< x, m >= 0\}$ est l'orthogonal de M. $M^\perp$ est un sev fermé de E. Rappel:

9.1 Lemme *Soient H un espace de Hilbert et F et G deux sous-espaces fermés de H tel que $F \perp G$. Alors leur somme $F + G$ est directe et $F + G$ est fermé.*

9.2 Théorème *Si E est un espace préhilbertien et si $F \subseteq E$ est un sev complet de E, alors $E = F \oplus F^\perp$; en particulier, F admet un supplémentaire topologique.*

9.3 Corollaire *Soit E un espace de Hilbert et $F \subseteq E$ un sev. Alors*
a) $E = \overline{F} \oplus F^\perp$
b) $\overline{F} = F^{\perp\perp}$,
c) F dense dans $E \Longleftrightarrow F^\perp = \{0\}$.

9.4 Théorème de Fréchet-Riesz
a) Si E est un espace préhilbertien et $y \in E$, alors l'application f définie par $f(x) = < x, y >$ est une forme linéaire continue sur E et $||f||_{op} = ||y||$.
b) Si E est un espace de Hilbert, alors $\forall f \in E^* \ \exists_1 y \in E$ tel que $\forall x \in E : f(x) = < x, y >$.

<u>*L'adjoint dans les espaces de Hilbert:*</u>

Soient E, F des espaces de Banach, $T \in L(E, F)$. L'opérateur dual $T^* : F^* \to E^*$ était défini par:

$$(Tx, y^*) = (x, T^* y^*), \quad \forall x \in E, y^* \in F^*.$$

Supposons maintenant que E et F sont des espaces de Hilbert et que $T \in L(E, F)$. Notons que $\forall x^* \in E^* \ \exists \ \xi_{x^*} \in E$ telque $(x, x^*) =< x, \xi_{x^*} >$. L'application $T_E : E^* \to E$, $x^* \mapsto \xi_{x^*}$ est une isométrie bijective anti-linéaire et $||T_E|| = 1$. On définit l'opérateur adjoint T_* de T par: $T_* = T_E \circ T^* \circ T_F^{-1}$.

9.5 Proposition *Soient E, F des espaces de Hilbert et $T \in L(E, F)$. Alors*
a) $T_* \in L(F, E), ||T_*|| = ||T^*|| = ||T||$,
b) T_* est caractérisé par: $< Tx, y >_F =< x, T_* y >_E \ \ \forall x \in E, \ \forall y \in F$.
c) T_* est l'unique élément de $L(F, E)$ qui satisfait légalité ci-dessus.

Par abus de notation, on écrit de nouveau T^* pour T_*.

9.6 Proposition *Soit H un espace de Hilbert et $T, S \in L(H)$. Alors*
a) $T^{**} = T$,
b) $(T+S)^* = T^* + S^*$,
c) $(\alpha T)^* = \overline{\alpha} T^* \; \forall \alpha \in \mathbb{K}$.
d) $||T^* \circ T|| = ||T \circ T^*|| = ||T||^2$,
e) $(T \circ S)^* = S^* \circ T^*$.

Dém. (d) $||Tx||^2 = < Tx, Tx > = < x, T^*Tx > \leq ||x|| \, ||T^*Tx|| \leq ||T^*T|| \, ||x||^2 \Longrightarrow ||T||^2 \leq ||T^*T|| \leq ||T^*|| \, ||T|| = ||T||^2 \Longrightarrow ||T||^2 = ||T^*T|| \Longrightarrow ||T||^2 = ||T^*||^2 = ||T^{**}T^*|| = ||TT^*||$.

9.7 Proposition *Soit H un espace de Hilbert et $T \in L(H)$. Alors (voir 1.16)*
a) $\operatorname{Ker} T^* = R(T)^\perp$ *et* $\operatorname{Ker} T = R(T^*)^\perp$,
b) $\overline{R(T)} = (\operatorname{Ker} T^*)^\perp$ *et* $\overline{R(T^*)} = (\operatorname{Ker} T)^\perp$.

Définitions Soit H un espace de Hilbert et $T \in L(H)$.
(1) T est dit *normal* si $TT^* = T^*T$.
(2) T est dit *autoadjoint* (ou *hermitien*) si $T = T^*$; (dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ on dit encore que T est *symétrique*.)
(3) T est dit *unitaire* si $TT^* = T^*T = id$ (i.e. si T est inversible et $T^{-1} = T^*$.)
(4) T est dit *idempotent* si $T^2 := T \circ T = T$; (i.e. si T est une projection).

9.8 Théorème de Hellinger-Toeplitz *Soit H un espace de Hilbert et $T \in \ell(H)$ une application linéaire tel que*

$$< Tx, y > = < x, Ty > \;\; \forall x, y \in H.$$

Alors T est continue et T est autoadjoint.
Dém. Soit (x_n) une suite de H tel que $x_n \to 0$ et $Tx_n \to y$. D'après le théorème du graphe fermé il suffit de montrer que $y = 0$. Mais ceci découle de

$$< y, y > = < \lim Tx_n, y > = \lim < Tx_n, y > = \lim < x_n, Ty > = 0.$$

○

9.9 Lemme *Soit H un espace de Hilbert et $T \in L(H)$ normal. Alors $||T^2|| = ||T||^2$.*

Dém. On utilise 9.6(d): $||T^2||^2 = ||(T^2)\,(T^2)^*|| = ||T(T\,T^*)T^*|| = ||(T(T^*T)T^*|| = ||(TT^*)(TT^*)|| = ||(TT^*)^*(TT^*)|| = ||TT^*||^2 = ||T||^4 \Longrightarrow ||T^2|| = ||T||^2$. ○

9.10 Proposition *Soit H un espace de Hilbert sur le corps $\mathbb{C}$ et $T \in L(H)$. Alors T est hermitien $\Longleftrightarrow < Tx, x > \in \mathbb{R} \; \forall x \in H$.*

Dém. Supposons que $T = T^*$. Alors $< Tx, x > = < x, T^*x > = < x, Tx > = \overline{< Tx, x >}$. Donc $< Tx, x > \in \mathbb{R}$.

Pour montrer la réciproque, soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Considérons le nombre *réel*

$$< T(x{+}\lambda y), x{+}\lambda y >=< Tx, x > +\lambda < Ty, x > +\overline{\lambda} < Tx, y > +|\lambda|^2 < Ty, y > .$$

En prenant le conjugé complex on obtient:

$$< T(x{+}\lambda y), x{+}\lambda y >=< Tx, x > +\overline{\lambda} < x, Ty > +\lambda < y, Tx > +|\lambda|^2 < Ty, y > .$$

En particulier, pour $\lambda = 1$ et $\lambda = -i$:

$$< Tx, y > + < Ty, x >=< y, Tx > + < x, Ty >,$$
$$< Tx, y > - < Ty, x >= - < y, Tx > + < x, Ty > .$$

Addition nous donne que $< Tx, y > = < x, Ty >$. ○

De façon similiare on montre :
9.11 Proposition *Soit H un espace de Hilbert sur le corps $\mathbb{C}$ et $T \in L(H)$. Alors $T = 0 \iff < Tx, x > = 0 \ \forall x \in H$.*

Remarques
a) Ces deux propositions ne sont plus vraies (en général) pour des espaces de Hilbert sur le corps $\mathbb{R}$. Prenons $\mathbb{R}^2$ et comme T la rotation de 90 degrés.

b) Si, cependant T est symétrique, alors 9.11 reste vraie pour les espaces réels, ceci découle du résultat suivant:

9.12 Proposition *Soit H un espace de Hilbert et $T \in L(H)$ autoadjoint. Alors*

$$||T|| = \sup\{| < Tx, x > | : ||x|| \leq 1\}.$$

Dém. Posons $M = \sup\{| < Tx, x > | : ||x|| \leq 1\}$. Il est claire que $||T|| \geq M$, car pour $||x|| \leq 1$ on a: $| < Tx, x > | \underset{-Schwarz}{\overset{\text{Cauchy}}{\leq}} ||Tx|| \, ||x|| \leq ||T|| \, ||x||^2 \leq ||T||$. Comme $T = T^*$ on a:

$$< T(x + y), x + y > - < T(x - y), x - y >= 2 < Tx, y > +2 < Ty, x >=$$

$$= 2 < Tx, y > +2\overline{< x, Ty >} \underset{T=T^*}{=} 4\text{Re } < Tx, y > .$$

Comme $| < Tx, x > | \underset{\text{def} M}{\leq} M||x||^2$, on déduit que

$$4\text{Re } < Tx, y > \leq M(||x + y||^2 + ||x - y||^2) = 2M(||x||^2 + ||y||^2).$$

Donc Re $< Tx, y > \leq M \ \forall x, y \in H$ avec $||x|| = ||y|| \leq 1$.
Si $< Tx, y >= e^{i\theta}| < Tx, y > |$, on remplace x par $e^{i\theta}x$ et on conclut que $| < Tx, y > | \leq M \ \forall x, y \in H$ avec $||x|| = ||y|| = 1 \Longrightarrow ||Tx|| = \sup_{||y||=1} | < Tx, y > | \leq M \Longrightarrow ||T|| \leq M$. ○

9.13 Proposition *Soit H un espace de Hilbert, $T \in L(H)$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes:*

a) T est normal
b) $< Tx, Ty >=< T^*x, T^*y > \ \forall x, y \in H$
c) $||Tx|| = ||T^*x|| \ \forall x \in H$.

Dém. a)$\Longrightarrow$ b):
T normal $\Longrightarrow < Tx, Ty > = < x, T^*Ty > = < x, TT^*y > = < T^*x, T^*y >$.
b) $\Longrightarrow$ c) trivial.
c) $\Longrightarrow$ a) : On a $< T^*Tx, x > = < Tx, Tx > = ||Tx||^2 = ||T^*x||^2 = < T^*x, T^*x >$ $= < TT^*x, x >$. Comme TT^* et T^*T sont autoadjoint, la normalité découle de 9.11 et de la remarque (b) appliquée à $TT^* - T^*T$. ○

9.14 Corollaire *Soit H un espace de Hilbert, $T \in L(H)$ normal. Alors* $\mathrm{Ker}\, T = \mathrm{Ker}\, T^* = R(T)^\perp = R(T^*)^\perp$.

9.15 Proposition *Soient E un espace préhilbertien et $T \in L(E)$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes:*
a) T est une isométrie
b) $T^*T = id$
c) $< Tx, Ty > = < x, y > \ \forall x, y \in E$.

Proposition 9.16 *Soit H un espace de Hilbert, et $T \in L(H)$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes:*
a) T est unitaire
b) T est surjective et $< Tx, Ty > = < x, y > \ \forall x, y \in H$,
c) T est un isomorphisme isométrique.
Dém a) $\Longrightarrow$ b): Soit $z \in H$. Posons $x = T^*z$. Alors $Tx = TT^*z = z \Longrightarrow T$ surjective et $< Tx, Ty > = < x, T^*Ty > = < x, y >$.
b) $\Longrightarrow$ a): $\forall x, y :\ < T^*Tx, y > = < Tx, Ty > = < x, y > \Longrightarrow < T^*Tx - x, y >= 0$. Soit $y = T^*Tx - x$. Alors $T^*Tx = x$. T surjective $\Longrightarrow \exists\, x \in H$ telque $y = Tx$. Donc $TT^*y = TT^*Tx = Tx = y$.
(b)$\Longleftrightarrow$ (c) découle de 9.15 . ○

<u>Théorie de Riesz-Schauder pour les espaces de Hilbert</u>

9.17 Téorème *Soit H un espace de Hilbert, $T \in L(H)$ et T^* l'adjoint de T. Alors*
a) $\lambda \in \sigma(T) \Longleftrightarrow \overline{\lambda} \in \sigma(T^*)$,
b) Si T est hermitien, alors $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$,
c) Si T est normal et si x est un vecteur propre associé à la valeur propre λ de T, alors $T^*x = \overline{\lambda}x$.
d) Si T est normal et si x, y sont des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes, alors $x \perp y$.
e) Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et T est normal, alors $\exists\, \lambda \in \sigma(T)$ tel que $|\lambda| = ||T||$.
f) Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et T est symétrique, alors $||T||$ ou $-||T||$ est une valeur spectrale de T.

Dém. (a) On voit que $\lambda \in \sigma(T) \Longleftrightarrow \overline{\lambda} \in \sigma(T^*)$ car $T - \lambda I$ est inversible $\Longleftrightarrow$ $(T - \lambda I)^* = T^* - \overline{\lambda} I$ est inversible.

(b) Soit T hermitien. Si H est un espace sur le corps $\mathbb{R}$, alors, par définition, $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$. Donc soit $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $a+ib \in \sigma(T)$. Alors pour $\lambda \in \mathbb{R}$ on a $a+i(b+\lambda) \in \sigma(T+i\lambda I)$; donc $|a+i(b+\lambda)| \leq ||T+i\lambda I||$. Ainsi $a^2+(b+\lambda)^2 \leq ||T+i\lambda I||^2 \overset{9.6d}{=} ||(T+i\lambda I)(T+i\lambda I)^*|| = ||(T+i\lambda I)(T^*-i\overline{\lambda} I)|| \overset{T=T^*}{=} ||(T+i\lambda I)(T-i\overline{\lambda} I)|| = ||T^2+\lambda^2 I|| \leq ||T||^2+\lambda^2$. Donc $a^2+b^2+2b\lambda \leq ||T||^2 \;\; \forall \lambda \in \mathbb{R}$. Ceci implique que $b=0$.

(c) Utilisons: T normal $\Longrightarrow T-\lambda I$ normal. Alors $\operatorname{Ker}(T-\lambda I) \overset{9.14}{=} \operatorname{Ker}[(T-\lambda I)^*] \overset{9.6}{=} \operatorname{Ker}(T^*-\overline{\lambda} I)$.

(d) T normal, $\lambda \neq \mu$, $Tx = \lambda x, Ty = \mu y \overset{(c)}{\Longrightarrow} \lambda < x,y > = < \lambda x, y > = < Tx, y > = < x, T^* y > \underset{(c)}{=} < x, \overline{\mu} y > = \mu < x,y > \Longrightarrow < x,y > = 0$.

(e) $\mathbb{K} = \mathbb{C}, T$ normal. Montrons que $r(T) = ||T||$. En effet, T normal $\Longrightarrow T^n$ normal. Lemme 9.9 $\Longrightarrow ||T||^{2^k} = ||T^{2^k}||$. Théorème 4.7 $\overset{\mathbb{K}=\mathbb{C}}{\Longrightarrow} r(T) = \lim_{n\to\infty} ||T^n||^{1/n} = \lim_{k\to\infty} ||T^{2^k}||^{1/2^k} = ||T||$. $\sigma(T)$ compact $\Longrightarrow \exists\, \lambda \in \sigma(T)$ telque $|\lambda| = r(T) = ||T||$.

(f) Prop 9.12 $\overset{T \text{ sym.}}{\Longrightarrow} \exists\, (x_n)$, $||x_n|| = 1$, telque $| < Tx_n, x_n > | \to ||T||$. En passant à une sous-suite, on peut supposer que $\lambda := \lim < Tx_n, x_n >$ existe. Comme $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, les valeurs de $< \cdot,\cdot >$ se trouvent dans $\mathbb{R}$. Ainsi $\lambda = \pm ||T||$. On va montrer que $||Tx_n - \lambda x_n|| \to 0$. Admettons cela, alors $T-\lambda I$ n'est pas inversible. Donc $\lambda \in \sigma(T)$. Dû à la symétrie de T on a:

$$||Tx_n - \lambda x_n||^2 = < Tx_n - \lambda x_n, Tx_n - \lambda x_n > = ||Tx_n||^2 - 2\lambda < Tx_n, x_n > + \lambda^2 ||x_n||^2 \leq$$

$$\leq ||T||^2 ||x_n||^2 - 2\lambda < Tx_n, x_n > + \lambda^2 ||x_n||^2 = 2\lambda^2 - 2\lambda < Tx_n, x_n > \to 0$$

○

9.18 Lemma *Soit E un espace préhilbertien, $F \subseteq E$ un sev et $x_0 \in E$. Pour $y_0 \in F$ sont équivalentes:*
(1) $||x_0 - y_0|| = \operatorname{dist}(x_0, F)$,
(2) $x_0 - y_0 \perp F$.

9.19 Proposition *Soit E un espace préhilbertien, $F \subseteq E$ un sev complet. Alors $\forall x_0 \in E\; \exists_1\, y_0 \in F$ telque $||x_0 - y_0|| = \operatorname{dist}(x_0, F)$. En plus, y_0 est l'élément unique de F telque $x_0 - y_0 \perp F$. On appelle y_0 la projection orthogonal de x_0 sur F; notation: $y_0 = Px_0$.*
$P: E \to E$ est une application linéaire continue idempotent , i.e $P^2 = P$, et $||P|| = 1$ si $P \neq 0$. $\operatorname{Ker} P = F^\perp$ et $R(P) = F =$ l'ensemble des points fixes de P.

Définition On dit qu'un espace de Hilbert H est *somme hilbertienne* des sous-espaces fermés E_n orthogonaux deux à deux, si l'espace vectoriel engendré par la réunion des E_n est dense dans H et on écrit: $H = \bigoplus E_n$

9.20 Théorème spectral *Soit H un espace de Hilbert et T un opérateur compact. Alors $\sigma(T) \setminus \{0\} = \{\lambda_n : n \in \mathbb{N}^*\}$, où (λ_n) est soit une suite finie, soit une suite infinie*

de valeurs propres non nulles convergeante vers 0. Soit E_n l'espace propre associé à λ_n. Posons $E_0 = \operatorname{Ker} T$ et $\lambda_0 = 0$. Supposons que T soit symétrique dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou normal si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Alors:
a) $E_n \perp E_j \ \forall n \neq j$,
b) $H = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} E_n$ est la somme hilbertienne des espaces propres associés à T,
c) $T = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j P_j$, et $T^* = \sum_{j=0}^{\infty} \overline{\lambda_j} P_j$, où P_j est la projection orthogonale de H sur l'espace propre E_j; (convergence par rapport à $||\cdot||_{op}$).
d) $||T|| = \sup_{k\in\mathbb{N}} |\lambda_k|$.

Dém Notons d'abord que $E_j = \operatorname{Ker}(T - \lambda_j I)$ et que d'après le théorème de Riesz-Schauder $\dim E_j < \infty$ et $\sigma(T) \setminus \{0\} = \sigma_p(T) \setminus \{0\}$.
a) T normal $\overset{9.17}{\Longrightarrow} E_j \perp E_k$.
b) Soit F égal au sous-espace engendré par tous les E_j. A montrer (9.3) que $F^\perp = \{0\}$. Remarquons d'abord que $T(E_j) \subseteq E_j$ et que $T^*(E_j) \subseteq E_j$. En effet, soit $x \in \operatorname{Ker}(T - \lambda_j I)$. Alors $(T - \lambda_j I)(Tx) = T(Tx - \lambda_j x) = T(0) = 0$ et $(T - \lambda_j I)(T^*x) = T^*(Tx - \lambda_j x) = T^*(0) = 0$ car T et T^* commutent. On conclut que $T(F) \subseteq F$ et que $T^*(F) \subseteq F$. Il en est de même de $F^\perp$. En effet, soit $x \in F^\perp$ et $y \in F$. Alors $< Tx, y > = < x, T^*y >= 0$ car $T^*y \in F$. En plus $< T^*x, y >= \overline{< y, T^*x >} = \overline{< Ty, x >} = 0$ car $Ty \in F$. Il en résulte que $S = T|_{F^\perp} \in \mathcal{K}(F^\perp)$, dont l'adjoint S^* est $T^*|_{F^\perp}$. En plus, S est symétrique si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et normal si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

On va montrer que $\sigma(S) \subseteq \{0\}$. Supposons $\exists\ \lambda \in \sigma_p(S) \setminus \{0\} \Longrightarrow \exists\ x \neq 0, x \in F^\perp$ tel que $Sx - \lambda x = 0$; Donc $Tx = \lambda x$. Ainsi $x \in E_j$ pour un certain j et donc $x \in F$. Mais $F \cap F^\perp = \{0\}$. Contradiction. Donc $\sigma(S) \subseteq \{0\}$.
Si $F^\perp \neq \{0\}$, alors 9.17 (e)-(f) $\Longrightarrow \sigma(S) \neq \emptyset \Longrightarrow \sigma(S) = \{0\}$. 9.17 (f) $\Longrightarrow ||S|| = 0 \Longrightarrow S = 0 \Longrightarrow F^\perp \subseteq \operatorname{Ker} T$. Mais $\operatorname{Ker} T = E_0 \subseteq F$. Contradiction. Donc $F^\perp = \{0\}$. Ainsi $\bigoplus_{j=0}^{\infty} E_j = H$, i.e. $\forall x \in H\ \forall \varepsilon > 0\ \exists\ e_j \in E_j,\ \exists\ N \in \mathbb{N}$ tel que $||x - \sum_{j=0}^{N} e_j|| < \varepsilon$. Mais on aura plus.

Soit $x \in H$. Alors $x = \sum_{j=0}^{\infty} P_j x$. Pour voir cela, soit $F_N = E_0 \oplus \cdots \oplus E_N \overset{(a)}{\Longrightarrow} F_N$ sev complet. Soit $Q = \sum_{j=0}^{N} P_j$. On va montrer que Q est la projection orthogonale sur F_N. En effet le vecteur $x - Qx$ est orthogonal à chaque E_j, $j = 0, \cdots, N$, (car $x - P_j x \perp E_j$); donc $x - Qx \perp F_N$. Ainsi Q est la projection orthogonal sur F_N $\Longrightarrow ||x - \sum_{j=0}^{N} P_j x|| \le ||x - \sum_{j=1}^{N} e_j|| < \varepsilon$. Donc $x = \sum_{j=0}^{\infty} P_j x$.
Dû à la continuité de T on obtient: $x \in H \Longrightarrow x = \sum P_j x \Longrightarrow Tx = \sum T(P_j x) = \sum \lambda_j P_j x$. Posons $x_j = P_j x$. Il est claire que $P_j(\sum_{k=0}^{\infty} x_k) = x_j$. Donc $\forall n$

$$||(T - \sum_{j=0}^{n} \lambda_j P_j)(x)||^2 = ||(T - \sum_{j=0}^{n} \lambda_j P_j)(\sum_{k=0}^{\infty} x_k)||^2 =$$

$$= ||\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k x_k - \sum_{j=0}^{n} \lambda_j P_j(\sum_{k=0}^{\infty} x_k)||^2 = ||\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k x_k - \sum_{j=0}^{n} \lambda_j x_j||^2 = ||\sum_{k>n} \lambda_k x_k||^2 =$$

$$= \sum_{k>n} |\lambda_k|^2 ||x_k||^2 \le \sup_{k>n} |\lambda_k|^2 \sum_{k>n} ||x_k||^2 \le \sup_{k>n} |\lambda_k|^2 ||x||^2.$$

Notons que (λ_k) est une suite qui converge vers 0 si elle est infinie. Donc

$$||T - \sum_{j=0}^{n} \lambda_j P_j||_{op}^2 \leq \sup_{k>n} |\lambda_k|^2 \to 0$$

si $n \to \infty$. Ceci montre que $T = \sum \lambda_j P_j$. Par le même procédé on voit que $||Tx||^2 \leq \sup |\lambda_k|^2 \sum ||x_k||^2 = \sup |\lambda_k|^2 ||x||^2$. Donc $||T||_{op} \leq \sup_k |\lambda_k|$. Soit $|\lambda_{n_0}| = \sup |\lambda_k|$. Alors on obtient égalité en prenant pour x n'importe quel élément de E_{n_0} de norme 1. ○

Remarque: Le Théorème spectral nous dit donc qu'il existe une base hilbertienne de H formée de vecteurs propres de T; une telle base "diagonalise" T.
Calcul fonctionnel: Soient H un espace de Hilbert sur $\mathbb{C}$, $T \in L(H)$ et $Q(z) = a_0 + a_1 z + a_N z^N \in \mathbb{K}[z]$ un polynome. Posons $Q(T) = a_0 + a_1 T + \cdots + a_N T^N$. Alors, si T est normal, $Q(T) = \sum_{j=0}^{\infty} Q(\lambda_j) P_j$, car pour $N = 2$ on a: $T^2 = \left(\sum_j \lambda_j P_j\right) \circ \left(\sum_k \lambda_k P_k\right) = \sum_{j,k} \lambda_j \lambda_k \underbrace{P_j \circ P_k}_{\delta_{jk} P_j} = \sum_j \lambda_j^2 P_j$.
De même: $T^n = \sum_j \lambda_j^n P_j$.
De façon général, si $f(z) = \sum_k a_k z^k$ converge pour $|z| \leq C$ avec $C > ||T||_{op}$, alors $f(T) := \sum_k a_k T^k$ converge en norme et $f(T) = \sum_j f(\lambda_j) P_j$.

X L'OPÉRATEUR SHIFT SUR ℓ^2

Soit H un espace de Hilbert et $T \in L(H)$. Un sev S de H est dit un *sous-espace invariant* (sevi) pour T si (1) S est fermé, (2) $TS \subseteq S$. On va caractérisé les sevis pour l'opérateur de shift $T : \ell^2 \to \ell^2$, $T(a_0, a_1, a_2, \cdots) = (0, a_0, a_1, \cdots)$.
Il est clair que chaque sev de la forme $S_N = \{(0, \cdots, 0, a_N, a_{N+1}, \cdots) : (a_j) \in \ell^2\}$ est un sevi. Notons que $S_N = T^N \ell^2$. Réalisons ℓ^2 comme espace de (classes d'équivalences) de fonctions:

$$\mathcal{H}^2 = \{f \in L^2(\partial \mathbb{D}) : \hat{f}(n) = 0 \; \forall \, n \in \{-1, -2, \cdots\}\},$$

où $\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) e^{-int} dt$ est le coefficient de Fourier de f. Notons $d\sigma = \frac{dt}{2\pi}$ la mesure de Lebesgue normalisée.
Via la représentation de Poisson,

$$f \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - |z|^2}{|z - e^{it}|^2} f(e^{it}) dt,$$

$\mathcal{H}^2$ est isomorphe isométrique à l'espace de Hardy

$$H^2(\mathbb{D}) = \{f \text{ holomorphe dans } \mathbb{D}, \, ||f||_2^2 := \sup_{0<r<1} \tfrac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 dt < \infty\} =$$

$$= \{\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n : \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty\}.$$

L'opérateur de shift n'est donc rien d'autre que l'opérateur de multiplication $g \mapsto zg$ sur H^2. Les sev S_n ci-dessus correspondent à

$$\{f \in H^2 : f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n-1)}(0) = 0\} = z^n H^2.$$

Notons que $f(0) = \hat{f}(0)$ si $f \in H^2$.

Soit $u \in \mathcal{H}^2$ telque $|u| = 1$ presque partout (on dit que u est une fonction intérieure). Alors l'application $\mathcal{H}^2 \to \mathcal{H}^2, f \mapsto uf$ est une isométrie de $\mathcal{H}^2$; donc l'image $S := u\mathcal{H}^2$ est un sev fermé de $\mathcal{H}^2$. En plus, $TS \subseteq S$, car $uf \in S \Longrightarrow T(uf) = zuf \in S$. Donc S est un sevi pour l'opérateur de shift. Si $u(z) = z^n$, on obtient de nouveau le S_n ci-dessus. En général, on ne peux plus décrire ces sevi par leur coefficients (a_n).
Autres fonctions intérieures:
- Les produits de Blaschke $B(z) = z^N \prod_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{a_n} \frac{a_n - z}{1 - \bar{a}_n z}, \sum_n (1 - |a_n|) < \infty, a_n \neq 0$. Posons $a_0 = 0$. Si $a_n \neq a_m$, on obtient que $BH^2 = \{f \in H^2 : f(a_j) = 0 \; \forall j \in \mathbb{N}\}$ (Riesz).
- $S(z) = \exp\left(-\frac{1+z}{1-z}\right)$, ou plus général:

$$S_\mu(z) = \exp\left(-\int_0^{2\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} d\mu(t)\right), \mu \perp \sigma, \; \mu \geq 0.$$

10.1 Lemme (1) Soit $f \in L^1, \hat{f}(n) = 0 \; \forall n \in \mathbb{Z} \Longrightarrow f \equiv 0$ p.p.
(1) $f \in L^1, \hat{f}(n) = 0 \; \forall n \in \mathbb{Z}^* \Longrightarrow f \equiv$ const p.p.

Dém. (1) $\hat{f}(n) = 0 \Longrightarrow \int e^{-int} f(e^{it}) d\sigma = 0 \Longrightarrow \int pf d\sigma = 0$ pour $p \in \mathcal{T} =$ l'ensemble des polynomes trigonométriques $p(e^{i\theta}) = \sum_{-N}^{N} a_n e^{in\theta}, a_n \in \mathbb{C}$.
Soit μ le mesure de densité f, i.e $d\mu = f d\sigma$. Alors $\mu \perp \mathcal{T}$. Comme $\overline{\mathcal{T}}^{||\cdot||_\infty} = C(\partial\mathbb{D})$ (Weierstrass), on déduit que $\mu \perp C(\partial\mathbb{D}) \underset{\text{Hahn-Banach}}{\Longrightarrow} \mu = 0 \Longrightarrow f \equiv 0$.

(2) $g = f - \hat{f}(0) \Longrightarrow \hat{g}(n) = 0 \; \forall n \in \mathbb{Z} \Longrightarrow f \equiv \hat{f}(0)$. ○

10.2 Théorème de Beurling *Soit S un sous espace invariant pour l'opérateur de shift sur $\mathcal{H}^2$. Alors $S = \{0\}$ ou $S = u\mathcal{H}^2$ pour une fonction intérieure u .*

Dém. Supposons que $S \neq \{0\}$. Considérons la décomposition orthogonal $\mathcal{H}^2 = S \oplus S^\perp$ de $\mathcal{H}^2$ et soit ψ la projection orthogonale de la fonction 1 sur S. Alors $1 = \psi + (1 - \psi)$. S.p.g. on peut supposer que les fonctions dans S n'ont pas de zéros communs à l'origine, sinon on regarde $S_0 = \{f/z^m : f \in S\}$, où $m = \min_{f \in S} \text{ord}\,(f;0)$. Notons que $S = z^m S_0 \Longrightarrow S_0$ fermé car l'opérateur de multiplication avec z^m est une isométrie. En plus, $zS_0 \subseteq S_0$. Donc, si $S_0 = uH^2$, alors $S = (z^m u)H^2$, où $z^m u$ est de nouveau une fonction intérieure.

i) On va montrer que $\psi \neq 0$. Supposons le contraire, alors $1 = 1 - 0 \in S^\perp \Longrightarrow < 1, f > = 0 \; \forall f \in S$. Ceci est équivalent à $f(0) = \hat{f}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) dt = 0 \; \forall f \in S$. Ainsi chaque élément de S aurait une racine à l'origine. Contradiction.

ii) Montrons que ψ est un multiple scalaire d'une fonction intérieur. En effet, $\psi \in S$, S sevi, $\Longrightarrow z^n \psi \in S \; \forall n \in \mathbb{N}^*$. Comme $1 - \psi \in S^\perp$ on obtient $0 =< \psi z^n, 1 - \psi >=$

$\int \psi e^{int}(1-\overline{\psi})d\sigma = \underbrace{\int \psi e^{int} d\sigma}_{=\hat{\psi}(-n)=0} - \int |\psi|^2 e^{int} d\sigma = - < \psi z^n, \psi > = \widehat{|\psi|^2}(-n) \ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Donc: $0 = \overline{< \psi z^n, \psi >} =< \psi, \psi z^n >= \int |\psi|^2 e^{-int} d\sigma \Longrightarrow \widehat{|\psi|^2}(n) = 0 \ \forall n \in \mathbb{Z}^* \Longrightarrow |\psi|^2 \equiv \text{const} = C^2$. Posons $\Phi = \frac{\psi}{C}$. Alors $|\Phi| = 1$ p.p. sur $\partial\mathbb{D}$. $\Phi \in \mathcal{H}^2 \Longrightarrow \Phi$ intérieure.

iii) Montrons que $S = \Phi H^2$. (Notons que ceci est équivalent à $\psi H^2 = S$.)
a) $\psi H^2 \subseteq S$, car: soit $f \in H^2$. Les polynomes sont denses dans $H^2 \Longrightarrow \exists \ (P_n) \in \mathbb{C}[z]$, telque $||P_n - f||_2 \to 0$. S sevi, $\psi \in S \Longrightarrow P_n\psi \in S$ et $||P_n\psi - f\psi|| \to 0 \Longrightarrow f\psi \in S$ car S fermé $\Longrightarrow \psi H^2 \subseteq S$.
b) Pour montrer que $S = \psi H^2$, on va prouver que l'orthogonal de ψH^2 par rapport à S est $\{0\}$. Donc soit $f \in S$ et supposons que $f \perp \psi H^2$

$$\Longrightarrow < f, \psi g >= 0 \ \forall g \in H^2 \tag{1}$$

Notons que $f\overline{\psi} \in L^1$.
Soit $g = z^n$. Alors $0 =< f, \psi z^n >=< f\overline{\psi}, z^n >= \widehat{f\overline{\psi}}(n) \ \forall n \in \mathbb{N}$.
$f \in S \Longrightarrow z^n f \in S \ \forall n \in \mathbb{N}^* \Longrightarrow z^n f \perp 1 - \psi \Longrightarrow 0 = < z^n f, 1 - \psi >= \int e^{int} f \overline{1-\psi} d\sigma = = \underbrace{\int e^{int} f d\sigma}_{=\hat{f}(-n)=0} - \int e^{int} f\overline{\psi} d\sigma \Longrightarrow \widehat{f\overline{\psi}}(n) = 0 \ \forall n < 0 \Longrightarrow \widehat{f\overline{\psi}}(n) = 0 \ \forall n \in \mathbb{Z} \Longrightarrow f\overline{\psi} = 0 \underset{|\Phi| \equiv 1}{\Longrightarrow} f \equiv 0$. ○