COURS L2, 2010-2011

:

SUITES, SÉRIES, INTÉGRALES IMPROPRES

1 Séries numériques

1. SÉRIE GÉOMÉTRIQUE ET SÉRIE TÉLÉSCOPIQUE

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots=?$$

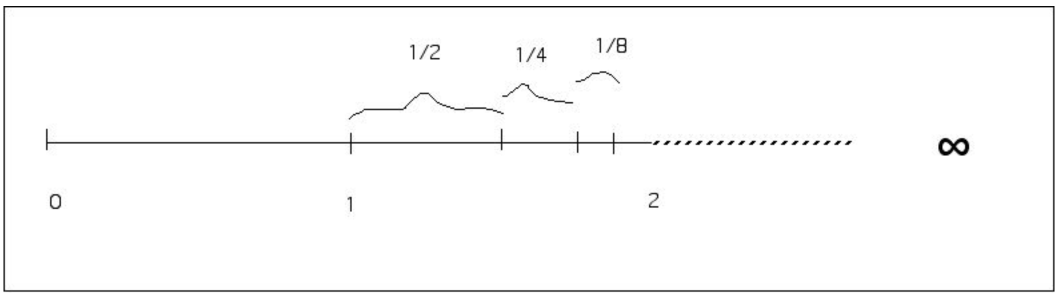

FIGURE 1. quelle est la longueur?

Soit $q>0$ (dans l'exemple ci-dessus $q=1/2$). Considérons

$$s_n=1+q+q^2+q^3+\cdots+q^n.$$

Si $q\neq 1$, multiplions par $1-q$: Alors

$$(1-q)s_n=(1+q+q^2+q^3+\cdots+q^n)-(q+q^2+q^3+\cdots+q^{n+1})=1-q^{n+1}$$

Donc

$$s_n=\begin{cases}\frac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q\neq 1\\ n+1 & \text{si } q=1\end{cases}$$

Comme $\lim q^n=\infty$ si $q>1$, $\lim s_n$ n'existe pas si $q>1$. De même, si $q=1$, alors $\lim s_n=\infty$. Mais si $|q|<1$, alors $\lim |q|^n=0$ et donc $\lim s_n=\frac{1}{1-q}$.

$q=1/2\Longrightarrow 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots=\frac{1}{1-1/2}=2$

On écrit

$$s_n=1+q+q^2+q^3+\cdots+q^n=\sum_{j=0}^{n}q^j$$

et

$$1+q+q^2+q^3+\cdots=\sum_{j=0}^{\infty}q^j \quad \text{(série géométrique)}$$

Definition 1.1. *Soit* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de nombres complexes /réels. On pose*

$$S_n = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k.$$

La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *s'appelle série (associée à* (a_n)*, ou de terme général* (a_n)*). Cette série est notée par* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *(somme infinie).* (S_n)*s'appelle aussi la suite des sommes partielles.*

Si la suite (S_n) admet une limite S dans $\mathbb{C}$ ou dans $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, on note

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} S_n = S.$$

On appelle S la *somme* ou *valeur* de la série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$.
On dit que la série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ est convergente, si la suite (S_n) est convergente; i.e. si la suite (S_n) admet une limite finie (dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Sinon, on dit qu'elle est divergente.
Si la série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge vers S, on dira aussi, "soit S la série $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$".
Bien sûr on peut noter la série aussi

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n,\ \sum_{m=0}^{\infty} a_m,\ \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n,\ \cdots.$$

(différents symboles pour l'indice).
On écrit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \sim \sum_{n=0}^{\infty} b_n$, si ces deux séries ont même nature.

Proposition 1.1. *Soit* $q \in \mathbb{C}$*. La série géométrique* $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ *est convergente si et seulement si* $|q| < 1$*. On a alors*

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

Preuve. Soit $|q| < 1$ alors

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \to \frac{1}{1-q}.$$

(S_n) diverge si $|q| \geq 1$ (voir ci-dessous, Théorème 1.8).

Remarque 1 On peut partir d'une suite $(a_n)_{n\geq n_0}$, $n_0 \in \mathbb{N}$ fixé, notation:

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n,\ \sum_{n\geq n_0} a_n.$$

On pose alors $S_n = a_{n_0} + a_{n_0+1} + \cdots + a_n$, $n \geq n_0$.

Remarque 2 Considérons la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ et soit $p \in \mathbb{N}$ fixé. Pour $N > p$ on a:

$$\begin{aligned} S_N = \sum_{n=0}^{N} a_n &= \sum_{n=0}^{p} a_n + \sum_{n=p+1}^{N} a_n \\ &= S_p + \sum_{n=p+1}^{N} a_n \end{aligned}$$

Donc les séries $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ et $\sum_{n=p+1}^{\infty} a_n$ ont même nature; i.e. si une de ces séries est convergente, alors l'autre est aussi convergente. De même pour la divergence. En cas de convergence on a:

$$S := \sum_{n=0}^{\infty} a_n = S_p + \sum_{n=p+1}^{\infty} a_n.$$

On note alors

$$R_p := \sum_{n=p+1}^{\infty} a_n \text{ reste d'ordre } p.$$

Donc $S = S_p + R_p$.

Proposition 1.2. *Si une série est convergente, alors* $\lim_{p\to\infty} R_p = 0$.

Preuve. Soit S une série convergente. Alors $S = S_p + R_p$. Donc $R_p = S - S_p \to S - S = 0$ si $p \to \infty$.

Proposition 1.3. *Soit $q \in \mathbb{C}$ et fixons $n_0 \in \mathbb{N}$. La série géométrique $\sum_{n=n_0}^{\infty} q^n$ est convergente si et seulement si $|q| < 1$. On a alors*

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} q^n = \frac{q^{n_0}}{1-q},$$

et

$$\frac{1}{1-q} = \sum_{n=0}^{n_0-1} q^n + \frac{q^{n_0}}{1-q}.$$

Preuve. Notons d'abord que les séries $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ et $\sum_{n=n_0}^{\infty} q^n$ ont même nature (remarque 2). Pour $|q| \geq 1$, la série $\sum_{n=n_0}^{\infty} q^n$ est donc aussi divergente.
Soit $N \geq n_0$ et $|q| < 1$. Alors

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=n_0}^{N} q^n = q^{n_0} + q^{n_0+1} + \cdots + q^N \\ &= q^{n_0}(1 + q + q^2 + \cdots + q^{N-n_0}) \\ &\underset{N\to\infty}{\longrightarrow} q^{n_0}\frac{1}{1-q}. \end{aligned}$$

$\square$

Proposition 1.4. *Une somme téléscopique est une série de la forme*

$$\sum_{n=0}^{\infty}(b_{n+1}-b_n),$$

où $b_n \in \mathbb{C}$. Cette série est convergente si et seulement si $b := \lim b_n$ existe et dans ce cas on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty}(b_{n+1}-b_n) = b - b_0.$$

Preuve.

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=0}^{N}(b_{n+1}-b_n) \\ &= (b_1-b_0)+(b_2-b_1)+(b_3-b_2)+\cdots+(b_{N+1}-b_N) \\ &= -b_0+b_1-b_1+b_2-b_2+\cdots+b_N-b_N+b_{N+1} \\ &= b_{N+1}-b_0 \qquad \square \end{aligned}$$

Exemple 1.5.

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1/9}{2/3} = \frac{1}{6},$$

ou

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} - (1+\frac{1}{3}) = \frac{3}{2}-\frac{4}{3} = \frac{9-8}{6} = \frac{1}{6}.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \underset{n+1=k}{=} \sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{1}{6}.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{-1}{4}} = \frac{4}{5}.$$

Exemple 1.6. La série

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots$$

est convergente et a la valeur 1, car

$$S_N = \sum_{n=0}^{N}\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \sum_{n=0}^{N}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$\text{(somme téléscopique)} = 1-\frac{1}{N+2} \underset{N\to\infty}{\to} = 1.$$

Par changement d'indice on a aussi que les séries $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ et $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}$ sont convergentes.

Exemple 1.7. Les séries $\sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})$ et $\sum_{n=1}^{\infty} n^2$ sont divergentes, car

$$S_N \geq \sum_{n=1}^{N} 1 = N \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \infty.$$

Théorème 1.8. *Soit* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *une série convergente. Alors* $\lim_n a_n = 0$*. Donc, si* $a_n \not\to 0$*, alors* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *diverge.*

Preuve. Soit $S = \sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k = \lim S_n$. Alors

$$a_n = S_n - S_{n-1} \to S - S = 0.$$

Attention il existe des séries $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ tel que $\lim_n a_n = 0$, mais $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge. L'exemple le plus classique est la *série harmonique*:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ diverge}$$

Plus précisement, on a $\lim S_n = \infty$.

Preuve. Soit $M > 0$. Choisir $m \in \mathbb{N}$ telque $m \geq 2M$. Alors pour $n \geq 2^m$ on a:

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^m} + \cdots + \frac{1}{n} \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^m}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}) + (\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16}) + \cdots + (\frac{1}{2^{m-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^m})$$

$$\geq \frac{1}{2} + 2\,\frac{1}{4} + 4\,\frac{1}{8} + 8\frac{1}{16} + \cdots + 2^{m-1}\,\frac{1}{2^m} =$$

$$= m\,\frac{1}{2} \geq M$$

(le nombre de termes entre les parenthèses est de

$$2^m - (2^{m-1} + 1) + 1 = 2^m - 2^{m-1} = 2^{m-1}),$$

et le nombre de sommands est m.

Rappel

Une suite (a_n) dans $\mathbb{C}$ converge si et seulement si elle est une suite de Cauchy; i.e.

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}:\ |a_n - a_m| < \varepsilon\ \forall n, m \geq n_0.}$$

Théorème 1.9 (critère de Cauchy)**.** *Une série* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *converge si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}:\ |a_{n+1} + \cdots + a_m| < \varepsilon\ \forall m > n \geq n_0.$$

On pourra aussi formuler de la façon suivante:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}:\ |a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon\ \forall n \geq n_0, \forall p \in \mathbb{N}.$$

Preuve.

$$|S_m - S_n| = |a_{n+1} + \cdots + a_m|$$

Proposition 1.10. *Soient* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *et* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *deux séries convergentes de somme* A *et* B *et* $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ *Alors la série* $\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda a_n + \mu b_n)$ *est convergente et de somme* $\lambda A + \mu B$. *On a donc*

$$\lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \mu \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty}(\lambda a_n + \mu b_n).$$

Preuve.

$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \to A \in \mathbb{C}, B_n = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \to B \in \mathbb{C}$. Donc $\sum_{k=0}^{n}(\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda \sum_{n=0}^{n} a_n + \mu \sum_{n=0}^{n} b_n \to \lambda A + \mu B$.

Exemple 1.11.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{5^n} \frac{2}{3} + \left(\frac{1}{4}\right)^n \right) \overset{\longleftarrow}{=} \frac{2}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$$= \frac{2}{3} \frac{1}{1 - (-\frac{1}{5})} + \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{17}{9}$$

2. Séries à termes positifs

Rappel

> Chaque suite $(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ croissante et bornée converge.
> Chaque suite $(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ croissante admet une limite dans
> $$\mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$
> Dans ce cas on a: $\lim r_n = \sup\{r_n : n \in \mathbb{N}\}$

On dit qu'une série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ est à termes positifs, si $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq 0$.

Proposition 2.1. *Chaque série à termes positifs admet une somme dans* $\bar{\mathbb{R}}_+$. *Cette série est convergente si et seulement si la suite des sommes partielles est bornée. Donc, si* $a_n \geq 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *converge* $\iff \sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty$. *En plus,* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sup_n S_n$.

Preuve. $S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \geq S_n$ car $a_n \geq 0$.

Est-ce que les séries $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ et $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ sont convergentes?
(Notons que $0! = 1$ et que pour $n \geq 1$, $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$).

Méthode générale

Pour trouver la nature d'une série à termes positifs, on la compare avec des séries classiques simples au moyen des théorèmes suivants:

Théorème 2.2. *(théorème de comparaison I)*
Soient $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *et* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *deux séries à termes positifs. On suppose qu'il existe* n_0 *tel que* $\forall n \geq n_0 : a_n \leq b_n$. *(On dit que la série* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *majore la série* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$*). Si la série* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *converge, alors la série* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *converge. Donc, si la série* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *diverge, alors* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *diverge.*

Preuve. La seconde implication est la contraposée de la première; donc il suffit de montrer la première. Supposons donc que $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge. Les séries $\sum_{n\geq n_0} x_n$ et $\sum_{n\geq 0} x_n$ ayant même nature, on peut prendre s.p.g. $n_0 = 0$. Pour tout n on a:

$$A_N := \sum_{n=0}^{N} a_n \leq \sum_{n=0}^{N} b_n =: B_N,$$

i.e. $0 \leq A_N \leq B_N$. D'après la proposition 2.1, $A := \lim_N A_N$ et $B := \lim B_N$ exsitent dans $\bar{\mathbb{R}}_+$ et $0 \leq A \leq B$. Comme $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge, $B < \infty$; Ainsi $0 \leq A < \infty$; donc $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.

Corollaire 2.3. *Soient* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *et* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *deux séries à termes strictement positifs. On suppose qu'il existe* n_0 *et* $0 < m < M < \infty$ *tel que*

$$\forall n \geq n_0 : 0 < m \leq \frac{a_n}{b_n} \leq M < \infty.$$

Alors les séries $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *et* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *ont même nature.*

Preuve. • Supposons que $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge. Alors $\sum_{n=0}^{\infty} M b_n$ converge. D'après le théorème 2.2, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.

• Supposons que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge. D'après le théorème 2.2, $\sum_{n=0}^{\infty} m b_n$ converge. Ainsi $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge.

Soient (a_n) et (b_n) deux suites strictement positives. Alors

$$a_n \sim b_n \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \lim \frac{a_n}{b_n} = 1$$

Corollaire 2.4. *(théorème de comparaison II)*
Soient $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *et* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *deux séries à termes strictement positifs. On suppose que* $a_n \sim b_n$. *Alors les séries* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *et* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *ont même nature.*

Découle du corollaire précédent en remarquant que

$$a_n \sim b_n \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 : \left| \frac{a_n}{b_n} - 1 \right| < \varepsilon\ \forall n \geq n_0;$$

donc en particulier, pour $\varepsilon = 1/2$,

$$\frac{1}{2} \leq \frac{a_n}{b_n} \leq \frac{3}{2}\ \forall n \geq n_0.$$

Exemple 2.5. .

- $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ converge parce que $\frac{1}{n^2}\sim\frac{1}{n(n+1)}$ et que $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n(n+1)}$ converge (exemple 1.6)
- $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}$ converge parce que $\frac{1}{n!}\leq\frac{1}{n(n-1)}$ pour $n\geq 2$ et que $\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n(n-1)}$ converge (exemple 1.6).
- $\sum_{n\geq 1}\frac{\log n}{n}$ diverge, parce que $\frac{1}{n}\leq\frac{\log n}{n}$ pour $n\geq 3$ et que $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ diverge.

Exemple 2.6. (avancé)

- $\sum_{n=1}^{\infty}\log\tanh n$ converge car:

i) $0<\tanh n=\dfrac{e^n-e^{-n}}{e^n+e^{-n}}<1$;
ii) $\lim_{n\to\infty}\tanh n=1$;
iii) $\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=1$ (noté par $\log(1+x)\overset{x\to 0}{\sim}x$);
iv) $\tanh n=1+(\tanh n-1)=1+\dfrac{-2e^{-n}}{e^n+e^{-n}}=1+\dfrac{-2e^{-2n}}{\underbrace{1+e^{-2n}}_{\to 0}}$

v) $\log\tanh n\sim\frac{-2e^{-2n}}{1+e^{-2n}}\sim -2e^{-2n}$;
vi) $\sum e^{-2n}=\sum(e^{-2})^n$ converge car $e=2,71828\cdots>1$.

Pour résoudre les probèmes de convergence/divergence de séries, on utilisera fréquemment les concepts suivants:
Soit $x_0\in\bar{\mathbb{R}}$ et f et g deux fonctions définies dans un voisinage V pointé de x_0. Supposons que $g\neq 0$ sur V. Alors on écrit $f(x)\overset{x\to x_0}{=}o(g(x))$ pour dire que

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=0.$$

De plus, on écrit $f(x)\overset{x\to x_0}{\sim}g(x)$, pour dire que

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=1.$$

Lemme 2.7. *Supposons que $g\neq 0$. Alors*

$$f(x)\overset{x\to x_0}{=}g(x)+o(g(x))\Longleftrightarrow f(x)\overset{x\to x_0}{\sim}g(x).$$

Preuve. Soit $f(x)=g(x)+o(g(x))$ si $x\to x_0$. Supposons que $g\neq 0$. Alors

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{g(x)+o(g(x))}{g(x)}=1+o(1),\ x\to x_0$$

Ainsi $f(x)\sim g(x)$.

D'autre part, si $f \sim g$, alors
$$0 = \lim_{x\to x_0}(\frac{f(x)}{g(x)} - 1) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-g(x)}{g(x)},$$
Donc $f(x) - g(x) = \mathcal{O}(g(x))$. Ainsi $f(x) = g(x) + \mathcal{O}(g(x))$.

Exemple 2.8. $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n})$ converge car:

i) $\sqrt[n]{x}$ fonction croissante en x; donc $\sqrt[n]{n+1} \geq \sqrt[n]{n}$;
ii) $a_n := \sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n} = \underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\to 1}\Big(\sqrt[n]{\frac{n+1}{n}} - 1\Big)$;

ainsi $a_n \sim \sqrt[n]{\frac{n+1}{n}} - 1$.
ii) $\log(1+x) = x + \mathcal{O}(x)$; $e^x = 1 + x + \mathcal{O}(x)$ si $x \to 0$;
iii) $\sqrt[n]{\frac{n+1}{n}} = (1+\frac{1}{n})^{1/n} = \exp(\frac{\log(1+\frac{1}{n})}{n}) = \exp(\frac{\frac{1}{n}+\mathcal{O}(\frac{1}{n})}{n})$
$= \exp\big(\frac{1}{n^2} + \mathcal{O}(\frac{1}{n^2})\big) = 1 + \frac{1}{n^2} + \mathcal{O}(\frac{1}{n^2})$
iv) $\sqrt[n]{\frac{n+1}{n}} - 1 = \frac{1}{n^2} + \mathcal{O}(\frac{1}{n^2})$.
v) $a_n \sim \frac{1}{n^2}$.
vi) La série $\sum \frac{1}{n^2}$ étant convergente, on en déduit la convergence de $\sum a_n$.

3. Séries alternées

Soit $u_n \geq 0$. La série $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n u_n$ s'appelle une *série alternée*. On a le critère de convergence suivant:

Théorème 3.1 (critère de Leibniz)**.** .
Soit (u_n) une suite décroissante de nombres positifs. Supposons que $\lim u_n = 0$. Alors la série alternée $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n u_n$ converge. Si S est la somme de cette série, alors
$$S_1 \leq S_3 \leq S_5 \leq \cdots \leq S \leq \cdots \leq S_4 \leq S_2 \leq S_0.$$
En plus, si $R_p = S - S_p = \sum_{n=p+1}^{\infty}(-1)^n u_n$ est le reste d'ordre p, alors on a
$$|R_p| \leq u_{p+1}.$$

Preuve. $S_{2n+1} - S_{2n-1} = u_{2n} - u_{2n+1} \geq 0$,
$S_{2n} - S_{2n-2} = u_{2n} - u_{2n-1} \leq 0$.
Donc (S_{2n+1}) est croissante et (S_{2n}) est décroissante. Comme
$$S_1 \leq S_{2n+1} = S_{2n} - u_{2n+1} \leq S_{2n} \leq S_0,$$
ces deux suites sont aussi bornées. Ainsi (S_{2n+1}) et (S_{2n}) convergent. Soit $S = \lim_n S_{2n}$. Dû a l'egalité $S_{2n+1} = S_{2n} - u_{2n+1}$ et au fait que $u_{2n+1} \to 0$, on obtient que $\lim S_{2n+1} = S + 0 = S$. On conclut que (S_n) converge vers S et que $S_{2n+1} \leq S \leq S_{2n}$ pour tout n.

En plus,

$$0 \geq R_{2p} = S - S_{2p} \geq S_{2p+1} - S_{2p} = -u_{2p+1}$$

et

$$0 \leq R_{2p-1} = S - S_{2p-1} \leq S_{2p} - S_{2p-1} = u_{2p}.$$

Ainsi $|R_p| = |S - S_p| \leq u_{p+1}$.

Exemple 3.2. La série harmonique alternée

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \cdots$$

converge. De même pour $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$.

On ne peut pas laisser tomber la condition de monotonie de la suite (u_n) dans le critère de Leibniz:

Exemple 3.3. La série

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n} + (-1)^n}$$

est une série alternée, dont le terme général tend vers 0, mais elle ne converge pas. En effet, soit $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}+(-1)^n}$; alors $u_n \geq 0$ et $u_n \to 0$. Notons que $u_n \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$.

$$u_{2n} - u_{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{2n}+1} - \frac{1}{\sqrt{2n+1}-1} = \frac{\sqrt{2n+1} - 1 - \sqrt{2n} - 1}{(\sqrt{2n}+1)\,(\sqrt{2n+1}-1)} =$$

$$= \frac{\frac{(2n+1)-2n}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n}} - 2}{(\sqrt{2n}+1)\,(\sqrt{2n+1}-1)} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n}} - 2}{(\sqrt{2n}+1)\,(\sqrt{2n+1}-1)} < 0.$$

Comme $\sqrt{2n} + 1 \leq \sqrt{2n+1} + \sqrt{2n+1}$ et $2 - \frac{1}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n}} > 1$ on obtient

$$u_{2n+1} - u_{2n} \geq \frac{1}{(\sqrt{2n}+1)\,(\sqrt{2n+1}-1)} \geq \frac{1}{2\sqrt{2n+1}\sqrt{2n+1}} = \frac{1}{2(2n+1)}.$$

Donc

$$-\sum_{n=2}^{2N+1} (-1)^n u_n \geq \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{2(2n+1)} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \infty.$$

Ainsi $S_{2N+1} \to -\infty$ diverge. Donc la série alternée diverge.

Ceci n'est pas une contradiction au critère Leibniz, car (u_n) n'est pas décroissante: on a $u_{2n} < u_{2n+1}$ (voir ci-dessus)

Exemple 3.4. La série $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sin n$ n'est pas une série alternée, car $\sin n$ oscille entre les valeurs -1 et 1. En effet, si $n \in]-\pi+2k\pi, 2k\pi[$; alors $\sin n < 0$ et si $n \in]2k\pi, \pi+2k\pi[$, $\sin n > 0$ ($k \in \mathbb{Z}$). Notons que chacun de ces intervalles I_k a une longueure de $\pi = 3,14159\cdots$; donc il y a au moins 2 entiers dans chaque I_k.
Est-ce que cette série converge? Non, car $\sin n$ ne tend pas vers 0: supposons au contraire que $\sin n \to 0$. Alors $\sin(n+1) \to 0$. Comme $\sin(n+1) = \sin n \cos 1 + \cos n \sin 1$ on obtient $(\cos n \sin 1)^2 = (\sin(n+1) - \sin n \cos 1)^2 \to 0$. Mais $(\cos n)^2 = 1 - (\sin n)^2 \to 1 - 0 = 1$. Une contradiction.

4. Séries absolument convergentes

Définition
On dit qu'une série $\sum a_n$ de nombres complexes est *absolument convergente*, si la série $\sum |a_n|$ est convergente.
On dit qu'une série $\sum a_n$ de nombres complexes est *semi-convergente*, si elle est convergente sans être absolument convergente.

La série harmonique alternée $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ montre qu'il existe des séries semi-convergentes.

Théorème 4.1. *Toute série absolument convergente est convergente.*

Preuve. Utilisons le critère de Cauchy. Soit $\sum a_n$ absolument convergente. Soit $\varepsilon > 0$ fixé. $\exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N, \forall p \geq 0$:

$$|a_n| + |a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+p}| < \varepsilon.$$

Par suite, pour $n \geq N, p \geq 0$ on a:

$$|a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| \leq |a_n| + |a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+p}| < \varepsilon.$$

Donc, d'après 1.9, $\sum a_n$ est convergente.

Par exemple $\sum \frac{e^{if(n)}}{n^2}$ est absolument convergente pour toute fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, car le module du terme général de cette série est $\frac{1}{n^2}$, et la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge.

Dans la suite, on va établir des critères de convergence absolue.

Théorème 4.2 (critère du majorant/minorant)**.** .
Soient (a_n) une suite de nombres complexes et $b_n \geq 0$.

1) Si $|a_n| \leq b_n$ pour tout $n \geq N$, et si $\sum b_n$ converge, alors $\sum a_n$ converge absolument.

2) Si $|a_n| \geq b_n \geq 0$ pour tout $n \geq N$ et si $\sum b_n$ diverge, alors $\sum a_n$ n'est pas absolument convergente.

(voir aussi le théorème 2.2).

Preuve. (1) D'après le critère de Cauchy 1.9, $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 > N$, tel que $\forall n \geq n_0, \forall p \in \mathbb{N}$: $b_{n+1} + \cdots + b_{n+p} < \varepsilon$. Pour ces indices on aura donc aussi

$$|a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+p}| \leq b_{n+1} + \cdots + b_{n+p} < \varepsilon.$$

Ainsi $\sum a_n$ est absolument convergente.

(2) découle de (1) (contraposée).

Exemple 4.3. • $\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^{n^3} e^{in}}{n^2+n}$ converge absolument car le module du terme général est égal à $\frac{1}{n^2+n}$, qu'on peut majorer par $\frac{1}{n^2}$.

• $\sum (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ n'est pas absolument convergente, car la série $\sum \frac{1}{n+1}$ associée au minorant du module $|a_n| = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \geq \frac{1}{n+1}$ diverge. Cependant cette série alternée converge d'après le critère de Leibniz. Donc $\sum (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ est semi-convergente.

Rappel:

Soit $x_n \in \bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. $\bar{\mathbb{R}}$ est un ensemble totalement ordonné,i.e. $\forall x, y \in \bar{\mathbb{R}}$ on a $x \leq y$ ou $y \leq x$. Toute partie non-vide dans $\bar{\mathbb{R}}$ admet une borne supérieure et inférieure.
Notation:
$\limsup\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{k\geq n} x_k$ (limite supérieure de la suite (x_n))
$\liminf\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \inf\limits_{k\geq n} x_k$ (limite inférieure de la suite (x_n))
On a: $\liminf x_n \leq \limsup x_n$ et (x_n) "converge" vers $x \in \bar{\mathbb{R}}$ si et seulement si $\liminf x_n = \limsup x_n = x$.
$\liminf x_n$ est le plus petit point d'accumulation de la suite (x_n) dans $\bar{\mathbb{R}}$, $\limsup x_n$ est le plus grand point d'accumulation de la suite (x_n) dans $\bar{\mathbb{R}}$.

exemple: $\liminf 2(-1)^n + 1 = -1$ et $\limsup 2(-1)^n + 1 = 3$.

Théorème 4.4 (Règle de Cauchy, critère de la racine)**. .**
Soit (a_n) une suite dans $\mathbb{C}$.
1) Supposons qu'il existe $q \in]0, 1[$ tel que $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q < 1$ pour tout $n \geq N$; i.e. $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} < 1$. Alors la série $\sum a_n$ est absolument convergente.

2) Supposons que $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$ pour une infinité d'indices n. Alors $\sum a_n$ diverge.
3) Si $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ on ne peut rien conclure.

Notons que l'hypothèse (2) est satisfaite si par exemple $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} > 1$. Cette dernière condition étant plus forte cependant (voir exemple $a_n = 1$ pour tout n).

Résumé:

$\limsup \sqrt[n]{\lvert a_n \rvert} < 1 \Longrightarrow$ convergence de $\sum \lvert a_n \rvert$;
$\limsup \sqrt[n]{\lvert a_n \rvert} > 1 \Longrightarrow$ divergence de $\sum \lvert a_n \rvert$;
$\limsup \sqrt[n]{\lvert a_n \rvert} = 1 \Longrightarrow$???

Preuve. (1) $\forall n \geq N$: $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q \Longrightarrow |a_n| \leq q^n$. $\sum q^n$ est une majorante qui converge. Donc $\sum |a_n|$ convergente.
(2) $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$ pour $n \Longrightarrow |a_n| \geq 1$. Donc, (a_n) ne converge pas vers 0; ainsi $\sum a_n$ diverge.
(3) $a_n = \frac{1}{n}, b_n = \frac{1}{n^2}$; $\sqrt[n]{|a_n|} \to 1$ et $\sqrt[n]{|b_n|} \to 1$; mais $\sum a_n$ diverge et $\sum b_n$ converge.

Exemple 4.5. Déterminer tous les $z \in \mathbb{C}$ tel que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} z^n$ soit absolument convergente.

Soit $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} z^n$.

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n |z| \to e|z| < 1 \Longleftrightarrow |z| < \frac{1}{e}.$$

Donc la série $\sum a_n$ est convergente si $|z| < \frac{1}{e}$ (disque ouvert de centre 0 et de rayon $\frac{1}{e}$).
Si $|z| > \frac{1}{e}$, on a: $\varepsilon_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n |z| \to e|z| > 1$. Donc $\varepsilon_n \geq 1$ pour presque tous les n. Ainsi $|a_n| = \varepsilon_n^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} |z|^n \geq 1$ pour presque tous les n. Donc $\sum a_n$ diverge pour $|z| > \frac{1}{e}$.
Si $|z| = \frac{1}{e}$ on obtient:

$$|a_n| = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \left(\frac{1}{e}\right)^n \Longrightarrow \log|a_n| = n^2 \log\left(1+\frac{1}{n}\right) + n\log\frac{1}{e} =$$

$$= n[n\log(1+\tfrac{1}{n}) - 1] = n[n(\tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{n}\right)^2 + \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{n}\right)^3 + \cdots) - 1] =$$

$$= n\left[1 - \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{n} + \tfrac{1}{3}\tfrac{1}{n^2} + \cdots - 1\right] =$$

$$= -\tfrac{1}{2} + [\tfrac{1}{3}\tfrac{1}{n} + \cdots] \to -\tfrac{1}{2}.$$

Donc $|a_n| \to e^{-\frac{1}{2}} \neq 0$. Ainsi $\sum a_n$ diverge.

Théorème 4.6 (Règle d'Alembert, critère du quotient)**.** .
Soit (a_n) *une suite dans* $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.
(1) Supposons qu'il existe $q \in]0,1[$ *tel que* $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q < 1$ *pour tout* $n \geq N$*;*
i.e. $\limsup \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$. *Alors la série* $\sum a_n$ *est absolument convergente.*

(2) Supposons que $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$ *pour tout* $n \geq N$. *Alors* $\sum a_n$ *diverge.*
(3) Si $\limsup \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 1$ *on ne peut rien conclure.*

Notons que l'hypothèse (2) est satisfaite si $\liminf \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1$. Cette dernière condition étant plus forte cependant (exemple $a_n = 1$ pour tout n).

Résumé:

$\limsup \left\|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\| < 1 \Longrightarrow$ convergence de $\sum \|a_n\|$;
$\liminf \left\|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\| > 1 \Longrightarrow$ divergence de $\sum \|a_n\|$;
$\limsup \left\|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\| = 1 \Longrightarrow$???

Attention

Il existe des séries $\sum a_n$ qui convergent absolument quoiqu'on a $\limsup \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$. Voir exemple 4.10.

Preuve. (1) $\forall n \geq N: \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq q \Longrightarrow |a_{N+1}| \leq q|a_N| \Longrightarrow |a_{N+2}| \leq q|a_{N+1}| \leq q^2|a_N|$. Par récurrence $\forall p \in \mathbb{N}$: $|a_{N+p}| \leq q^p|a_N|$. Ainsi $\forall n \geq N$:

$$|a_n| \underset{n:=N+p}{\leq} \underbrace{\left(|a_N|\, q^{-N}\right)}_{:=C} q^n.$$

Maintenant $\sum Cq^n$ est une majorante qui converge. Donc $\sum |a_n|$ convergente.

(2) Hypothèse $\Longrightarrow |a_p| \leq |a_{p+1}| \leq |a_{p+2}| \leq \cdots$. Donc (a_n) ne converge pas vers 0. Ainsi $\sum a_n$ diverge.
(3) $a_n = \frac{1}{n}, b_n = \frac{1}{n^2}$.

Exemple 4.7. Trouver tous les $z \in \mathbb{C}$ tel que la série $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{3} z^n$ soit absolument convergente.

Soit $a_n = \binom{n}{3} z^n$. Alors

$$q_n := \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{\binom{n+1}{3}|z|^{n+1}}{\binom{n}{3}|z|^n} = \frac{\frac{(n+1)n(n-1)}{3!}}{\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}}|z|$$
$$= \frac{n+1}{n-2}|z| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} |z|.$$

Donc $q_n \leq q < 1$ pour presque tous les indices n si $|z| < 1$. (ou bien $\limsup q_n = |z| < 1 \Longleftrightarrow |z| < 1$). Donc la série $\sum a_n$ converge si $|z| < 1$.
Si $|z| \geq 1$, alors $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{n+1}{n-2}|z| \geq \frac{n+1}{n-2} \geq 1$ pour tout n. Donc la série $\sum a_n$ diverge.

Comparaison des règles de Cauchy et d'Alembert:

Theorem 4.8. *Soit (a_n) une suite de nombres complexes. Alors*

$$\liminf \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \liminf \sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup \sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.$$

Preuve. Soit $a = \liminf \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$. Si $a = 0$, rien n'est à montrer. Soit donc $a \neq 0$. Choisir $0 < \varepsilon < a$. Hypothèse $\Longrightarrow \exists N$ tel que $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > a - \varepsilon \; \forall n \geq N$. Alors, pour ces indices on a:

$$\left|\frac{a_n}{a_N}\right| = \left|\frac{a_n}{a_{n-1}}\right| \left|\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\right| \cdots \left|\frac{a_{N+1}}{a_N}\right| > (a-\varepsilon)^{(n-N)}.$$

Donc

$$\sqrt[n]{|a_n|} > (a-\varepsilon) \sqrt[n]{|a_N|} \sqrt[n]{\tfrac{1}{(a-\varepsilon)^N}}.$$

Comme $\sqrt[n]{C} \to 1$ pour tout $C > 0$, on a $\liminf \sqrt[n]{|a_n|} \geq a - \varepsilon$. Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on peut laisser tendre $\varepsilon \to 0$ et donc

$$\liminf \sqrt[n]{|a_n|} \geq a = \liminf \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.$$

Analogue pour $\limsup$.

Exemple 4.9. Déterminer $\lim \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.
Soit $a_n = \frac{n!}{n^n}$. Alors

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{n!} = \frac{(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \\ &= \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} \to \frac{1}{e}.\end{aligned}$$

Ainsi

$$\frac{1}{e} = \liminf \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \liminf \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{e}.$$

Donc $\sqrt[n]{a_n} \to \frac{1}{e}$.

Exemple 4.10. Voici un exemple d'une suite (a_n) où $\lim \sqrt[n]{a_n}$ existe, mais pas la limite du quotient $\frac{a_{n+1}}{a_n}$.
Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $0 < a < b$. Posons $a_{2n} = a^n b^{n+1}$ et $a_{2n+1} = a^{n+1} b^{n+1}$. Alors

$$\sqrt[2n]{a_{2n}} = a^{1/2} b^{1/2+1/(2n)} \to \sqrt{ab}$$
$$\sqrt[2n+1]{a_{2n+1}} = a^{(n+1)/(2n+1)} b^{(n+1)/(2n+1)} \to \sqrt{ab}.$$

D'où $\sqrt[n]{a_n} \to \sqrt{ab}$. Mais $\frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} = a$ et $\frac{a_{2n}}{a_{2n-1}} = b$. Donc $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ n'a pas de limite.

En prenant $a = \frac{2}{3}$ et $b = \frac{4}{3}$, on obtient

$$\frac{2}{3} = \liminf \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < \lim \sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt{\frac{8}{9}} < 1 < \limsup \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{4}{3};$$

Donc la série $\sum a_n$ converge (d'après le théorème de la racine de Cauchy), quoique $\limsup \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1$.

On a le rafinement suivant de la règle d'Alembert.

Théorème 4.11 (Critère de Raabe)**.** .
Soit (a_n) une suite dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ et soit $\underline{\beta > 1}$.
(1) Si $\forall n \geq n_0$ on a $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq 1 - \frac{\beta}{n}$, alors la série $\sum a_n$ est absolument convergente.
(2) Si $\forall n \geq n_0$ on a $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1 - \frac{1}{n}$, alors la série $\sum a_n$ n'est pas absolument convergente.

<u>Attention</u>
Il existe des séries semi-convergentes, quoique $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1 - \frac{1}{n}$.
En effet, prenons $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$. Alors

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \geq 1 - \frac{1}{n}.$$

Preuve. (1) Hypothèse $\Longrightarrow n|a_{n+1}| \leq n|a_n| - \beta|a_n| \; \forall n \geq n_0$. Ainsi

$$(\beta - 1)|a_n| \leq (n-1)|a_n| - n|a_{n+1}|.$$

$\beta > 1 \Longrightarrow 0 < (n-1)|a_n| - n|a_{n+1}| \Longrightarrow (n-1)|a_n| > n|a_{n+1}| \Longrightarrow (n|a_{n+1}|)_{n \geq n_0}$ décroissante et bornée inférieurement. Donc $\lim n|a_{n+1}|$ existe. Ainsi la série téléscopique $\sum[(n-1)|a_n| - n|a_{n+1}|]$ converge. Comme

$$(\beta - 1)|a_n| \leq (n-1)|a_n| - n|a_{n+1}|,$$

la série $\sum(\beta - 1)|a_n|$ converge et donc aussi $\sum |a_n|$.

(2) Hypothèse $\Longrightarrow n|a_{n+1}| \geq (n-1)|a_n| > 0 \; \forall n \geq n_0$. Donc $(n|a_{n+1}|)_{n \geq n_0}$ croissante $\Longrightarrow n|a_{n+1}| \geq \varepsilon > 0 \; \forall n \geq n_0 \Longrightarrow |a_{n+1}| \geq \frac{\varepsilon}{n+1} \quad \forall n \geq n_0$. Donc $\sum |a_n|$ diverge, car $\sum \frac{1}{n+1}$ diverge.

Applications

Proposition 4.12 (séries de Riemann)**.** .
Soit $\alpha > 0$. Alors la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Preuve. Notons d'abord qu'on ne peut pas appliquer les règles de Cauchy et d'Alembert, car $\sqrt[n]{n^{-\alpha}} = \frac{1}{n^{\alpha/n}} \to 1$ et $\frac{n^\alpha}{(n+1)^\alpha} \to 1$.
Montrons cependant que si $\alpha > 1$ alors il existe $\beta > 1$ et n_0 tel que

$$\Delta(n) := \frac{n^\alpha}{(n+1)^\alpha} \leq 1 - \frac{\beta}{n} \quad \forall n \geq n_0.$$

Fixons $\alpha > 1$ et soit $1 < \beta < \alpha$. Posons $x = 1/n$ et considérons la fonction

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^\alpha} + \beta x.$$

Alors f est continûment différentiable sur $[0, \infty[$, $f(0) = 1$ et $f(1) = 2^{-\alpha} + \beta > 1$. Comme $f'(0) = \beta - \alpha < 0$, on voit que f est décroissante sur $[0, x_0]$ pour un certain x_0 avec $0 < x_0 < 1$. Ainsi $f(x) \leq 1$ sur $[0, x_0]$ ce qui entraine que $\Delta(n) + \frac{\beta}{n} = f(\frac{1}{n}) \leq 1$ pour $n \geq n_0$. Donc $\Delta(n) \leq 1 - \frac{\beta}{n}$ et on peut appliquer le critère de Raabe pour déduire que $\sum n^{-\alpha}$ converge si $\alpha > 1$.

Réciproquement, si $0 < \alpha \leq 1$, alors $\sum \frac{1}{n}$ est une minorante de $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ qui diverge. Donc $\sum n^{-\alpha}$ diverge.

5. Sommation partielle d'Abel

Intégration par parties:
$\int_a^b u'v dx + \int_a^b uv' dx = (uv)(b) - (uv)(a)$
version discrète:

Proposition 5.1. *Soit $S_0, S_1, S_2, \ldots, S_p \in \mathbb{C}$, $a_0, a_1, \ldots, a_p, a_{p+1} \in \mathbb{C}$. Alors*

$$\sum_{n=0}^{p} S_n(a_{n+1} - a_n) + \sum_{n=1}^{p} a_n(S_n - S_{n-1}) = S_p a_{p+1} - S_0 a_0.$$

En particulier, si $S_n = b_0 + b_1 + \cdots + b_n$, alors

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{p} a_n b_n &= \sum_{n=0}^{p} S_n(a_n - a_{n+1}) + S_p a_{p+1} \\ &= \sum_{n=0}^{p-1} S_n(a_n - a_{n+1}) + S_p a_p. \end{aligned}$$

Preuve.

$$\sum_{j=0}^{p} S_j(a_{j+1} - a_j) = \sum_{j=0}^{p} S_j a_{j+1} - \sum_{j=0}^{p} S_j a_j =$$

$$\underset{j+1=n}{=} \sum_{n=1}^{p+1} S_{n-1} a_n - \sum_{n=0}^{p} S_n a_n =$$

$$= \sum_{n=1}^{p} a_n(S_{n-1} - S_n) + S_p a_{p+1} - S_0 a_0.$$

Théorème 5.2 (Règle d'Abel-Dirichlet). .
Soient $a_n \geq 0$ *et* $b_n \in \mathbb{C}$ *tel que*
i) la suite (a_n) *est décroissante et* $\lim a_n = 0$;
ii) $\exists M > 0, \ \ \forall m \geq n \geq 0$:

$$|b_n + b_{n+1} + \cdots + b_m| \leq M.$$

Alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ *est convergente et*

$$\forall q: \ |R_q| \leq M a_{q+1}.$$

Preuve. Soit $S_n = b_0 + b_1 + \cdots + b_n, n \geq 1$. Alors
$\tilde{S}_p := \sum_{n=0}^{p} a_n b_n = a_p S_p + \sum_{n=0}^{p-1} S_n(a_n - a_{n+1})$.
$|a_p S_p| \leq |a_p| \ M \to 0$ si $p \to \infty$;
$\sum_{n=0}^{p-1} |S_n|(a_n - a_{n+1}) \leq M \sum_{n=0}^{p-1}(a_n - a_{n+1}) = M(a_0 - a_p) \leq M a_0$.
Donc la série $\sum_{n=0}^{\infty} S_n(a_n - a_{n+1})$ est absolument convergente, donc convergente.
On déduit que $\tilde{S}_p$ est convergente; i.e. $\sum a_n b_n$ converge.
En commençant avec l'indice $n = q < p$ (au lieu de $n = 0$), on obtient de la même façon que

$$|\sum_{n=q+1}^{p} a_n b_n| \leq |a_p S_p| + M a_{q+1}.$$

Avec $p \to \infty$, on obtient $|R_q| \leq M a_{q+1}$.

Remarque
(1) Le critère de Leibniz concernant les séries alternées est un cas spécial: En effet, si $b_n = (-1)^n$ alors $|\sum_{j=n}^{m} b_j| \leq 2$. Donc $\sum b_n a_n$ converge si $a_n \searrow 0$.

(2) La règle d'Abel-Dirichlet est une règle pour étudier la convergence de séries dont le terme général change le signe ou est non réel. En effet si $a_n \searrow 0$ et $b_n \geq 0$, alors l'hypothèse $|b_n + b_{n+1} + \cdots + b_m| \leq M$ donne immédiatement la convergence de la série$\sum a_n b_n$, car

$$S_q = \sum_{n=0}^{q} a_n b_n \leq a_0 \sum_{n=0}^{q} b_n \leq a_0 M.$$

La suite (S_n) est donc majorée et croissante; donc elle converge et on retrouve aussi $R_q \leq a_{q+1} M$.

Exemple 5.3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer tous les $\theta \in \mathbb{R}$ pour lesquels la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} e^{ni\theta}$$

converge.

Preuve. Soit $b_n = e^{ni\theta}$. Pour $n \leq m$ on a :

$$|b_n + b_{n+1} + \cdots + b_m| = |e^{ni\theta} + e^{(n+1)i\theta} + \cdots + e^{mi\theta}| =$$
$$= |e^{ni\theta}| \ |1 + e^{i\theta} + e^{2i\theta} + \cdots + e^{(m-n)i\theta}| =$$

$$= \left| \frac{1 - e^{(m-n+1)i\theta}}{1 - e^{i\theta}} \right| \text{ si } e^{i\theta} \neq 1.$$

Si $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$, on a

$$|b_n + b_{n+1} + \cdots + b_m| \leq \frac{2}{|1 - e^{i\theta}|} =: C$$

Donc, d'après la règle d'Abel-Dirichlet, la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} e^{ni\theta}$ converge si $\alpha > 0$ et $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$. Cette série est absolument convergente si $\alpha > 1$ et semi-convergente si $\alpha \in]0, 1[$. Comme $n^{-\alpha} \not\to 0$ si $\alpha \leq 0$, la série diverge dans ce cas.

Bien sûr, on peut remplacer dans l'exemple précédent $n^{-\alpha}$ par a_n, si $a_n \geq 0$ et $a_n \searrow 0$.

Corollaire 5.4. *Soit (a_n) une suite décroissante de nombres positifs tel que $a_n \searrow 0$. Alors les séries de Fourier*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\theta) \ \textit{et} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin(n\theta)$$

convergent $\forall \theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$.

Preuve. Utilisons que $\sum (x_n + iy_n)$ converge $\iff \sum x_n$ et $\sum y_n$ convergent $(x_n, y_n \in \mathbb{R})$ et que $e^{is} = \cos s + i \sin s$, $s \in \mathbb{R}$.

6. Produits de deux séries

$(a_0 + a_1)(b_0 + b_1) = a_0 b_0 + a_0 b_1 + a_1 b_0 + a_1 b_1;$

$\left(\sum_{j=0}^n a_j\right)(b_0 + b_1) = \sum_{j=0}^n a_j b_0 + \sum_{j=0}^n a_j b_1;$

$$\left(\sum_{j=0}^n a_j\right) \left(\sum_{j=0}^n b_j\right) = \sum_{k=0}^n \left(\sum_{j=0}^n a_j b_k\right) = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^n a_j b_k = \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^n a_j b_k.$$

Ces somme s'écrivent aussi sous la forme d'une somme double:

$$S := \sum_{\substack{0 \leq j \leq n \\ 0 \leq k \leq n}} a_j b_k = \sum_{0 \leq j,k \leq n} a_j b_k = \sum_{j,k=0}^n a_j b_k.$$

<u>généralisation</u>: soit $(a_{j,k})_{0 \leq j,k \leq n}$ une matrice carrée d'ordre $n+1$ de nombres complexes. Notons que j est l'indice ligne et k est un indice colonne. Alors la somme sur tous ces $(n+1)^2$ nombres s'écrit:

$s_1 = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^n a_{j,k}$ (=addition d'abord de tous les nombres dans la k-me colonne, puis addition de ces n sommes)

$s_2 = \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{n} a_{j,k}$ (=addition d'abord de tous les nombres dans la j-me colonne, puis addition de ces n sommes)

$s_3 = \sum_{m=0}^{n} \sum_{i=0}^{m} a_{i,m-i}$ (=addition selon les diagonales).

$Q_3 = \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{m} a_{n-i,i+n-m}$. Alors $s_1 = s_2 = s_3 + Q_3$.

$$
\begin{array}{ccccccc}
\boxed{a_{0,0}} & a_{0,1} & \boxed{a_{0,2}} & \cdots & a_{0,k} & \cdots & \boxed{a_{0,n}} \\
a_{1,0} & \boxed{a_{1,1}} & & \cdots & & \boxed{a_{1,n-1}} & a_{1,n} \\
\boxed{a_{2,0}} & & & \cdots & \swarrow & & \\
\vdots & & & \swarrow & \nearrow & & \vdots \\
a_{j,0} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{j,k} & \cdots & a_{j,n} \\
\vdots & & \swarrow & \nearrow & & & \vdots \\
\vdots & & & & & & \vdots \\
\cdots & \boxed{a_{n-1,2}} & \nearrow & \cdots & & \cdots & a_{n-1,n} \\
\boxed{a_{n,0}} & a_{n,1} & \cdots & \cdots & a_{n,k} & a_{n,n-1} & a_{n,n}
\end{array}
$$

Si maintenant $a_{j,k} = a_j b_k$ on obtient

$$S = (\sum_{j=0}^{n} a_j)\,(\sum_{k=0}^{n} b_k) = \sum_{m=0}^{n} \sum_{i=0}^{m} a_i b_{m-i} + \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{m} a_{n-i} b_{i+n-m}$$

On a aussi

$$S = \sum_{0 \le m \le n} \sum_{\substack{0 \le p,q \le n \\ p+q=m}} a_p b_q + \sum_{n+1 \le m \le 2n} \sum_{\substack{0 \le p,q \le n \\ p+q=m}} a_p b_q$$

Definition 6.1. *Soient $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ deux séries sur $\mathbb{C}$. On appelle série produit (ou [1] somme resp. série de Cauchy) la série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ où*

$$c_n = \sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}.$$

Théorème 6.1. *Si les séries $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ de nombres complexes sont absolument convergentes, alors la somme de Cauchy*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}$$

[1] dans la littérature on dit produit de Cauchy

converge absolument et l'on a:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right).$$

Preuve.
$S_n = a_0 + \cdots + a_n$, $S_n \to S$,
$T_n = b_0 + \cdots + b_n$, $T_n \to T$,
$P_n = c_0 + \cdots + c_n$.
A montrer que $P_n \to ST$.

Cas 1 $\forall n : a_n \geq 0, b_n \geq 0$. D'òu $c_n \geq 0$.
On a $P_n \leq S_n T_n \leq ST$.
La suite (P_n) est croissante et majorée, donc convergente: $P_n \to P$.
On a $P_n \leq S_n T_n \leq P_{2n}$.

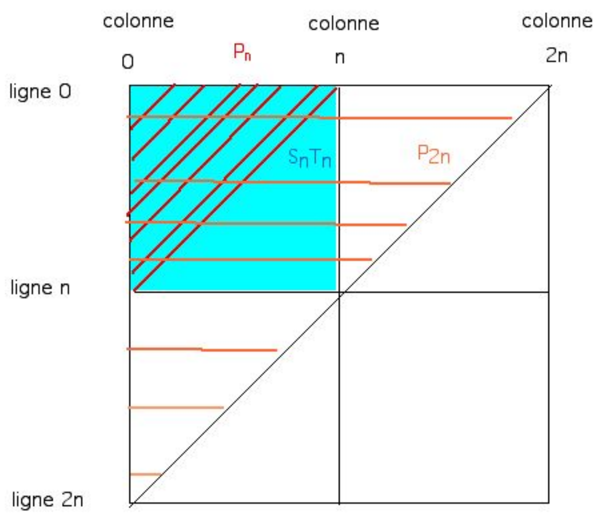

Figure 2. sommation lelong les diagonales

Donc en faisant $n \to \infty$, on a: $P \leq ST \leq P$. Donc $P_n \to ST$.

Cas 2 $\forall n : a_n \in \mathbb{C}, b_n \in \mathbb{C}$.
On pose
$S'_n = |a_0| + \cdots + |a_n|$, $S'_n \to S'$,
$T'_n = |b_0| + \cdots + |b_n|$, $T'_n \to T'$,
$P'_n = c'_0 + \cdots + c'_n$ où $c'_n = \sum_{p=0}^{n} |a_p b_{n-p}|$.
D'après le premier cas, $P'_n \to P'$ avec $P' = S'T'$. Ainsi

$$|S_n T_n - P_n| = \Big| \sum_{\substack{0 \leq p,q \leq n \\ p+q > n}} a_p b_q \Big| \leq \sum_{\substack{0 \leq p,q \leq n \\ p+q > n}} |a_p b_q| =$$
$$= S'_n T'_n - P'_n \to S'T' - P' = 0.$$

Or, $P_n = S_n T_n - (S_n T_n - P_n) \to ST - 0 = ST$.

Donc la série $\sum c_n$ est convergente et sa somme est ST. En plus, $|c_n| \leq c'_n$. La convergence de $\sum c'_n$ implique donc la convergence absolue de $\sum c_n$.

Remarque. Si les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ ne convergent pas absolument, alors la série de Cauchy peut être divergente.

Exemple 6.2. $a_n = b_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}, n \geq 1$. Alors $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont sémi-convergentes. On a

$$c_n = \sum_{p=1}^{n} a_p b_{n-p+1} = \sum_{p=1}^{n} \frac{(-1)^{p-1}}{\sqrt{p}} \frac{(-1)^{n-p}}{\sqrt{n-p+1}} =$$

$$= (-1)^{n-1} \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{p(n-p+1)}}.$$

Or, pour $x \in \mathbb{R}$, $x(n-x+1) \leq (n+1)^2/2$. D'où $\sqrt{p(n-p+1)} \leq (n+1)/2$. Ainsi

$$|c_n| = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{p(n-p+1)}} \geq \sum_{p=1}^{n} \frac{2}{n+1} = \frac{2n}{n+1} \to 2$$

Donc $|c_n| \not\to 0$. Donc $\sum c_n$ diverge.

FIN DU CHAPITRE 1

Théorème 6.3 (Règle de Raabe et de Duhamel)**.** *Soit* (u_n) *une suite de nombres strictement positifs. On suppose qu'il existe* $\beta \in \mathbb{R}$ *tel que*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{1}{\beta} + \mathcal{O}(\frac{1}{n}).$$

Si $\beta < 1$, *alors la série* $\sum u_n$ *diverge;*
Si $\beta > 1$, *alors la série* $\sum u_n$ *converge;*
Si $\beta = 1$, *alors la série converge ou diverge selon les cas.*

Preuve.

2 Intégrales impropres

7. Généralités

Soit $R[a,b]$ l'ensemble des fonctions intégrables (au sens de Riemann) sur l'interval compact (=segment) $[a,b]$. Par définition, ces fonctions sont toujours bornées sur $[a,b]$; i.e. $\forall f \in R[a,b],\ \exists M > 0$ tq. $|f(x)| \le M\ \forall x \in [a,b]$.

Definition 7.1. *Soit $I \subseteq R$ un intervalle quelconque. On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{C}$ est localement intégrable sur I si elle est intégrable sur tout interval compact $[a,b] \subseteq I$; notation: $f \in R(I)_{\text{loc}}$.*
Exemple 7.1.
p.ex. $I = [a,\infty[, I =]a,b[, I = \mathbb{R}$ etc.
a) Toute fonction continue $f : I \to \mathbb{C}$ est localement intégrable sur I;
b) Toute fonction monotone $f : I \to \mathbb{R}$ est localement intégrable sur I;
c) $f \in R[a,b] \Longrightarrow f$ localement intégrable sur $I = [a,b]$;
d) La fonction de Dirac $d(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Q}$ et $d(x) = 0$ si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ n'est pas localement intégrable sur $\mathbb{R}$.
e) La fonction $1/x$ est localement intégrable sur $]0,1]$.

Proposition 7.2. *Soit $a,b \in \mathbb{R}$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ bornée et $f \in R(]a,b[)_{\text{loc}}$. Alors $f \in R[a,b]$.*

Preuve. Par hypothèse, $|f(x)| \le M\ \forall x \in [a,b]$. Soit $\varepsilon > 0$. Choisir $a' > a$ si proche de a tel que $M|a' - a| \le \varepsilon/6$. De même, choisir $b' < b$ si proche de b telque $M|b' - b| \le \varepsilon/6$. On a : $f \in R(]a,b[)_{\text{loc}} \Longrightarrow f \in R[a',b']$. D'après le critère de Riemann il existe une décomposition

$$Z = \{a' = t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b'\}$$

de $[a',b']$ tel que $|S_Z(f) - s_Z(f)| < \varepsilon/3$, où

$$S_Z(f) = \textstyle\sum_{j=1}^{n-1} |I_j| \sup_{I_j} f \text{ et } s_Z(f) = \sum_{j=1}^{n-1} |I_j| \inf_{I_j} f,$$

et $I_j = [t_j, t_{j+1}]$ (sommes de Darboux.)
Soit $t_0 = a$, $t_{n+1} = b$ et $Z' = \{t_0 < t_1 < \cdots < t_n < t_{n+1}\}$ une décomposition de $[a,b]$. Notons que pour $I_0 = [t_0,t_1]$ on a $|I_0||\sup_{I_0} f| \le |a' - a|\ M \le \varepsilon/6$. De même pour l'infimum et pour $I_n = [b',b]$. Alors $|S_{Z'}(f) - s_{Z'}(f)| < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon$. Donc $f \in R[a,b]$.

Proposition 7.3. *Soit $f \in R(I)_{\text{loc}}$ et soit $a \in I$ fixé. Alors la fonction $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, $x \in I$, est continue sur I.*

Preuve. Soit $x_0 \in I$. Montrons que F est continue en x_0.

$$|F(x) - F(x_0)| = \Big|\int_a^x f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt\Big| =$$

$$= \left| \int_{x_0}^{x} f(t)dt \right| \leq \left| \int_{x_0}^{x} |f(t)|dt \right|.$$

$f \in R(I)_{\text{loc}} \Longrightarrow \exists M > 0, \exists J =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[: \ |f(t)| \leq M \ \forall t \in J \cap I$. Donc, pour $x \in J \cap I$ (=intervalle) on a:

$$|F(x) - F(x_0)| \leq M|x - x_0|.$$

Ainsi, si $x \to x_0$, on obtient $F(x) \to F(x_0)$.

Si f est continue, alors le prop. 7.3 s'améliore:

Proposition 7.4. *Soit $f : I \to \mathbb{C}$ continue et soit $a \in I$ fixé. Alors $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, $x \in I$, est dérivable sur I de dérivée f; i.e. $\forall x \in I$, $F'(x) = f(x)$.*

Preuve. Soit $x_0 \in I$. Pour $x \in I$, $x \neq x_0$, on a:

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) = \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^{x} f(t)dt - f(x_0)$$

$$= \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^{x} (f(t) - f(x_0)) \, dt.$$

Soit $\varepsilon > 0$. $f \in C(I) \Longrightarrow \exists J =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[: |f(t) - f(x_0)| < \varepsilon \ \forall t \in J \cap I$. Donc pour $x \in J \cap I$ on a:

$$\left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| \leq \frac{1}{|x - x_0|} \left| \int_{x_0}^{x} \underbrace{|f(t) - f(x_0)|}_{<\varepsilon} dt \right| \leq \varepsilon$$

Exemple 7.5. $I = \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

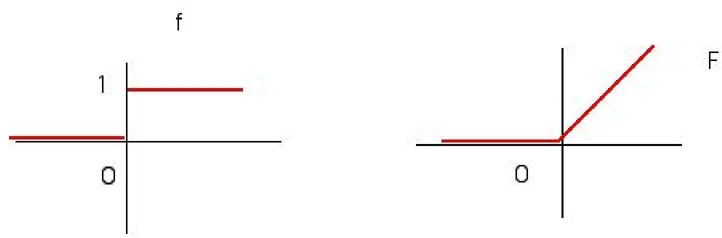

FIGURE 3. primitive non dérivable

Soit $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Definition 7.2. *Soient $a \in \mathbb{R}, b \in \bar{\mathbb{R}}$ tels que $a < b$. Soit $I = [a, b[$ et $f \in R(I)_{\text{loc}}$. On dit que l'intégrale impropre $\int_a^{\to b} f(t)dt$ est convergente si $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, $x \in I$, possède une <u>limite finie</u> quand x tend vers b, $x < b$. S'il n'en est pas ainsi, on dit que l'intégrale impropre est divergente.*

Si la limite $\lim_{x\to b^-} F(x)$ existe dans $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ ou $\bar{\mathbb{R}}$, on note

$$\int_a^{\to b} f(t)dt = \lim_{x\to b^-}\int_a^x f(t)dt$$

(c'est la valeur de l'intégrale impropre.)

Chercher la nature d'une intégrale impropre, c'est chercher si elle convergente ou divergente.

Exemple 7.6. • Discuter la nature de $\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2}$.

i) $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc $f \in R([0,\infty[)_{\text{loc}}$.
ii) $\int_0^x f(t)dt = \arctan x \to \pi/2$ si $x \to \infty$.
Ainsi cette intégrale est convergente. Sa valeur est:

$\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} = \pi/2$.

• Discuter la nature de $\int_0^\infty \frac{dt}{1+t}$.

i) $f(t) = \frac{1}{1+t}$ est continue sur $[0,\infty[$, donc $f \in R([0,\infty[)_{\text{loc}}$.
ii) $\int_0^x f(t)dt = \log(1+x) \to \infty$ si $x \to \infty$.

Ainsi cette intégrale est divergente. Sa valeur est

$$\int_0^\infty \frac{dt}{1+t} = \infty.$$

• Discuter la nature de $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t}}dt$.

i) $f(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t}}$ est continue sur $[0,1[$; donc $f \in R([0,1[\,)_{\text{loc}}$.
ii) $\int_0^x f(t)dt = 2 - 2\sqrt{1-x} \to 2$ si $x \to 1^-$.

Ainsi cette intégrale est convergente. Sa valeur est

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t}}dt = 2.$$

• Discuter la nature de $\int_0^1 \frac{1}{1-t}dt$.

i) $f(t) = \frac{1}{1-t}$ est continue sur $[0,1[$; donc $f \in R([0,1[\,)_{\text{loc}}$.
ii) $\int_0^x \frac{1}{1-t}dt = -\log(1-x) \to \infty$ si $x \to 1^-$.

Ainsi cette intégrale est divergente. Sa valeur est $\int_0^1 \frac{1}{1-t}dt = \infty$.

• Discuter la nature de $\int_0^\infty \cos t \; dt$.

i) $f(t) = \cos t$ est continue sur $[0, \infty[$; donc $f \in R([0, \infty[\;)_{\text{loc}}$.
ii) $\int_0^x \cos t \; dt = \sin x$. Mais la limite de $\sin x$ si $x \to \infty$ n'existe pas. Donc l'intégrale impropre $\int_0^\infty \cos t \; dt$ est divergente.

Remarque:

De façon analogue on définit les intégrales impropres $\displaystyle\int_{\to a}^{b} f(t)dt$ où $f \in R(]a, b])_{\text{loc}}$, $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, b \in \mathbb{R}$.

Proposition 7.7. *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $f \in R[a, b]$. Alors l'intégrale impropre $\int_a^{\to b} f(t)dt$ est convergente et on a*

$$\int_a^{\to b} f(t)dt = \int_a^b f(t)dt.$$

Preuve. Soit $x \in [a, b]$ et $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. D'après la proposition 7.3, $F : [a, b] \to \mathbb{C}$ est continue. Par suite $F(b) = \lim_{x \to b-} F(x)$.

Proposition 7.8. *Soit $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ et $f \in R([a, b[)_{\text{loc}}$. Soit $a' \in]a, b[$. Alors les intégrales impropres $\int_a^{\to b} f(t)dt$ et $\int_{a'}^{\to b} f(t)dt$ ont même nature. Si elles convergent, alors*

$$\int_a^{\to b} f(t)dt = \int_a^{a'} f(t)dt + \int_{a'}^{\to b} f(t)dt.$$

Preuve. Découle de la relation de Chasles

$$\int_a^{x} f(t)dt = \int_a^{a'} f(t)dt + \int_{a'}^{x} f(t)dt$$

si $a < a' < x$.

Definition 7.3. *Soient $a, b \in \bar{\mathbb{R}}$ et $a < b$. Si $f \in R(]a, b[)_{\text{loc}}$ alors on peut considérer les intégrales "double" impropres*

$$\int_{\to a}^{\to b} f(t)dt.$$

On dit qu'une telle intégrale converge si pour un $c \in]a, b[$ les deux intégrales impropres $\int_{\to a}^{c} f(t)dt$ et $\int_c^{\to b} f(t)dt$ convergent. La valeur de cette intégrale double impropre est alors

$$\int_{\to a}^{c} f(t)dt + \int_c^{\to b} f(t)dt.$$

$\int_{\to a}^{\to b} f(t)dt$ est divergente, si au moins une des ces intégrales $\int_{\to a}^{c} f(t)dt$ ou $\int_c^{\to b} f(t)dt$ diverge.

Remarque Les relations de Chasles impliquent que la nature et la valeur de ces intégrales double impropres ne dépendent pas de c, $a < c < b$.

D'après la proposition 7.2, les "vraies" intégrales impropres sont donc
$\int_{-\infty}^{b} f(t)dt$, $f \in R(]-\infty, b])_{\text{loc}}$,
$\int_{a}^{\infty} g(t)dt$, $g \in R([a, \infty[)_{\text{loc}}$,
$\int_{\to a}^{b} h(t)dt$, $h \in R(]a, b])_{\text{loc}}$ non bornée,
$\int_{a}^{\to b} k(t)dt$, $k \in R([a, b[)_{\text{loc}}$ non bornée,
$\int_{\to a}^{\to b} F(t)dt$, $F \in R(]a, b[)_{\text{loc}}$ non bornée proche de a et proche de b
$\int_{-\infty}^{\infty} G(t)dt$, $G \in R(]-\infty, \infty[)_{\text{loc}}$;
Dans la suite on ne va pas toujours utilisé la notation $\int_{\to a}^{\to b} f(t)dt$, etc, mais tout simplement $\int_a^b f(t)dt$. Dans tous les cas, on doit d'abord se rendre compte, laquelle/lesquelles des bornes sont responsables pour que l'intégrale soit impropre. On les appelera "des bornes critiques" (p.ex. ∞ ou $-\infty$ sont toujours des bornes critiques.)

Exemple 7.9. • $I := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx$ est convergente et

$$I = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \pi.$$

• $\int_0^\infty \frac{1}{t^2}dt$ est divergente car $\int_0^1 \frac{1}{t^2}dt = \lim_{x\to 0} \int_x^1 \frac{1}{t}dt = \lim_{x\to 0}(\frac{1}{x} - 1) = \infty$. (Notons cependant que $\int_1^\infty \frac{1}{t^2}dt = \lim_{x\to\infty} \int_1^x \frac{1}{t^2}dt = \lim_{x\to\infty}(1 - \frac{1}{x}) = 1$ converge).

Remarque Un changement de variable peut parfois transformer une intégrale impropre en une intégrale ordinaire. Exemple: $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$.
En effet, soit $1 \le x < \infty$ et $F(x) = \int_1^x \frac{dt}{t^2}$. On pose $u = 1/t$. Alors $du = -dt/t^2$. Donc $F(x) = -\int_1^{1/x} du = \int_{1/x}^1 du \to \int_0^1 du = 1$ si $x \to \infty$.

Rappel: Soit $f : [a, b[\to \mathbb{C}$. Alors $\lim_{x\to b^-} f(x)$ existe et est finie $\iff$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists c \in\ ]a, b[$: $(u, v \in [c, b[\implies |f(u) - f(v)| < \varepsilon)$.

Theorem 7.10. *(Critère de Cauchy)*
Soit $a \in \mathbb{R}, b \in \bar{\mathbb{R}}, a < b$, $f \in R([a, b[)_{\text{loc}}$. Alors l'intégrale impropre $\int_a^{\to b} f(t)dt$ est convergente si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists c \in\ ]a, b[:\ \big(u, v \in [c, b[\implies \Big|\int_u^v f(t)dt\Big| < \varepsilon\big).$$

Preuve. Il suffit d'appliquer le rappel ci-dessus à la fonction $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ et en notant que $|F(x) - F(y)| = |\int_x^y f(t)dt|$.

8. Nature de l'intégrale impropre d'une fonction positive

Soient $a \in \mathbb{R}, b \in \bar{\mathbb{R}}, a < b$ et $f \in R([a,b[)_{\text{loc}}$, $f \geq 0$. On pose $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. Alors F est croissante: $x \leq y \Longrightarrow F(x) \leq F(y)$. Par suite, $F(x)$ admet toujours une limite quand $x \to \infty$. La valeur de l'intégrale impropre sera donc

$$\int_a^{\to b} f(t)dt = \lim_{x \to b^-} F(x) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}.$$

L'intégrale impropre converge donc si et seulement si $\lim_{x\to b^-} F(x) < \infty$.

Théorème 8.1. *(Théorème de comparaison I)*
Soient $f, g : [a,b[\to [0,\infty[$ localement intégrable et $0 \leq f \leq g$. Si l'intégrale impropre $\int_a^{\to b} g(t)dt$ converge, alors $\int_a^{\to b} f(t)dt$ converge. En d'autres mots, si $\int_a^{\to b} f(t)$ diverge (i.e. converge vers $+\infty$), alors $\int_a^{\to b} g(t)$ diverge.

Preuve. Il suffit de prouver le premier cas (le 2-me étant la contraposée). Soit $a \leq x < b$ et $G(x) = \int_a^x g(t)dt$. Notons que $f \leq g \Longrightarrow F \leq G$. Ainsi, en faisant $x \to b^-$, $\lim_{x\to b^-} F(x) \leq \lim_{x\to b^-} G(x) < \infty$.

Théorème 8.2. *(Théorème de comparaison II)*
Soient $f, g : [a,b[\to [0,\infty[$ localement intégrable. Supposons que $g \neq 0$ sur $[a,b[$ et que $f(x) \overset{x\to b^-}{\sim} g(x)$. Alors les intégrales impropres $\int_a^{\to b} f(t)dt$ et $\int_a^{\to b} g(t)dt$ ont même nature.

$\boxed{\text{Attention: il est important que } f \text{ et } g \text{ soient positives}}$

Preuve. $f(x) \overset{x\to b^-}{\sim} g(x) \Longrightarrow \exists\, x_0 \in]a,b[: \left|\frac{f(x)}{g(x)} - 1\right| < \frac{1}{2}\ \forall x \in\ ]x_0, b[$. Donc, pour ces x: $\frac{1}{2} \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq \frac{3}{2}$. Ainsi

$$\frac{1}{2}g(x) \leq f(x) \leq \frac{3}{2}g(x),\ x_0 \leq x < b.$$

Il suffit maintenant d'appliquer le théorème 8.1 sur $[x_0, b[$ à ces deux inégalités pour conclure. D'où $\int_a^{\to b} f(t)dt$ et $\int_a^{\to b} g(t)dt$ ont même nature.

9. exemples

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

1) $\boxed{\displaystyle\int_1^\infty \frac{dt}{t^\alpha} \text{ converge} \Longleftrightarrow \alpha > 1.}$

Dém.: Soit $x \geq 1$ et $\alpha \neq 1$. Alors

$$\int_1^x \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Bigg|_{t=1}^{t=x} = \frac{x^{-\alpha+1} - 1}{-\alpha+1} \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\alpha - 1}$$

si $\alpha > 1$ et $\int_1^x \frac{dt}{t^\alpha} \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ si $\alpha < 1$.

Si $\alpha = 1$ alors $\int_1^x \frac{dt}{t} = \log x \to \infty$ si $x \to \infty$.

2) $\boxed{\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha} \text{ converge} \iff \alpha < 1.}$

Dém.: Soit $0 < x \leq 1$ et $\alpha \neq 1$. Alors

$$\int_x^1 \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1 - x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{1-\alpha}$$

si $\alpha < 1$ et $\int_x^1 \frac{dt}{t^\alpha} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \infty$ si $\alpha > 1$.
Si $\alpha = 1$ alors $\int_x^1 \frac{dt}{t} = -\log x \to \infty$ si $x \to 0$.

3) Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. La nature de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dt}{t^\alpha (\log t)^\beta}$ est donnée par:

$\boxed{\alpha > 1 \text{ convergence}}$; $\boxed{\alpha < 1 \text{ divergence}}$;

$$\boxed{\alpha = 1 \text{ et } \begin{cases} \beta > 1 & \text{convergence} \\ \beta \leq 1 & \text{divergence.} \end{cases}}$$

Dém.: <u>Cas $\alpha > 1$</u>. Soit $\alpha' \in]1, \alpha[$. Comme $\frac{t^{\alpha'}}{t^\alpha (\log t)^\beta} \to 0$ si $t \to \infty$, on a que

$$\forall t \geq T : \frac{1}{t^\alpha (\log t)^\beta} \leq \frac{1}{t^{\alpha'}}.$$

D'après l'exemple 1), et le théorème 8.1, $\int_2^\infty \frac{dt}{t^\alpha (\log t)^\beta}$ converge.

<u>Cas $\alpha < 1$</u>. Soit $\alpha < \alpha' < 1$. Comme $\frac{t^{\alpha'}}{t^\alpha (\log t)^\beta} \to \infty$ si $t \to \infty$, on a que

$$\forall t \geq T : \frac{1}{t^\alpha (\log t)^\beta} \geq \frac{1}{t^{\alpha'}}.$$

D'après l'exemple 1), et le théorème 8.1, $\int_2^\infty \frac{dt}{t^\alpha (\log t)^\beta}$ diverge.

<u>Cas $\alpha = 1$</u>. Pour $x \geq 2$ on a:

$$\int_2^x \frac{dt}{t(\log t)^\beta} = \begin{cases} \frac{(\log t)^{1-\beta}}{1-\beta}\Big|_{t=2}^{t=x} = \frac{(\log x)^{1-\beta} - (\log 2)^{1-\beta}}{1-\beta} & \text{si } \beta \neq 1 \\ \log\log t\Big|_{t=2}^{t=x} = \log\log x - \log\log 2 & \text{si } \beta = 1. \end{cases}$$

$$(\log x)^{1-\beta} = \exp((1-\beta)\log\log x) \to \begin{cases} +\infty & \text{si } \beta < 1 \\ 0 & \text{si } \beta > 1 \end{cases}$$

Exemple 9.1. • $I = \int_1^\infty \frac{1}{t}\sin\frac{1}{t}dt$ converge:

Soit $f(t) = \frac{1}{t}\sin\frac{1}{t}$. Notons que $\sin\frac{1}{t} \geq 0$ si $t \geq 1$. En plus, comme $\sin x \overset{x\to 0}{\sim} x$, on a: $\sin\frac{1}{t} \overset{t\to\infty}{\sim} \frac{1}{t}$. D'où $f(t) \overset{t\to\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}$. Ainsi I converge.

• $I = \int_{\frac{2}{\pi}}^\infty \log(\cos\frac{1}{t})dt$ converge.

Soit $f(t) = \log(\cos\frac{1}{t})$. Comme $\cos(\pi/2) = 0$, on voit que $2/\pi$ et ∞ sont des bornes critiques. Notons aussi que $1 > \cos(1/t) > 0$ si $t > 2/\pi$; d'où f est bien définie et continue sur $]2/\pi, \infty[$. Ainsi $f < 0$.

<u>Etude de I à la borne $+\infty$.</u>
$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + o(x^2),\ x \to 0,$
$\Longrightarrow f(t) = \log(1 - \frac{1}{2t^2} + o(\frac{1}{t^2}))$
on a $\log(1+x) \overset{x\to 0}{\sim} x \Longleftrightarrow \log(1+x) = x + o(x)$ si $x \to 0$;
d'où $f(t) = -\frac{1}{2t^2} + o(\frac{1}{t^2})$. Ainsi $f(t) \sim -\frac{1}{2t^2}$ si $t \to \infty$ (*).
$\int_1^\infty \frac{1}{2t^2}$ converge $\Longrightarrow \int_1^\infty(-f(t))dt$ converge $\Longrightarrow I$ converge.

(*) à vérifier par la règle de l'Hospital:

$$\lim \frac{\log(\cos t^{-1})}{t^{-2}} = \lim \frac{\frac{-\sin t^{-1}(-t^{-2})}{\cos t^{-1}}}{-2t^{-3}}$$
$$= -\frac{1}{2}\lim \frac{1}{\cos t^{-1}}\frac{\sin t^{-1}}{t^{-1}} = -\frac{1}{2}$$

<u>Etude de I à la borne $2/\pi$.</u>

Changement de variable:
$s = 1/t \Longrightarrow J := \int_{2/\pi}^1 f(t)dt = \int_1^{\pi/2} \frac{\log(\cos s)}{s^2}ds$. Notons toujours que l'intégrand est négatif.
$x = \frac{\pi}{2} - s \Longrightarrow J = \int_0^{\frac{\pi}{2}-1} \log(\sin x)dx$.
Maintenant $\sin x \sim x$ si $x \to 0$. Donc, par de l'Hospital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(\sin x)}{\log x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}(\cos x)\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = 1.$$

Ainsi $\int_0^* \log(\sin x)dx$ a la même nature que $\int_0^* \log x dx$. Prenant pour $*$ p.e.x la valeur 1. Notons q'une primitive de $\log x$ est $x\log x - x$. Donc

$$\int_\varepsilon^1 \log x dx = -1 - \varepsilon\log\varepsilon + \varepsilon \to -1 \text{ si } \varepsilon \to 0.$$

On en déduit que $\int_0^* \log x dx$ est convergente et donc aussi J.

$\int_{2/\pi}^1 f(t)dt$ et $\int_1^\infty f(t)dt$ étant convergentes, on conclut que $I = \int_{2/\pi}^\infty \log(\cos(1/t))dt$ est convergente.

10. Nature de l'intégrale impropre d'une fonction quelconque

Definition 10.1. *Soient $a \in \mathbb{R}, b \in \bar{\mathbb{R}}$, $a < b$ et $f : [a, b[\to \mathbb{C}$ localement intégrable. a) On dit que l'intégrale impropre $\int_a^{\to b} f(t)dt$ est absolument convergente, si $\int_a^{\to b} |f(t)|dt$ est convergente.*
b) On dit que l'intégrale impropre $\int_a^{\to b} f(t)dt$ est semi-convergente, si elle est convergente sans être absolument convergente.

Proposition 10.1. *Toute intégrale absolument convergente est convergente.*

Preuve. On va utiliser le critère de Cauchy, théorème 7.10. $\int_a^{\to b} |f(t)|dt$ converge $\Longrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists c \in]a, b[$ tel que $\forall x, y \in [c, b[,\ x < y \Longrightarrow \int_x^y |f(t)|dt < \varepsilon$. Par suite $|\int_x^y f(t)dt| \leq \int_x^y |f(t)dt < \varepsilon \Longrightarrow$ l'intégrale est convergente.

Exemple 10.2. $I = \int_1^\infty \frac{\sin t}{t^2} dt$ est absolument convergente, car $\left|\frac{\sin t}{t^2}\right| \leq \frac{1}{t^2}$ et $\int_1^\infty \frac{1}{t^2} dt$ est convergente.

Il existe des intégrales impropres qui sont seulement semi-convergentes. Voir plus tard.

Théorème 10.3 (Théorème d'Abel)**.** *Soient $a \in \mathbb{R}, b \in \bar{\mathbb{R}}$, $a < b$ et $p : [a, b[\to [0, \infty[$ et $g : [a, b[\to \mathbb{C}$ deux fonctions de classe C^1 (i.e. continûment différentiable). On suppose:*
1) p est décroissante et $\lim_{x \to b^-} p(x) = 0$.
2) $\exists M > 0,\ \forall u, v \in [a, b[: |\int_u^v g(t)dt| < M$.
Alors l'intégrale impropre $\int_a^{\to b} p(t)g(t)dt$ est convergente et l'on a:

$$\forall x \in [a, b[: \left| \int_x^{\to b} p(t)g(t)dt \right| \leq Mp(x).$$

Preuve. On pose $G(x) = \int_a^x g(t)dt$ pour $a \leq x < b$. g continue $\Longrightarrow G$ différentiable et $G' = g$. Intégrons par partie:

$$\int_a^x p(t)g(t)dt = \int_a^x p(t)G'(t)dt = [p(t)G(t)]_a^x - \int_a^x p'(t)G(t)dt \tag{10.1}$$

$$= p(x)G(x) - \int_a^x p'(t)G(t)dt.$$

Hypothèse 2) $\Longrightarrow |G(x)| \leq M$. Donc $|p(x)G(x)| \leq Mp(x) \to 0$ si $x \to b^-$.
De plus, $0 \leq K(x) := \int_a^x |p'(t)G(t)|dt \leq M \int_a^x |p'(t)|dt = -M \int_a^x p'(t)dt$
$= -M(p(x) - p(a)) = M(p(a) - \underbrace{p(x)}_{\geq 0}) \leq Mp(a)$.

$K(x)$ est une fonction croissante majorée. Donc $\lim_{x \to b^-} K(x)$ existe et est finie. Donc $\int_a^x p'(t)G(t)dt$ converge (même absolument). Donc (10.1) donne:

$$\int_a^x p(t)g(t) \underset{x \to b^-}{\longrightarrow} -\int_a^{\to b} p'(t)G(t)dt.$$

Par suite, l'intégrale impropre $\int_a^{\to b} p(t)g(t)dt$ converge et on a:

$$\int_a^{\to b} p(t)g(t)dt = -\int_a^{\to b} p'(t)G(t)dt.$$

En plus,

$$\left|\int_a^{\to b} p(t)g(t)dt\right| \leq \int_a^{\to b} |p'(t)G(t)|dt \leq Mp(a).$$

Soit $x \in [a, b[$. En remplaçant dans l'inégalité précédente $[a, b[$ par $[x, b[$, on obtient

$$\left|\int_x^{\to b} p(t)g(t)dt\right| \leq Mp(x).$$

Exemple 10.4. Soit $\alpha > 0$. Discuter la nature de

$$I_\alpha = \int_1^\infty \frac{e^{it}}{t^\alpha} dt.$$

Posons $p(t) = t^{-\alpha}$ et $g(t) = e^{it}$. Alors $p'(t) = -\alpha t^{-\alpha-1} < 0$; donc p est décroissante et $\lim_{t\to\infty} p(t) = 0$. Soient $v \geq u \geq 1$. Alors

$$\left|\int_u^v e^{it}dt\right| = \left|\left[-ie^{it}\right]_u^v\right| = |e^{iv} - e^{iu}| \leq 2.$$

D'après Abel, I_α est convergente et l'on a

$$\left|\int_x^\infty \frac{e^{it}}{t^\alpha} dt\right| \leq \frac{2}{x^\alpha}.$$

D'autre part, I_α converge absolument si $\alpha > 1$ (Notons que $|\frac{e^{it}}{t^\alpha}| = \frac{1}{t^\alpha}$).

Conclusion:

$$\boxed{\begin{array}{ll} I_\alpha \text{ est absolument convergente} & \Longleftrightarrow \alpha > 1, \\ I_\alpha \text{ est semi-convergente} & \Longleftrightarrow 0 < \alpha \leq 1. \end{array}}$$

Exemple 10.5. • $\int_0^\infty \sin t\ dt$ diverge, car: $\int_0^x \sin t\ dt = -\cos x + 1$ n'a pas de limite si $x \to \infty$.

De même pour $\int_0^\infty \cos t\ dt$.

• $\int_0^\infty \sin(t^2)dt$ et $\int_0^\infty \cos(t^2)dt$ sont semi-convergentes (intégrales de Fresnel).

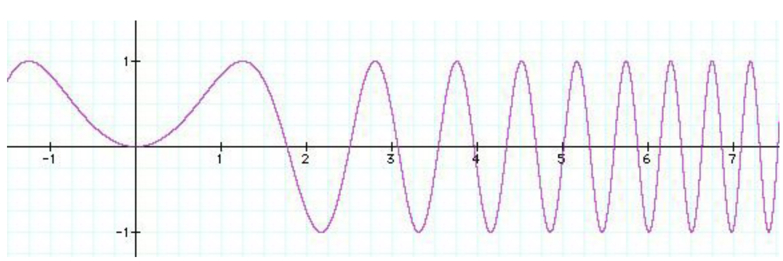

FIGURE 4. $\sin(t^2)$

Preuve. En notant que pour $u(t), v(t) : [a, b[\to \mathbb{R}$, $\int_a^{\to b}[u(t)+iv(t)]dt$ est convergente ssi $\int_a^{\to b} u(t)dt$ et $\int_a^{\to b} v(t)dt$ sont convergentes, il suffit d'étudier $\int_1^\infty e^{it^2}dt$ car $e^{it^2} = \cos(t^2) + i\sin(t^2)$. On fait un changement de variable: $t = \sqrt{s}$, $dt = \frac{ds}{2\sqrt{s}}$. Donc

$$F(x) = \int_1^x e^{it^2}dt = \int_1^{x^2} \frac{e^{is}}{2\sqrt{s}}ds.$$

En utilisant l'exemple (10.4), on voit que cet intégrale converge ($\alpha = 1/2$).

Exemple 10.6. Discuter la nature de l'intégrale impropre

$$I_\alpha = \int_1^\infty \frac{\sin^2 t}{t^\alpha}dt.$$

Comme $|f(t)| \leq t^{-\alpha}$, on sait déja que I_α est convergente si $\alpha > 1$. Soit $0 \leq \alpha \leq 1$. Notons que $\sin^2 t \geq 0$ et que pour $\pi/6 \leq t \leq \pi/2$ on a $1/2 \leq \sin t \leq 1$; donc

$$\int_1^{\pi/2+2k\pi} f(t)dt \geq \sum_{j=1}^k \int_{\pi/6+2j\pi}^{\pi/2+2j\pi} \frac{\frac{1}{4}}{t^\alpha}dt$$

$$\geq \frac{1}{4}\sum_{j=1}^k \frac{1}{(\pi/2+2j\pi)^\alpha}(\pi/2-\pi/6) \geq \frac{\pi}{12}\sum_{j=1}^k \frac{1}{(2\pi)^\alpha(j+1)^\alpha} \overset{k\to\infty}{\to} \infty$$

Donc I_α diverge si $0 \leq \alpha \leq 1$.

11. Séries numériques et intégrales impropres

Théorème 11.1. *Soit $m \in \mathbb{N}$ et $f : [m, \infty[\to [0, \infty[$ une fonction décroissante (donc localement intégrable). Alors le série $\sum_{n=m}^\infty f(n)$ et l'intégrale impropre $\int_m^\infty f(t)dt$ sont de même nature.*

Attention: il est important que f soit positive et décroissante

Preuve. Soit $k \in \mathbb{N}$. Alors notre hypothèse implique que pour $k \leq t \leq k+1$ on a $f(k+1) \leq f(t) \leq f(k)$. En intégrant sur $[k, k+1]$ on obtient:

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t)dt \leq f(k).$$

On en déduit que pour $m+1 \leq n \leq x < n+1$

$$\sum_{k=m+1}^n f(k) \leq \sum_{k=m+1}^n \int_{k-1}^k f(t)dt = \int_m^n f(t)dt$$

$$\leq \int_m^x f(t)dt \leq \sum_{k=m}^n f(k).$$

Les sommes partielles et $\int_a^x f(t)dt$ étant croissante, on en déduit que $\sum_{n=m}^\infty f(n)$ et $\int_m^\infty f(t)dt$ sont de même nature.

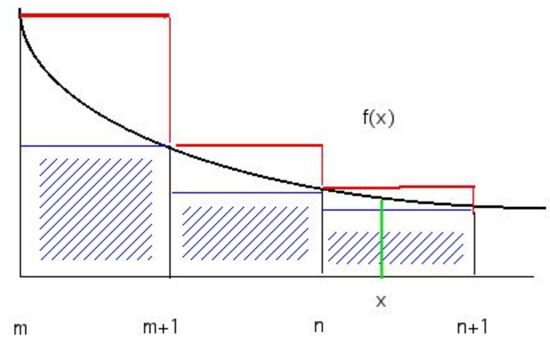

FIGURE 5. série et intégrale

Applications:

a) séries de Riemann $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$.

Pour $\alpha > 0$, $f(t) = t^{-\alpha}$ est décroissante et positive; donc on peut appliquer le théorème 11.1.
$\int_1^{\infty} t^{-\alpha}dt$ est convergente pour $\alpha > 1$ et divergente pour $0 < \alpha \leq 1$; donc $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha}$ convergente pour $\alpha > 1$ et divergente pour $0 < \alpha \leq 1$.

b) séries de Bertrand $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}(\log n)^{\beta}}$.

Pour $\alpha > 0$ et $t \geq 2$, $f(t) = t^{-\alpha}(\log t)^{-\beta}$ est décroissante et positive; donc on peut appliquer le théorème 11.1.
Donc, d'après l'exemple 3) dans 9, $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}(\log n)^{\beta}}$ converge pour les mêmes paramètres:

$\boxed{\alpha > 1 \text{ convergence}}$; $\boxed{0 < \alpha < 1 \text{ divergence}}$;

$$\boxed{\alpha = 1 \text{ et } \begin{cases} \beta > 1 : & \text{convergence} \\ \beta \leq 1 : & \text{divergence.} \end{cases}}$$

An inproper integral

Problem 11185, Amer. Math. Monthly 112 (2005), 840. (R. Brück, R.Mortini)

Find all integers $p \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ and positive numbers α for which the integral

$$I(\alpha, p) = \int_0^\infty \log\left(1 + \frac{\sin^p x}{x^\alpha}\right) dx$$

converges.

Solution

We claim that

$$\boxed{I(\alpha, p) \text{ converges if and only if } (\alpha, p) \in]1, \infty[\times \mathbb{N} \text{ or } (\alpha, p) \in \left]\tfrac{1}{2}, 1\right] \times (2\mathbb{N} + 1).}$$

First we discuss the behaviour of the integrand at the origin. For $\alpha > 0$ we have $\left|\log\left(1 + \frac{\sin^p x}{x^\alpha}\right)\right| \leq \log\left(1 + x^{-\alpha}\right)$. Substituting $\frac{1}{x}$ by t, we obtain

$$\int_0^1 \log\left(1 + x^{-\alpha}\right) dx = \int_1^\infty \frac{\log\left(1 + t^\alpha\right)}{t^2}\, dt\,,$$

and this integral is convergent. Hence, our integral $I(\alpha, p)$ converges at 0 for every $\alpha > 0$ and $p \in \mathbb{N}$.
Now we discuss the behaviour at infinity. Since $\lim\limits_{t \to 0} \frac{\log(1+t)}{t} = 1$, we see that at infinity

$$A(x) := \log\left(1 + \frac{\sin^p x}{x^\alpha}\right) \sim \frac{\sin^p x}{x^\alpha} =: B(x)\,.$$

Hence $\int_1^\infty A(x)\, dx$ converges absolutely if and only if $\int_1^\infty B(x)\, dx$ does. Note that by Riemann's convergence test $\int_1^\infty |B(x)|\, dx \leq \int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} < \infty$ whenever $\alpha > 1$. Hence, $\int_1^\infty A(x)\, dx$ is absolutely convergent for $\alpha > 1$.
Now suppose that $0 < \alpha \leq 1$. On the intervals $J_k := \left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$, $k \geq 1$, we have $|\sin x| \geq \frac{1}{2}$ and $x \geq 1$. Hence $\frac{\sin^p x}{x^\alpha} \geq \frac{2^{-p}}{x} \geq \frac{2^{-p}}{2\pi(k+1)}$. Therefore,

$$\int_{J_k} |B(x)|\, dx \geq \frac{1}{3} \cdot \frac{2^{-p-1}}{k+1}\,.$$

Since $\int_1^\infty |B(x)|\, dx \geq \sum_{k=1}^\infty \int_{J_k} |B(x)|\, dx$, we see that $\int_1^\infty |B(x)|\, dx$ and hence $\int_1^\infty |A(x)|\, dx$ diverges (absolutely) for $0 < \alpha \leq 1$. In particular, $\int_1^\infty A(x)\, dx$ diverges whenever p is even, since in that case $|A(x)| = A(x)$.

To continue, we may thus assume that $p = 2n+1$ is odd. We use that for every $\alpha > 0$ and $n \in \mathbb{N}$ the integral $\int_1^\infty \frac{\sin^{2n+1} x}{x^\alpha}\,dx$ converges. Indeed, let $I_m(x) := \int_1^x \frac{\sin^m t}{t^\alpha}\,dt$ and let F_m be a primitive of $\sin^m t$ with $F_m(1) = 0$. For m odd, F_m is periodic, hence bounded. By partial integration we obtain

$$I_{2n+1}(x) = \frac{F_{2n+1}(x)}{x^\alpha} + \alpha \int_1^x \frac{F_{2n+1}(t)}{t^{\alpha+1}}\,dt\,,$$

and we conclude that $I_{2n+1}(x)$ converges as $x \to \infty$.
Now we use the Taylor development

$$\log(1+u) = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} u^k + \frac{(-1)^{m-1}}{m} u^m (1+\varepsilon(u))\,,$$

where ε is a continuous function of u and $\varepsilon(0) = 0$. In particular, $|\varepsilon(u)| < 1$ whenever $|u| \le \delta$ with $\delta > 0$ sufficiently small. Now, we set $u = u(x) = \frac{\sin^{2n+1} x}{x^\alpha}$, where $x > 0$ is so large that $|u| \le \delta$. Then for sufficiently large real numbers $M > N$, we have

$$\begin{aligned} I := \int_N^M \log\left(1 + \frac{\sin^{2n+1} x}{x^\alpha}\right) dx &= \sum_{k=1}^{m-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \int_N^M \left(\frac{\sin^{2n+1} x}{x^\alpha}\right)^k dx \\ &+ \frac{(-1)^{m-1}}{m} \int_N^M \left(\frac{\sin^{2n+1} x}{x^\alpha}\right)^m (1+\varepsilon(u(x)))\,dx =: \sum_{k=1}^{m-1} I_k + \widetilde{I}_m\,. \end{aligned}$$

Choosing $m \in \mathbb{N}$ such that $m\alpha > 1$ and $(m-1)\alpha \le 1$, the boundedness of $\varepsilon(u)$ yields the absolute convergence of the last integral $\widetilde{I}_m$. If $\frac{1}{2} < \alpha \le 1$, then $m = 2$ and hence $I = I_1 + \widetilde{I}_2$. But I_1 and $\widetilde{I}_2$ converge, and hence I converges. If $0 < \alpha \le \frac{1}{2}$, then $m \ge 3$ and at least a third integral I_2 above appears. That integral is divergent, since the exponent of the sin is an even one (note that by the choice of m, the exponent of x is still at most 1). Since all those divergent integrals I_{2q} come up with the same sign, we finally get the divergence of $I_1 + I_2 + \cdots + I_{m-1}$, and thus I diverges.
Finally, we note that the example $p = 1$ and $\alpha = \frac{1}{2}$ yields examples of functions f and g such that at infinity, $f \sim g$, but for which $\int_0^\infty f(x)\,dx$ diverges and $\int_0^\infty g(x)\,dx$ converges, namely $f(x) = \log\left(1 + \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right)$ and $g(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$.

FIN DU CHAPITRE 2

3 Suites et séries de fonctions

12. Convergence simple/convergence uniforme

Definition 12.1. *Soient $A \subseteq \mathbb{R}$ et $f, f_n : A \to \mathbb{C}$ des fonctions.*
i) On dit que la suite (de fonctions) (f_n) converge simplement vers f sur A si $\forall x \in A$ la suite numérique $(f_n(x))$ converge vers $f(x)$. Notation: $f_n \to f$.
ii) On dit que la suite (f_n) converge simplement sur A s'il existe une fonction $f : A \to \mathbb{C}$ telle que $f_n \to f$ simplement.

Si (f_n) converge simplement, alors la limite est unique.

Quantification:

$$f_n \to f \text{ si } \boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \forall x \in A,\ \exists n_0 = n_0(x) :} \big(|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,\ \forall n \geq n_0(x)\big).$$

Rappelons que $||f||_\infty := \sup\{|f(x)| : x \in A\}$ est la norme du suprémum de $f : A \to \mathbb{C}$. Notons que $||f||_\infty \in \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$. Dans le cas où le supremum est fini, on a les inégalités triangulaires suivantes:

$$\big|||f||_\infty - ||g||_\infty\big| \leq ||f + g||_\infty \leq ||f||_\infty + ||g||_\infty.$$

Definition 12.2. *Soient $A \subseteq \mathbb{R}$ et $f, f_n : A \to \mathbb{C}$ des fonctions et soit*

$$\sigma_n = ||f_n - f||_\infty = \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)|.$$

i) On dit que la suite (de fonctions) (f_n) converge uniformément vers f sur A, si $\sigma_n \to 0$.
Notation: $f_n \overset{||\cdot||_\infty}{\to} f$ ou $f_n \overset{\text{unif.}}{\to} f$ ou $||f_n - f||_\infty \to 0$.
ii) On dit que (f_n) converge uniformément sur A s'il existe une fonction $f : A \to \mathbb{C}$ telle que $f_n \overset{\text{unif.}}{\to} f$.

Quantification:

$$f_n \overset{\text{unif.}}{\to} f \text{ si } \boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall x \in A :}\ \big(|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,\ \forall n \geq n_0\big).$$

Bien sûr le n_0 dépend aussi de ε.

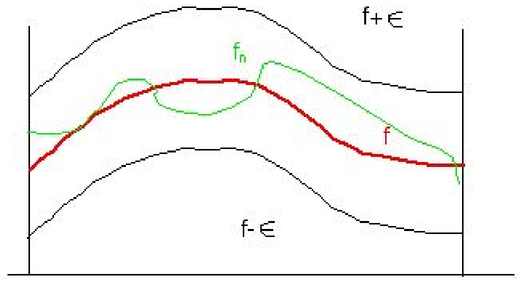

FIGURE 6. interprétation géométrique de la convergence uniforme

Pour $f, f_n : I \to \mathbb{R}$, $f_n \overset{\text{unif.}}{\to} f$ veut dire que pour tout $n \geq n(\varepsilon)$ le graphe de f_n se trouve dans le tube

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in I, f(x) - \varepsilon \leq y \leq f(x) + \varepsilon\}$$

Proposition 12.1. *La convergence uniforme entraine la convergence simple.*

Preuve. $||f_n - f||_\infty \to 0 \Longrightarrow \forall x \in A : |f_n(x) - f(x)| \leq ||f_n - f||_\infty \to 0.$

La réciproque n'est pas correcte:

Exemple 12.2. $A = I = [0,1]$, $f_n(x) = x^n$, $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1[\\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$
Alors $f \to f$ simplement mais pas uniformément sur I, car:
$\lim f_n(x) = \lim x^n = 0$ si $0 \leq x < 1$, $f_n(1) = 1$. Donc $f_n \to f$. Mais

$$\sigma_n = ||f_n - f||_\infty = \sup_{0 \leq x \leq 1} |f_n(x) - f(x)| \geq \sup_{0 \leq x < 1} |x^n| = 1.$$

Donc $\sigma_n \not\to 0$.

Exemple 12.3. $A = [0,a]$ où $0 < a < 1$, $f_n(x) = x^n$, $f(x) = 0$, $0 \leq x \leq a$. Alors $f_n \overset{\text{unif.}}{\to} f$.

Dém.: $\sigma_n = \sup_{0 \leq x \leq a} |f_n(x) - f(x)| = \max_{[0,a]} |x^n| = a^n \to 0$.

Théorème 12.4 (critère de Cauchy pour la convergence uniforme)**.**
Une suite (f_n) de fonctions de A dans $\mathbb{C}$ converge uniformément sur A $\Longleftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall x \in A, \forall m \geq n \geq n_0 :\ |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$.

Notation $||f_n - f_m||_\infty \to 0$ si $n, m \to \infty$.

Preuve. "$\Longrightarrow$" $f_n \overset{\text{unif.}}{\to} f \Longrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0, \forall n \geq n_0 : ||f_n - f||_\infty < \varepsilon/2 \Longrightarrow$ $\forall x \in A, \forall m \geq n \geq n_0$:

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq |f_m(x) - f(x)| + |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

"$\Longleftarrow$" On suppose que (f_n) satisfait au critère de Cauchy. Prouvons d'abord que (f_n) converge simplement. Soit $\varepsilon > 0$.
Hypothèse $\Longrightarrow \exists n_0, \forall x \in A, \forall m \geq n \geq n_0 : |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$. En utilisant le critère de Cauchy pour la convergence de suites numériques, on conclut que $\forall x \in A, \lim f_m(x)$ existe. Notons cette limite par $f(x)$. Comme $\forall m \geq n \geq n_0$

$$|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon,$$

on peut laisser tendre $m \to \infty$ et on obtient:

$$\forall n \geq n_0 : |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon.$$

Mais $x \in A$ est arbitraire et n_0 ne dépend pas de x. Donc

$$\forall n \geq n_0 : \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon;$$

i.e. $f_n \overset{\text{unif.}}{\to} f$.

Proposition 12.5. *Soient $f_n, g_n : A \to \mathbb{C}$. Si (f_n) et (g_n) convergent uniformément sur A alors $(f_n + g_n)$ converge uniformément sur A.*

Proof. Comme $||f||_\infty$ est une norme sur l'espace vectoriel des fonctions de A vers $\mathbb{C}$, on a:

$$||f_n + g_n - (f_m + g_m)||_\infty \leq ||f_n - f_m||_\infty + ||g_n - g_m||_\infty \to 0$$

si $n, m \to \infty$. $\square$

Tandis que le produit $f_n g_n$ de deux suites de fonctions simplement convergentes converge, le produit $f_n g_n$ de deux suites de fonctions uniformément convergentes n'est <u>pas</u> nécessairement uniformément convergent:

Exemple 12.6. Soit $f_n(x) = x + \frac{1}{n}$. Alors (f_n) converge uniformément vers x sur $\mathbb{R}$, mais ni (f_n^2), ni $(\frac{f_n}{n})$ n'est uniformément convergente. En effet:

$$|f_n^2(x) - x^2| = \left| \frac{1}{n^2} + \frac{2x}{n} \right| \Longrightarrow \sup_{\mathbb{R}} |f_n^2 - x^2| = \infty \not\to 0.$$

De même

$$\frac{f_n(x)}{n} \to 0, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

mais

$$\sup_{\mathbb{R}} |\frac{f_n(x)}{n}| = \infty \not\to 0.$$

13. Convergence uniforme et continuité

L'exemple 12.2 montre que la limite simple d'une suite (f_n) de fonctions continues n'est pas nécessairement continue (ici $f_n(x) = x^n, 0 \leq x \leq 1$). Ce phénomène n'apparait pas si la convergence est uniforme:

Proposition 13.1. *Soit $A \subseteq \mathbb{R}, a \in A$, $f_n : A \to \mathbb{C}$ continue en a. Supposons que sur A, $f_n \overset{\text{unif.}}{\to} f$. Alors f est continue en a.*

Preuve. Soit $\sigma_n = ||f_n - f||_\infty = \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)|$ et $\varepsilon > 0$.
$f_n \overset{\text{unif.}}{\to} f \Longrightarrow \exists n_0 \; \forall n \geq n_0 : \sigma_n < \varepsilon/3$.
Pour $x \in A$ on a:

$$|f(x) - f(a)| \leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(a)| + |f_{n_0}(a) - f(a)| \leq \\ 2\sigma_{n_0} + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(a)|.$$

f_{n_0} continue en $a \Longrightarrow \exists \delta > 0 \; \forall x \in A \cap \,]a - \delta, a + \delta[\, : \; |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(a)| < \varepsilon/3$.
Donc, pour tous ces x on obtient:

$$|f(x) - f(a)| \leq 2\varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon;$$

i.e. f est continue en a.

Corollaire 13.2. *Une limite uniforme d'une suite de fonctions continues est une fonction continue.*

Le résultat suivant est utile si on veut montrer que certaines suites ne sont pas uniformément convergentes.

Proposition 13.3. *Soit (f_n) une suite de fonctions continues uniformément convergente vers $f : A \to \mathbb{C}$. Alors pour toute suite (x_n) dans A avec $\lim x_n = x \in A$ on a: $\lim_n f_n(x_n) = f(x)$.*

Preuve. $|f_n(x_n) - f(x)| \leq |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x)| \leq ||f_n - f||_\infty + |f(x_n) - f(x)| \to 0 + 0 = 0$ si $n \to \infty$.

Application: $A = [0, 1]$ et $f_n(x) = x^n$. Alors (f_n) n'est pas uniformément convergente sur A, car pour $x_n = 1 - \frac{a}{n}$, $a > 0$, on on que $x_n \in A$ pour n suffisament grand, $x_n \to 1$, mais $f_n(x_n) = \left(1 - \frac{a}{n}\right)^n \to e^{-a} \neq f(1)$.

Theorem 13.4 (1er théorème de Dini)**.** *Soit $I = [a, b]$ un intervalle compact et (f_n) une suite de fonctions continues. Supposons que cette suite soit décroissante; i.e. $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$, $\forall x \in I$, et qu'elle converge simplement sur I vers une fonction continue f. Alors la convergence est uniforme.*

Preuve. Considérant la suite (g_n) où $g_n = f_n - f$. Alors g_n est continue, $0 \leq g_{n+1} \leq g_n$ et $\lim g_n(x) = 0$ pour tout $x \in I$. Fixons $\varepsilon > 0$. I compact $\Longrightarrow M_n := \max_I g_n$ existe. Soit $x_n \in I$ tel que $g_n(x_n) = M_n$. I compact $\Longrightarrow \exists a \in I$ et une sous-suite (x_{n_k}) de (x_n), telle que $\lim x_{n_k} = a$. Soit $k_0 \in \mathbb{N}$

si grand tel que $0 \leq g_{n_{k_0}}(a) < \varepsilon$. Comme $g_{n_{k_0}}$ est continue, il existe $\delta > 0$ tel que $g_{n_{k_0}}(x) \leq g_{n_{k_0}}(a) + \varepsilon$ pour tout $x \in I$ satisfaisant $|x - a| < \delta$. Soit $k_1 > k_0$ tel que $|x_{n_k} - a| < \delta$ pour tout $k \geq k_1$. Ainsi, pour tout $n \geq n_{k_1} \geq n_{k_0}$, et pour tout $x \in I$

$$0 \leq g_n(x) \overset{g_n \searrow}{\leq} g_{n_{k_1}}(x) \leq g_{n_{k_1}}(x_{n_{k_1}}) \overset{g_n \searrow}{\leq} g_{n_{k_0}}(x_{n_{k_1}}) \leq g_{n_{k_0}}(a) + \varepsilon < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Donc $||g_n||_\infty \leq 2\varepsilon, \;\; \forall n \geq N(\varepsilon) = n_{k_1}$.

2^{me} démonstration:

Soit $x \in I$ et pour tout $r > 0$ notons $B(x,r) =]x - r, x + r[\cap I$. Soit $\varepsilon > 0$, comme f_n converge simplement vers f, on a

$$\forall x \in I, \; \exists n_x \in \mathbb{N}, \quad |f_{n_x}(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Par continuité de la fonction $f_{n_x} - f$, on a

$$\forall x \in I, \; \exists r_x > 0, \; \forall t \in B(x, r_x), \quad |f_{n_x}(t) - f(t)| < \varepsilon.$$

On a un recouvrement du compact I par les boules $(B(x, r_x))_{x \in I}$, on peut donc en extraire un sous-recouvrement fini $(B(x, r_{x_i}))_{i \in \{1,\ldots,p\}}$. Notons $N = \sup_{i \in \{1,\ldots,p\}} n_{x_i}$. Alors pour $n \geq N$ et $x \in I$, il existe $i_0 \in \{1, ..., p\}$ tel que $x \in B(x_{i_0}, r_{x_{i_0}})$. La suite f_n étant décroissante, on a

$$0 \leq f_n(x) - f(x) \leq f_N(x) - f(x) \leq f_{n_{x_{i_0}}}(x) - f(x) < \varepsilon,$$

d'où le résultat.

3^{me} démonstration:

Fixons $\varepsilon > 0$. Soit $E_p = \{x \in I, |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon, \; \forall n \geq p\}$. Comme (f_n) est décroissante,

$$E_p = \{x \in I, f_n(x) - f(x) \geq \varepsilon, \; \forall n \geq p\}$$

et $E_{p+1} \subseteq E_p$. E_p est un fermé inclus dans l'interval compact I; donc E_p est compact. Comme (f_n) converge simplement vers f, $\bigcap_{p=1}^{\infty} E_p = \emptyset$. La compacité de E_p implique qu'il existe p_0 tel que $E_{p_0} = \emptyset$. Ainsi

$$\forall x \in I, \forall n \geq p_0 : \; |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Donc (f_n) est uniformément convergente.

Theorem 13.5 (2^{me} théorème de Dini)**.** *Soit $I = [a, b]$ un intervalle compact et (f_n) une suite de fonctions continues. Supposons que chaque f_n soit une fonction décroissante; i.e. $f_n(x) \geq f_n(y)$, $\forall x \leq y$ avec $x, y \in I$, et que (f_n) converge simplement sur I vers une fonction continue f. Alors la convergence est uniforme.*

Preuve. Par hypothèse: $x \leq y \Longrightarrow f_n(x) \geq f_n(y) \Longrightarrow f(x) \geq f(y)$. Ainsi f est décroissante. f continue sur le compact $I \Longrightarrow f$ uniformément continue sur I; i.e.

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall u, v \in I : \Big[|u - v| < \delta \Longrightarrow |f(u) - f(v)| < \varepsilon \Big].$$

Soit $\{a = x_1 < x_2 < \cdots < x_p = b\}$ une décomposition de I telle que $|x_j - x_{j+1}| < \delta \;\; \forall j = 1, \ldots, p - 1$. Notons que $\lim_n f_n(x_k) = f(x_k)$. Donc

$$\forall k \in \{1, \ldots, p\}, \; \exists n_k, \forall n \geq n_k : \; |f(x_k) - f_n(x_k)| < \varepsilon.$$

Soit $N := \max_{1 \leq k \leq p} n_k$, $n \geq N$ et $x \in I$. Il existe $j \in \{1, \ldots, p - 1\}$ tel que $x \in [x_j, x_{j+1}]$. Alors, d'une part

$$f(x) - f_n(x) \leq f(x_j) - f_n(x_{j+1}) = [f(x_{j+1}) - f_n(x_{j+1})] + [f(x_j) - f(x_{j+1})] < 2\varepsilon,$$

et d'autre part

$f_n(x) - f(x) \leq f_n(x_j) - f(x_{j+1}) = [f_n(x_j) - f(x_j)] + [f(x_j) - f(x_{j+1})] < 2\varepsilon.$

Donc, $\forall n \geq N, \forall x \in I : ||f_n - f||_\infty < 2\varepsilon.$

14. CONVERGENCE UNIFORME ET NORMALE DE SÉRIES

Definition 14.1. *Soit $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ une série de fonctions $f_n : A \to \mathbb{C}$. Alors*

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge simplement sur A si la suite (S_n) de ces sommes partielles converge simplement sur A.

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge uniformément sur A si la suite (S_n) de ces sommes partielles converge uniformément sur A.

(3) $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge normalement sur A, si $\sum ||f_n||_\infty$ converge.

Proposition 14.1. *Soit $\sum f_n$ une série de fonctions qui converge simplement vers $f : A \to \mathbb{C}$. Alors la convergence est uniforme si et seulement si $||R_n||_\infty \to 0$, où $R_n = \sum_{j=n+1}^{\infty} f_j$ est le reste d'ordre n de la série.*

Preuve. Découle de $S_n \overset{\text{unif.}}{\to} f \iff ||R_n||_\infty = ||S_n - f||_\infty \to 0.$

Proposition 14.2. *Une série $\sum f_n$ converge normalement sur A si et seulement si il existe une série numérique convergente $\sum \alpha_n$ à termes positives telle que*

$$\forall n \geq n_0, \forall x \in A, \ \ |f_n(x)| \leq \alpha_n.$$

Preuve. Découle du théorème de comparaison, car $|f_n(x)| \leq \alpha_n \ \forall x \in A$ implique que $||f_n||_\infty \leq \alpha_n$.

Proposition 14.3.
(1) La convergence uniforme de $\sum f_n$ entraine la convergence simple de $\sum f_n$;
(2) La convergence normale de $\sum f_n$ sur A entraine la convergence absolue de $\sum |f_n(x)|$ pour tout $x \in A$;
(3) La convergence normale de $\sum f_n$ entraine la convergence uniforme de $\sum |f_n|$ sur A.
(4) La convergence uniforme de $\sum |f_n|$ entraine la convergence uniforme de $\sum f_n$ sur A.

Preuve. (1) découle de la Proposition 12.1
(2) découle du fait que $|f_n(x)|$ est majoré par $||f_n||_\infty$ et que $\sum ||f_n||_\infty$ converge (théorème de comparaison 2.2).

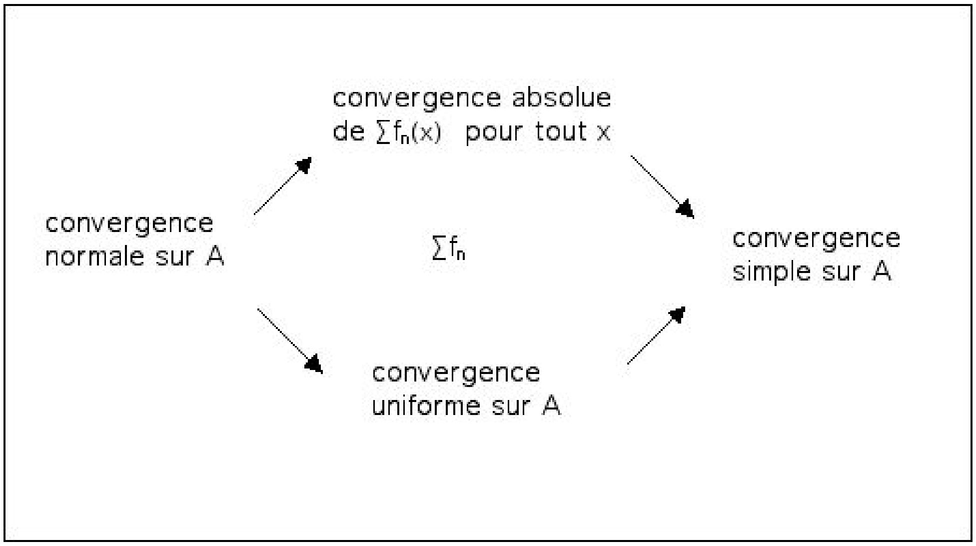

FIGURE 7. Convergence normal, uniforme, simple, absolue

(3) On utilise le critère de Cauchy 12.4. Soit $S_n = \sum_{j=0}^{n} |f_j|$. Alors pour tout $x \in A$ et $m > n$:

$$|S_n(x) - S_m(x)| = \sum_{j=n+1}^{m} |f_j(x)| \leq \sum_{j=n+1}^{m} ||f_j||_\infty := \Delta_{m,n}$$

et donc

$$||S_n - S_m||_\infty \leq \Delta_{m,n}.$$

Notons que d'après le critère de Cauchy 1.9 pour la convergence de séries numériques, $\Delta_{m,n} \to 0$ si $m, n \to \infty$. Donc $||S_n - S_m||_\infty \to 0$ si $m, n \to \infty$. Ainsi (S_n) converge uniformément.
(4) Soit (S_n) la suite des sommes partielles de $\sum f_n$ et (T_n) celle de $\sum |f_n|$. Pour tout $x \in A$ et $m \geq n$ on a:

$$|S_n(x) - S_m(x)| = |\sum_{j=n+1}^{m} f_j(x)| \leq \sum_{j=n+1}^{m} |f_j(x)| \leq \sup_{a \in A} \sum_{j=n+1}^{m} |f_j(a)| = ||T_n - T_m||_\infty.$$

Alors

$$||S_n - S_m||_\infty \leq ||T_n - T_m||_\infty.$$

Le critère de Cauchy 12.4 s'applique maintenant.

Proposition 14.4. *Si $\sum f_n$ converge uniformément sur A, alors (f_n) converge uniformément vers 0 sur A.*

Preuve. Supposons que $||S_n - S||_\infty \to 0$, où S est la valeur de la série $\sum f_n$. Alors $||f_n||_\infty = ||S_{n+1} - S_n||_\infty \leq ||S_{n+1} - S||_\infty + ||S_n - S||_\infty \to 0$.

Exemple 14.5. • $A = \mathbb{R}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^2}$ converge absolument sur $\mathbb{R}$, mais pas uniformément. En effet, $\sum \frac{|x|}{n^2} = |x| \sum \frac{1}{n^2}$ converge. Mais $f_n(x) = \frac{|x|}{n^2}$ ne tend pas vers zéro uniformément sur $\mathbb{R}$, car $\sup_{x \in \mathbb{R}} f_n(x) = \infty$.

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$, car

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \frac{\sin(nx)}{n^2} \right| = \frac{1}{n^2}$$

et $\sum \frac{1}{n^2}$ converge.
(Notons que pour $x_n = \frac{\pi}{2n}$ on a $|f_n(x_n)| = \frac{1}{n^2}$, où $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n^2}$.)

Exemple 14.6. La convergence uniforme et absolue n'entraine pas nécessairement la convergence normale:
$A = [1, \infty[,\ f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } n \leq x < n+1 \\ 0 & \text{si } 1 \leq x < n \text{ et } x \geq n+1. \end{cases}$

Alors $S_n(x) = f_1(x) + \cdots + f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } 1 \leq x < n+1 \\ 0 & \text{si } x \geq n+1 \end{cases}$. D'où $S_n(x) \to \frac{1}{x}$ $\forall x \geq 1$. Donc la série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge simplement (et absolument) sur $[1, \infty[$. Pour $m > n$ on a:

$$|S_n(x) - S_m(x)| = S_m(x) - S_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 \leq x \leq n+1 \text{ et } x \geq m+1 \\ \frac{1}{x} & \text{si } n+1 \leq x < m+1 \end{cases}$$

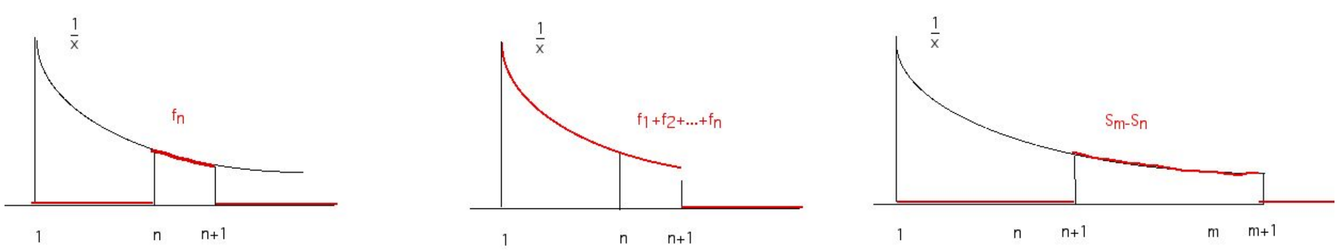

Figure 8. L'hyperbole

Donc $\sup_{x\in[1,\infty[} |S_n(x) - S_m(x)| = \frac{1}{n+1} \to 0$. Par suite, $\sum f_n$ converge uniformément sur $[1, \infty[$.

D'autre part, $||f_n||_\infty = \sup_{x\geq 1} |f_n(x)| = \frac{1}{n}$ et $\sum ||f_n||_\infty = \sum \frac{1}{n}$ diverge (série harmonique). Ainsi, $\sum f_n$ ne converge pas normalement.

Exercice Montrer que les séries suivantes convergent uniformément sur $\mathbb{R}$ et déterminer leur somme:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x}{1+x^2} \right)^k, \quad g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{(x^2+k)(x^2+k+1)}.$$

Est-ce que la convergence est normale?

<u>*solution*</u> (a) $q := \left|\frac{x}{1+x^2}\right| \leq \frac{1}{2} \Longrightarrow f$ normalement convergente $\Longrightarrow f$ uniformément convergente et

$$f(x) = \frac{1}{1 - \frac{x}{1+x^2}} = \frac{1+x^2}{1+x^2-x}.$$

(b)

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x}{(x^2+k)(x^2+k+1)} = \sum_{k=1}^{n} x\left(\frac{1}{x^2+k} - \frac{1}{x^2+k+1}\right)$$
$$= x\left(-\frac{1}{x^2+n+1} + \frac{1}{x^2+1}\right) \to \frac{x}{x^2+1} := S(x).$$

Comme

$$\Delta(x) := |S_n(x) - S(x)| = \left|\frac{x}{x^2+n+1}\right| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\frac{x}{x^2+n+1}\right|$$

et

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{x^2+n+1}\right) = \frac{n+1-x^2}{(x^2+n+1)^2} = 0 \Longleftrightarrow x = x_n := \pm\sqrt{n+1},$$

$$\Delta(x_n) = \frac{\sqrt{n+1}}{2(n+1)} = \frac{1}{2\sqrt{n+1}} \to 0$$

et donc la convergence de la série g est uniforme.

$$f_k(x) := \left|\frac{x}{(x^2+k)(x^2+k+1)}\right| \leq \frac{|x|}{(x^2+k)k}.$$
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{x^2+k}\right) = \frac{k-x^2}{(x^2+k)^2} = 0 \Longleftrightarrow x = x_k = \pm\sqrt{k}.$$

$$f_k(x) \leq \frac{\sqrt{k}}{2k^2} = \frac{1}{2k\sqrt{k}};$$

$\sum_k \frac{1}{2k\sqrt{k}}$ étant convergente, on en déduit que le convergence de la série g est normale.

Théorème 14.7. *Soit $f_n : A \to [0,\infty[$ une suite de fonctions positives. Supposons que pour tout $x \in A$, $(f_n(x))$ est décroissante, i.e. $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$. Alors $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n f_n$ converge uniformément sur A si et seulement si $||f_n||_\infty \to 0$. En particulier, si A est un intervalle compact, alors $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n f_n$ est uniformément convergente si $\lim f_n(x) = 0$ pour tout $x \in I$.*

Preuve. i) Supposons que $\lim ||f_n||_\infty = 0$. Alors $\lim f_n(x) = 0$, $\forall x \in A$. D'après le critère de Leibniz 3.1 (chapitre 1), $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n f_n(x)$ est simplement convergente et $|R_p(x)| \leq f_{p+1}(x)$. Ceci entraine que $|R_p(x)| \leq \sup_{y\in A} f_{p+1}(y) = ||f_{p+1}||_\infty$ et ainsi $||R_p||_\infty \leq ||f_{p+1}||_\infty \to 0$. En utilisant la Proposition 14.1, on peut conclure que $\sum(-1)^n f_n$ est uniformément convergente.

ii) La réciproque découle de la Proposition 14.4. Le reste est alors une conséquence du théorème de Dini 13.4.

15. Interversion de limites

Dans l'exemple suivant la Proposition 13.3, on a vu que si f est la limite simple de la suite de fonctions $f_n(x) = x^n$, alors

$$0 = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \lim f_n(x) \neq \lim_n \lim_{x\to 1} f_n(x) = 1.$$

Un tel phńomène n'apparait pas, si la limite est uniforme:

Theorem 15.1. *Soit $I \subseteq R$ un intervalle, $a \in \overline{I}$, $f_n, f : I \to \mathbb{C}$. Supposons que (f_n) tend uniformément vers f sur I et que $\ell_n := \lim_{x\to a} f_n(x)$ existe et est finie. Alors*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_n \ell_n;$$

i.e.

$$\lim_{x\to a} \lim_n f_n(x) = \lim_n \lim_{x\to a} f_n(x).$$

(Notons que a pourrait être $\pm$ infini.)

Preuve. i) Prouvons d'abord que$f(x)$ a une limite quand $x \to a$. Soit $\varepsilon > 0$. $f_n \overset{\text{unif.}}{\to} f \Longrightarrow \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ \forall x \in I : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/3$. Fixons un tel N. Comme $\lim_{x\to a} f_N(x)$ existe, on a d'après le critère de Cauchy: si $a \in \mathbb{R}$, $\exists \delta > 0, \forall x, y \in I \cap]a - \delta, a + \delta[, \big(|x - y| < \delta \Longrightarrow |f_N(x) - f_N(y)| < \varepsilon/3$.
Si $a = \pm\infty$, on choisi $M > 0$, tel que $\forall x, y < -M$ ou $\forall x, y > M$ $\big(|x - y| < \delta \Longrightarrow |f_N(x) - f_N(y)| < \varepsilon/3$.
Pour ces x, y an obtient donc:

$$|f(x)-f(y)| \leq |f(x)-f_N(x)|+|f_N(x)-f_N(y)|+|f_N(y)-f(y)| \leq 3\cdot\varepsilon/3 = \varepsilon$$

Ainsi $\ell := \lim_{x\to a} f(x)$ existe.

ii) Montrons que $\lim \ell_n = \ell$.
Rappelons que $\forall n \geq N, \forall x \in I : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/3$. Fixons $n \geq N$. En faisant $x \to a$, on obtient

$$\varepsilon/3 \geq \lim_{x\to a} |f_n(x) - f(x)| = |\lim_{x\to a} f_n(x) - \lim_{x\to a} f(x)| = |\ell_n - \ell|.$$

Ainsi $\forall n \geq N : |\ell_n - \ell| < \varepsilon/3$. Donc $\lim \ell_n = \ell$.

Corollaire 15.2. *Soit $I \subseteq R$ un intervalle, $a \in \overline{I}$, $f_n, f : A \to \mathbb{C}$. Supposons que $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge uniformément vers sur I et que $\ell_n := \lim_{x\to a} f_n(x)$ existe et est finie. Alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} \ell_n$ converge et*

$$\lim_{x\to a} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \ell_n;$$

i.e.

$$\lim_{x\to a}\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\lim_{x\to a} f_n(x).$$

Preuve. On applique le théorème d'interversion à la suite $S_n = f_0 + \cdots + f_n$.

16. Intégrales, dérivées et convergence uniforme

Soit $f : J \to \mathbb{R}$ une fonction bornée sur l'intervalle $J = [a, b]$. Alors $\operatorname{osc}_J f = \sup_J f - \inf_J f$ est l'oscillation de f sur J.

Lemma 16.1. *Si $||g - G||_\infty < \varepsilon$, alors $|\operatorname{osc}_J g - \operatorname{osc}_J G| < 4\varepsilon$.*

Preuve. $\exists x \in J$ telque $\inf_J g > g(x) - \varepsilon$ et $\exists y \in J$ tel que $\sup_J g < g(y) + \varepsilon$. En plus, $G - \varepsilon \le g \le G + \varepsilon$. Donc

$$\operatorname{osc}_J g < (g(y)+\varepsilon)-(g(x)-\varepsilon) = g(y)-g(x)+2\varepsilon \le (G(y)+\varepsilon)-(G(x)-\varepsilon)+2\varepsilon$$

$$= 4\varepsilon + G(y) - G(x) \le 4\varepsilon + \sup_J G - \inf_J G = 4\varepsilon + \operatorname{osc}_J G.$$

En échangeant g et G on obtient $|\operatorname{osc}_J g - \operatorname{osc}_J G| < \varepsilon$.

Rappel du critère de Riemann

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ bornée est intégrable au sens de Riemann, notée par $f \in R[a, b]$, si et seulement si $\forall\varepsilon > 0\ \exists$ décomposition $\{J_1, \ldots, J_n\}$ de J tel que

$$\sum_{i=1}^{n}(\operatorname{osc}_{J_i} f)|J_i| < \varepsilon.$$

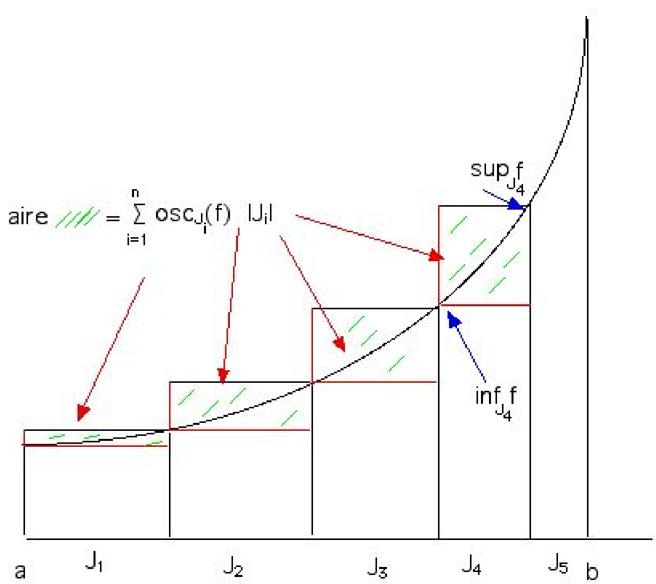

Figure 9. interprétation géométrique du critère de Riemann

Théorème 16.2. *i) Soit $a < b$. Si une suite $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ de fonctions intégrables converge <u>uniformément</u> vers une fonction f, alors f est intégrable et on a:*

$$\int_a^b f_n(t)dt \to \int_a^b f(t)dt.$$

ii) Il existe des suites de fonctions intégrables qui convergent simplement vers une fonction f et pour laquelle f n'est pas intégrable.

Preuve. i) Soit $\varepsilon > 0$. $f_n \overset{\text{unif.}}{\to} f \Longrightarrow \exists N \in \mathbb{N} : ||f_n - f||_\infty < \varepsilon/(8|I|)\ \forall n \geq N$.

$f_N \in R[a,b] \Longrightarrow \exists Z = \{a = x_1 < x_2 < \cdots < x_p = b\}$ tel que

$$\sum_{j=1}^{p-1} (\mathrm{osc}_{I_j} f_N)|I_j| < \varepsilon/2,$$

où $I_j = [x_j, x_{j+1}]$. Comme $|\mathrm{osc}_{I_j} f - \mathrm{osc}_{I_j} f_N| < \frac{4\varepsilon}{8|I|}$ on obtient

$$\sum_{j=1}^{p-1} (\mathrm{osc}_{I_j} f)|I_j| \leq \sum_{j=1}^{p-1} \left(\mathrm{osc}_{I_j} f_N + \frac{4\varepsilon}{8|I|} \right) |I_j|$$

$$= \sum_{j=1}^{p-1} (\mathrm{osc}_{I_j} f_N)|I_j| + \frac{4\varepsilon}{8|I|}|I| < \varepsilon.$$

Donc $f \in R[a,b]$. En plus,

$$\left| \int_a^b f_n(t)dt - \int_a^b f(t)dt \right| \leq \int_a^b |f_n(t) - f(t)|dt \leq$$

$$(b-a) \sup_{a \leq x \leq b} |f_n(x) - f(x)| \to 0.$$

ii) Soit (r_n) une énumération des nombres rationnels dans $[0,1]$ (i.e. $r : \mathbb{N} \to \mathbb{Q} \cap [0,1], n \mapsto r_n$ est une bijection). Soit

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \{r_1, \ldots, r_n\} \\ 0 & \text{si } x \in [0,1] \setminus \{r_1, \ldots, r_n\} \end{cases}$$

Alors $f_n \in R[0,1]$, $f_n(x) \to d(x)$, où d est la fonction de Dirac

$$d(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 & \text{si } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Cependant, la fonction d n'est pas intégrable au sens de Riemann.

Corollaire 16.3. *Soient $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Si une série $\sum f_n$ de fonctions f_n intégrables sur $[a, b]$ converge $\underline{\text{uniformément}}$ sur $[a, b]$, alors la somme S est une fonction intégrable sur $[a, b]$ et on a:*

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_a^b f_n(t) dt \right),$$

la série de nombres complexes figurant au second membre étant convergente.

Preuve. $f_n \in R[a, b] \Longrightarrow S_n = f_0 + f_1 + \cdots + f_n \in R[a, b]$, Par hypothèse $S_n \overset{\text{unif.}}{\to} S$. Donc, en vertue du théorème 16.2, $S \in R[a, b]$ et

$$\int_a^b S(t)dt \overset{16.2}{=} \lim_n \int_a^b S_n(t)dt = \lim_n \left[\int_a^b \left(\sum_{p=0}^{n} f_p(t) \right) dt \right]$$

$$= \lim_n \left(\sum_{p=0}^{n} \int_a^b f_n(t)dt \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(t)dt.$$

Théorème 16.4. *Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle et $f_n \in C^1(I)$. Supposons que*

i) (f_n) converge simplement sur I vers f;
ii) (f'_n) converge $\underline{\text{uniformément}}$ sur I vers g.

Alors $f \in C^1(I)$ et $f' = g$ i.e.

$$\left(\lim_n f_n(x) \right)' = \lim_n f'_n(x) \ \forall x \in I.$$

Preuve. Soit $a \in I$ fixé. Alors l'hypothèse $f'_n \overset{\text{unif.}}{\to} g$ et f'_n continue impliquent que g est continue et que $\forall x \in I$

$$\lim_n \int_a^x f'_n(t)dt \overset{16.2}{=} \int_a^x \left(\lim_n f'_n(t) \right) dt = \int_a^x g(t)dt. \tag{16.1}$$

En vertue de la proposition 1.4 du chapitre 2, la fonction $G(x) = \int_a^x g(t)dt$ est dérivable sur I et $G'(x) = g(x)$.
Mais

$$\lim_n \int_a^x f'_n(t)dt = \lim_n (f_n(x) - f_n(a)) = f(x) - f(a).$$

Donc (16.1) entraine que $f(x) - f(a)$ est aussi différentiable et que $f'(x) = g(x)$.

Remarques (1) Dans l'hypothèse i) du théorème 16.4, il suffit de supposer que $(f_n(a))$ converge pour un seul a. En effet,

$$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f'_n(t)dt$$

converge d'après (16.1).

(2) Si on suppose en plus que I est borné, alors les hypothèses du théorème 16.4 impliquent que f_n converge même uniformément vers f. En effet, pour $x \geq a$,

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(a) - f(a)| + \int_a^x |f_n'(t) - f'(t)|dt =$$

$$|f_n(a) - f(a)| + \int_a^x |f_n'(t) - g(t)|dt$$

$$\leq \varepsilon/2 + (x-a)\varepsilon/(2|I|) = \varepsilon$$

si $n \geq n_0$, n_0 indépendant de x.

(3) Le résultat ci-dessus n'est plus vrai si on remplace la convergence uniforme de (f_n') par la convergence simple, même si on suppose que g soit continue:

Exemple 16.5.

$$f_n(x) = n^2 \left(\frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{x^{n+2}}{n+2} \right), \ 0 \leq x \leq 1$$

Alors $f_n(x) \to 0$ si $x \in [0,1[$ (notons que la série $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 a^{n+1}$ converge pour $|a| < 1$; donc $n^2 a^{n+1} \to 0$), et $f_n(1) = n^2(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}) = n^2 \frac{1}{(n+1)(n+2)} \to 1$. Ainsi, $f_n(x)$ converge simplement vers $f(x) = 0$ si $x \in [0,1[$ et $f(1) = 1$. Donc f est discontinue en 1, et par conséquent, f n'est pas différentiable en 1. Mais (f_n') converge vers une fonction continue car $f_n'(x) = n^2 \left(x^n - x^{n+1}\right) \to 0$ pour $x \in [0,1]$.

Corollaire 16.6. *Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle et $f_n \in C^1(I)$. Supposons que*

i) $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge simplement sur I vers S;

ii) $\sum_{n=0}^{\infty} f_n'$ converge uniformément sur I.

Alors $S \in C^1(I)$ et

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'.$$

Preuve. Appliquer le théorème 16.4 à la suite $S_n = f_0 + \cdots + f_n$.

Exemple 16.7.

$$\Psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}, \ x > 0.$$

Soit $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n^x}$. Alors $f_n(x) = (-1)^n e^{-x \log n}$ et

$$f_n'(x) = (-1)^n(-\log n)e^{-x \log n} = \frac{(-1)^{n+1} \log n}{n^x}.$$

Notons que $|f_n(x)| = n^{-x}$; ainsi $(|f_n|)$ est une suite décroissante et $\lim f_n(x) = 0 \ \forall x > 0$. Donc, en vertue du critère de Leibniz, $\sum f_n(x)$ converge simplement sur $]0, \infty[$.

Etudions maintenant la convergence de $\sum f_n'(x)$. Pour $x > 0$ fixé, considérons $u(t) = \frac{\log t}{t^x}$. Alors

$$u'(t) = \frac{t^x(1/t) - (\log t)xt^{x-1}}{t^{2x}} = \frac{1 - x\log t}{t^{x+1}}.$$

Donc $u'(t) \leq 0 \iff 1 - x\log t \leq 0 \iff \log t \geq \frac{1}{x} \iff t \geq e^{\frac{1}{x}}$. La suite $(|f_n'(x)|)$ est donc décroissante (en n) pour $n \geq \exp(\frac{1}{x})$.
Mais on a aussi que $\lim f_n'(x) = 0$ pour tout $x > 0$.
Utiliser la règle de l'Hospital: $\lim_{n\to\infty} |f_n'(x)| = \lim_{n\to\infty} \frac{1/n}{xn^{x-1}} = \lim \frac{1}{xn^x} = 0$.

Ainsi, en vertue du critère de Leibniz, $\sum f_n'(x)$ converge simplement sur $]0, \infty[$.
On va montrer maintenant la convergence uniforme de $\sum f_n'$ sur $[a, \infty[$, où $a > 0$.
Soit $a > 0$ fixé. On a $\sigma_n := \sup_{x\geq a} |f_n'(x)| = \sup_{x\geq a} \frac{\log n}{n^x} = \frac{\log n}{n^a}$, car n^{-x} est une fonction décroissante (en x). Mais $\sigma_n \to 0$.

Donc, d'après le théorème 14.7, $\sum_n f_n'$ converge uniformément sur $[a, \infty[$. En vertue du corollaire 16.6 appliqué à $I =]a, \infty[$, Ψ est différentiable sur I et

$$\Psi'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\log n}{n^x}, \ x > a. \tag{16.2}$$

Comme $a > 0$ est arbitaire, en obtient que Ψ est différentiable sur $]0, \infty[$ et (16.2) est satisfait pour tout $x > 0$. De la même façon, on peut montrer que Ψ est infiniment différentiable sur $]0, \infty[$.

17. Intégrales impropres et convergence uniforme

Definition 17.1. *Soient $a \in \mathbb{R}, b \in \bar{\mathbb{R}}$ et $a < b$. Soit $\{f_s : s \in S\}$ une famille/ensemble de fonctions dans $R([a,b[)_{\text{loc}}$. On dit que la famille des intégrales impropres $\int_a^{\to b} f_s(t)dt$ est uniformément convergente (uniformément par rapport au paramètre s) si*

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists c \in [a,b[\;\; \forall s \in S \;\; \forall u,v \in [c,b[: \left| \int_u^v f_s(t)dt \right| < \varepsilon.$$

Remarque: i) En général, dans ce paragraphe 17, $S = \mathbb{N}$.
ii) En vertue du critère de Cauchy, Théorème 1.10 du chapitre 2, on voit que si la famille des intégrales impropres $\int_a^{\to b} f_s(t)dt$, $s \in S$, est uniformément convergente, alors chaque intégrale impropre individuelle $\int_a^{\to b} f_s(t)dt$ est convergente.

Proposition 17.1. *Soit $\{f_s : s \in S\}$ une famille dans $R([a,b[)_{\text{loc}}$ et $h \in R([a,b[)_{\text{loc}}$, $h \geq 0$. Supposons que:*

1) $|f_s(t)| \leq h(t)$, $\forall t \in [a,b]$.
2) L'intégrale impropre $\int_a^{\to b} h(t)dt$ est convergente.

Alors la famille des intégrales impropres $\int_a^{\to b} f_s(t)dt$, $s \in S$, est uniformément convergente.

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$. $\int_a^{\to b} h(t)dt < \infty \Longrightarrow \exists c \in [a,b[\;\forall u,v \in [c,b[$: $\left|\int_u^v h(t)dt\right| < \varepsilon$. Donc $\forall s \in S \; \forall u,v \in [c,b[, \; u \leq v$ on a:

$$\left| \int_u^v f_s(t)dt \right| \leq \int_u^v |f_s(t)|dt \overset{h \geq 0}{\leq} \int_u^v h(t)dt < \varepsilon.$$

Théorème 17.2. *Soient $a \in \mathbb{R}, b \in \bar{\mathbb{R}}$ et $a < b$. Soit (f_n) une suite dans $R([a,b[)_{\text{loc}}$ et $f : [a,b[\to \mathbb{C}$. Supposons que*

1) $\forall c \in [a,b[$, $f_n \to f$ uniformément sur $[a,c]$;
2) la famille des intégrales impropres $\int_a^{\to b} f_n(t)dt$, $n \in \mathbb{N}$, est uniformément convergente.

Alors $f \in R[a,b[)_{\text{loc}}$, l'intégrale impropre $\int_a^{\to b} f(t)dt$ est convergente et on a: "$\lim \int = \int \lim$"; i.e.

$$\int_a^{\to b} f(t)dt = \lim_n \int_a^{\to b} f_n(t)dt.$$

Preuve. Soit $a \leq c < d < b$. Alors $f_n \in R[c,d], f_n \overset{\text{unif.}}{\to} f \overset{Th.16.2}{\Longrightarrow} f \in R[c,d]$ et

$$\int_c^d f_n(t)dt \to \int_c^d f(t)dt. \tag{17.1}$$

En plus, comme c et d sont arbitraires, $f \in R([a,b[)_{\text{loc}}$.
Soit $\varepsilon > 0$. Alors (2) entraine: $\exists c = c(\varepsilon) \in \,]a,b[\; \forall n \in \mathbb{N}\; \forall u,v \in [c,b[$ satisfaisant $u < v$ on a:

$$\left|\int_u^v f_n(t)dt\right| < \varepsilon \tag{17.2}$$

En laissant $n \to \infty$ et en vertue de (17.1), on obtient de (17.2)

$$\left|\int_u^v f(t)dt\right| \leq \varepsilon. \tag{17.3}$$

D'après le critère de Cauchy II.1.10, on voit que l'intégrale impropre $\int_a^{\to b} f(t)dt$ est convergente.
A montrer que

$$\int_a^{\to b} f_n(t)dt \to \int_a^{\to b} f(t)dt;$$

i.e.

$$\lim_n \left(\lim_{x\to b^-} \int_a^x f_n(t)dt\right) = \lim_{x\to b^-} \left(\lim_n \int_a^x f_n(t)dt\right).$$

Soit $g_n(x) = \int_a^x f_n(t)dt$ et $g(x) = \int_a^x f(t)dt$. En va appliquer le théorème 15.1. Pour cela il reste a vérifier que $\lim_n g_n(x) = g(x)$ uniformément sur $[a,b[$:

Soit $\varepsilon > 0$ et $c(\varepsilon)$ la constante ci-dessus. Choisir $n(\varepsilon)$ si grand tel que

$$|f_n(t) - f(t)| \leq \frac{\varepsilon}{c(\varepsilon) - a}$$

$\forall n \geq n(\varepsilon)$ et $\forall t \in [a, c(\varepsilon)]$ (possible car $f_n \to f$ uniformément sur $[a, c(\varepsilon)]$).
Alors

$$\begin{aligned}
|g_n(x) - g(x)| &\leq \int_a^x |f_n(t) - f(t)|dt \\
&\overset{\text{si } c(\varepsilon) \leq x < b}{\leq} \int_a^{c(\varepsilon)} \underbrace{|f_n(t) - f(t)|}_{\leq \frac{\varepsilon}{c(\varepsilon)-a}} dt + \int_{c(\varepsilon)}^x |f_n(t)|dt + \int_{c(\varepsilon)}^x |f(t)|dt \\
&\underset{n \geq n(\varepsilon)}{\leq} \frac{\varepsilon}{c(\varepsilon) - a}(c(\varepsilon) - a) \overset{(17.2)}{+} \varepsilon \overset{(17.3)}{+} \varepsilon = 3\varepsilon,
\end{aligned}$$

et

$$|g_n(x) - g(x)| \overset{\text{si } a \leq x < c(\varepsilon)}{\leq} \int_a^x |f_n(t) - f(t)|dt \underset{n \geq n(\varepsilon)}{\leq} \frac{\varepsilon}{c(\varepsilon) - a}(x - a) \leq \varepsilon.$$

Donc $\forall n \geq n(\varepsilon) : \sup_{x \in [a,b[} |g_n(x) - g(x)| \leq 3\varepsilon$.

Remarque

Soit f_n localement intégrable sur $[0,\infty[$, et supposons que les intégrales impropres $\int_0^\infty f_n(t)dt$ existent. Est ce que la convergence uniforme de f_n vers f sur $\mathbb{R}$ implique que l'intégrale impropre $\int_0^\infty f(t)dt$ existe?

La réponse est NON. Il suffit de reconsidérer l'exemple 14.6. En effet, la suite $S_n(x) = 1/x$ si $1 \leq x < n+1$ et $S_n(x) = 0$ si $x \geq n+1$ converge uniformément sur $[1,\infty[$ vers $1/x$, mais $\int_1^\infty \frac{dt}{t}$ diverge.

FIN DU CHAPITRE 3

4 Intégrales dépendant d'un paramètre

18. Intégrales ordinaires dépendant d'un paramètre

Rappel

Theorem 18.1. *Soit $K \subseteq \mathbb{R}^m$ un compact (=fermé et borné) et $f : K \to \mathbb{R}^s$ continue. Alors f est uniformément continue sur K; i.e.*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall u, v \in K : ||u - v||_m < \delta \Longrightarrow ||f(u) - f(v)||_s < \varepsilon.$$

Lemma 18.2. *Soient $A \subseteq \mathbb{R}^p, B \subseteq \mathbb{R}^q$ et $b \in B$ (B fermé où ouvert). On suppose que A soit compact. Soit $f : A \times B \to \mathbb{R}^s$ une application (fonction vectorielle) continue. Alors $f(x, y) \to f(x, b)$ uniformément par rapport à $x \in A$ si $y \to b, y \in B$.*

Preuve. Soit $D = \{y \in B : ||y - b||_q \leq r\}$, r petit. Alors $A \times D$ est compact. Comme f est uniformément continue sur $A \times D$, on a $||f(x, y) - f(x', b)||_s < \varepsilon$ si $||(x, y) - (x', b)||_p < \delta$ avec $x, x' \in A, y \in D$. Ainsi $\forall x \in A$, $\forall y \in D$: $||y - b||_q < \delta \Longrightarrow ||f(x, y) - f(x, b)||_s < \varepsilon$; i.e. $\sup_{x \in A} ||f(x, y) - f(x, b)||_s \to 0$ si $y \to b$.

Théorème 18.3. *Soient $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, $B \subseteq \mathbb{R}^p$ et $f : [a, b] \times B \to \mathbb{C}$. Si la fonction f est continue sur $[a, b] \times B$, alors la fonction $F : B \to \mathbb{C}$ définie par*

$$F(y) = \int_a^b f(x, y)dx,\ \ y \in B$$

est continue sur B.

Preuve. Soit $A = [a, b]$ et $y_0 \in B$. Alors $\forall y \in B$,

$$|F(y) - F(y_0)| \leq \int_a^b |f(x, y) - f(x, y_0)|dx \leq \int_a^b \sup_{u \in A} |f(u, y) - f(u, y_0)|dx$$
$$= (b - a) \sup_{u \in A} |f(u, y) - f(u, y_0)| \to 0$$

si $y \to y_0$ par le lemme 18.2.

Proposition 18.4. *Soient $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, $I =]0, \infty[$ et $f : [a, b] \times I \to \mathbb{C}$. Supposons que f soit continue sur $[a, b] \times I$ et que $h(x) := \lim_{y \to \infty} f(x, y)$ existe uniformément sur $[a, b]$. Alors $h \in C[a, b]$ et*

$$\lim_{y \to \infty} \int_a^b f(x, y)dx = \int_a^b h(x)dx = \int_a^b \lim_{y \to \infty} f(x, y)dx.$$

Preuve. Soit $x_0 \in [a, b]$. Comme $\lim_{y \to \infty} f(x, y) = h(x)$ existe uniformément en x, on peut choisir y_0 tel que $\sup_{x \in [a,b]} |f(x, y_0) - h(x)| < \varepsilon$. Comme f

est continue en (x_0, y_0), il existe $\delta > 0$ tel que $|f(x, y_0) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$ si $|x - x_0| < \delta$. Alors

$$
\begin{aligned}
|h(x) - h(x_0)| &\leq |h(x) - f(x, y_0)| + |f(x, y_0) - f(x_0, y_0)| + |f(x_0, y_0) - h(x_0)| \\
&\leq \sup_{t \in [a,b]} |h(t) - f(t, y_0)| + \varepsilon + \sup_{t \in [a,b]} |h(t) - f(t, y_0)| \\
&\leq \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon
\end{aligned}
$$

si $|x - x_0| < \delta$. Donc h est continue en x_0. Comme x_0 est arbitaire, $h \in C[a, b]$ et ainsi $h \in R[a, b]$. Donc

$$\left| \int_a^b f(x, y) dx - \int_a^b h(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x, y) - h(x)| dx \leq (b - a) \sup_{x \in [a,b]} |f(x, y) - h(x)| \to 0$$

si $y \to \infty$.

Lemma 18.5. *Soient $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ et $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle. Soit $f : [a, b] \times I \to \mathbb{C}, (x, y) \mapsto f(x, y)$ une fonction telle que*

i) f est continue sur $[a, b] \times I$;
ii) La dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial y} : [a, b] \times I \to \mathbb{C}$ existe et est continue.

Alors pour $y_0 \in I$, la fonction

$$H(x, y) = \begin{cases} \frac{f(x,y) - f(x,y_0)}{y - y_0} & \text{si } x \in [a, b], y \in I \setminus \{y_0\} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0) & \text{si } x \in [a, b], y = y_0. \end{cases}$$

est continue sur $[a, b] \times I$.

Proof. Soit $x_0 \in [a, b]$. Notons d'abord que H est continue en tout point $(x_1, y_1) \in [a, b] \times I$ tel que $y_1 \neq y_0$. Donc, il reste a montrer la continuité de H en (x_0, y_0).
Comme $\frac{\partial f}{\partial y}$ est continue sur $[a, b] \times I$, elle est uniformément continue sur le compact $K = [a, b] \times \{y \in I : |y - y_0| \leq \eta\}$, η petit. Donc, pour $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(u, v) - \frac{\partial f}{\partial y}(u', v') \right| < \varepsilon \ \forall (u, v), (u', v') \in K \text{ tq } ||(u, v) - (u', v')||_2 \leq \delta.$$

Alors pour $(x, y) \in [a, b] \times I, (x, y) \neq (x_0, y_0)$ on a:

$$\Delta(x, y) := |H(x, y) - H(x_0, y_0)| \leq |H(x, y) - H(x, y_0)| + |H(x, y_0) - H(x_0, y_0)|$$

Si $y_0 < y < y_0 + \delta$ et $|x - x_0| < \delta$ on a:

$$\Delta(x, y) = \left| \frac{f(x, y) - f(x, y_0)}{y - y_0} - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0) \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right| =$$

$$\left| \frac{1}{y - y_0} \int_{y_0}^{y} \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, s) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0) \right) ds \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right| \leq$$

$$\frac{1}{y-y_0}\varepsilon(y-y_0)+\varepsilon = 2\varepsilon$$

(Notons que $y_0 \leq s \leq y \Longrightarrow |s-y_0| < \delta$).
Si $y = y_0$ et $x \neq x_0$, on n'a que le deuxième terme. $\square$

Théorème 18.6. *Soient $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ et $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle. Soit $f : [a,b] \times I \to \mathbb{C}, (x,y) \mapsto f(x,y)$ une fonction telle que*

i) f est continue sur $[a,b] \times I$;
ii) La dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial y} : [a,b] \times I \to \mathbb{C}$ existe et est continue.

Alors la fonction $F(y) = \int_a^b f(x,y)dx,\ y \in I$, est de classe C^1 sur I et

$$F'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx;$$

i.e. $\frac{d}{dy}\int_a^b = \int_a^b \frac{\partial}{\partial y}$.

Preuve. Soit $y, y_0 \in I$ et $y \neq y_0$.

$$\frac{F(y)-F(y_0)}{y-y_0} = \frac{1}{y-y_0}\int_a^b \left(f(x,y)-f(x,y_0)\right)dx$$

$$= \int_a^b \frac{f(x,y)-f(x,y_0)}{y-y_0}dx = \int_a^b H(x,y)dx =: G(y),$$

où

$$H(x,y) = \begin{cases} \frac{f(x,y)-f(x,y_0)}{y-y_0} & \text{si } x \in [a,b], y \in I \setminus \{y_0\} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0) & \text{si } x \in [a,b], y = y_0. \end{cases}$$

Comme H est continue sur $[a,b] \times I$, on obtient grâce au théorème 18.3 que G est continue sur I; donc

$$\lim_{y \to y_0} G(y) = G(y_0) = \int_a^b H(x,y_0)dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)dx.$$

Ainsi F est différentiable en y_0 et $F'(y_0) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y_0)dx$.

Exemple 18.7. Etudier $F(y) = \int_0^1 \frac{dx}{x^2+y^2}, y \neq 0$. Posons $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$. Alors f est continue sur $[0,1]\times]0,\infty[$, et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-2y}{(x^2+y^2)^2}$ est continue sur $[0,1]\times]0,\infty[$. On aura donc

$$F'(y) = \int_0^1 \frac{-2y}{(x^2+y^2)^2}dx.$$

Calcul explicite: $F(y) = \frac{1}{y^2}\int_0^1 \frac{dx}{1+(\frac{x}{y})^2} = \left[\frac{1}{y}\arctan\left(\frac{x}{y}\right)\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{y}\arctan\frac{1}{y}$.
$F'(y) = \frac{d}{dy}\frac{1}{y}\arctan(\frac{1}{y}) = -\frac{1}{y^2}\arctan(\frac{1}{y}) - \frac{1}{y^3}\frac{1}{1+y^{-2}}$.
D'où $\int_0^1 \frac{-2y}{(x^2+y^2)^2}dx = -\frac{1}{y^2}\arctan(\frac{1}{y}) - \frac{1}{y(1+y^2)}$.

Application:

Exemple 18.8. A montrer que $\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

Preuve. Soit

$$H(t) = \left(\int_0^t e^{-x^2}dx\right)^2 + \int_0^1 \frac{e^{-t^2(x^2+1)}}{x^2+1}\,dx,\ t>0.$$

Alors $H'(t) \equiv 0$, car

$$H'(t) = 2e^{-t^2}\int_0^t e^{-x^2}dx\ - 2t\int_0^1 e^{-t^2(x^2+1)}dx$$

$$\overset{xt=s}{=} 2e^{-t^2}\int_0^t e^{-x^2}dx\ - 2te^{-t^2}\int_0^t e^{-s^2}\frac{ds}{t} = 0$$

Donc $H(t) \equiv C$ et ainsi $C = \lim_{t\to 0} H(t) = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}dx = \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4}$.

Notons que $t \mapsto \int_0^1 \frac{e^{-t^2(x^2+1)}}{x^2+1}\,dx$ est continue sur $]0,\infty[$; et que $\lim_{t\to\infty}\frac{e^{-t^2(x^2+1)}}{x^2+1} = 0$ uniformément par rapport à $x \in \mathbb{R}$. (Notons que $\frac{e^{-t^2(x^2+1)}}{x^2+1} \leq e^{-t^2}$). Donc $\lim_{t\to\infty}\int_0^1 \frac{e^{-t^2(x^2+1)}}{x^2+1}\,dx = 0$. Ainsi on obtient

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Théorème 18.9. *Soient $a,b \in \mathbb{R}, a<b$ et $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle. Supposons que $f : [a,b]\times I \to \mathbb{C}$, $(x,y) \mapsto f(x,y)$ soit continue et que $\frac{\partial f}{\partial y} : [a,b]\times I \to \mathbb{C}$ soit continue. Soient $u,v : I \to [a,b]$ deux fonctions de classe C^1. Alors*

$$H(y) = \int_{u(y)}^{v(y)} f(x,y)dx, y \in I$$

est de classe C^1 et

$$H'(y) = \int_{u(y)}^{v(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx + f(v(y),y)v'(y) - f(u(y),y)u'(y).$$

Preuve. Soit $G(\alpha,\beta,y) = \int_\alpha^\beta f(x,y)dx$ où $(\alpha,\beta,y) \in S := [a,b]\times[a,b]\times I$. Les théorèmes 18.3 et 18.6 impliquent que G est continue sur S et que $\frac{\partial G}{\partial y}$ existe et est continue sur S. Comme $H(y) = G(u(y),v(y),y)$ est une composée de fonctions différentiables, $H'(y)$ existe. En plus,

$$H'(y) = \frac{\partial G}{\partial \alpha}(u(y),v(y),y)u'(y) + \frac{\partial G}{\partial \beta}(u(y),v(y),y)v'(y) + \frac{\partial G}{\partial y}(u(y),v(y),y)\cdot 1.$$

19. Intégrales impropres dépendant d'un paramètre

Théorème 19.1. *Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \bar{\mathbb{R}}$ avec $a < b$. Soit $B \subseteq \mathbb{R}^q$ (B fermé où ouvert) et $f : [a, b[\times B \to \mathbb{C}$ une fonction continue. On suppose que la famille des intégrales impropres $\int_a^{\to b} f(t, s)dt$, $s \in B$, soit uniformément convergente (par rapport à la variable s). Alors la fonction $F(s) = \int_a^{\to b} f(t, s)dt$ est continue sur B.*

Preuve. Notons d'abord que pour tout $s_0 \in B$, $\lim_{s \to s_0} f(t, s) = f(t, s_0)$ uniformément sur chaque interval compact $[a, c]$, avec $c < b$ (d'après le lemme 18.2). On utilise maintenant le théorème 6.2 du chapitre 3 (remplacer la variable discrète n par s). Ou bien on considère $s_n \to s_0$ et $f_n(t) = f(t, s_n)$).

Remarque On ne peut pas laisser tomber l'hypothèse de la convergence uniforme de cette famille des intégrales impropres.

Exemple 19.2. Soit $f(t, s) = \dfrac{s}{1 + (st)^2}$. Alors f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

$$\int_0^T f(t, s)dt = \arctan(sT) \underset{T \to \infty}{\longrightarrow} \pi/2 \text{ si } s > 0.$$

Donc

$$F(s) = \int_0^\infty f(t, s) = \begin{cases} \pi/2 & \text{si } s > 0 \\ -\pi/2 & \text{si } s < 0 \\ 0 & \text{si } s = 0 \end{cases}.$$

Ainsi F est discontinue.

Théorème 19.3. *Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \bar{\mathbb{R}}$ avec $a < b$, et $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle <u>borné</u>. Soit $f : [a, b[\times I \to \mathbb{C}$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$, une fonction telle que*

(1) *f est continue sur $[a, b[\times I$;*
(2) *la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial y} : [a, b[\times I \to \mathbb{C}$ existe et est continue;*
(3) *$\exists y_0 \in I$ tel que l'intégrale impropre $\int_a^{\to b} f(x, y_0)dx$ converge;*
(4) *la famille des intégrales impropres $\int_a^{\to b} \frac{\partial f}{\partial y}(x, s)dx$ converge uniformément par rapport à $s \in I$.*

Alors la famille des intégrales impropres $\int_a^{\to b} f(x, s)dx$ converge uniformément par rapport à $s \in I$ et la fonction

$$F(s) = \int_a^{\to b} f(x, s)dx$$

est de classe C^1 sur I et

$$F'(s) = \int_a^{\to b} \frac{\partial f}{\partial y}(x, s)dx.$$

Preuve. On utilise le théorème 5.4 du chapitre 3 et ses remarques (1) et (2) en remplacant la variable discrète n par u:
Hyp (3): i) $\lim_{u \to b} \int_a^u f(x, y_0)dx = \int_a^{\to b} f(x, y_0)dx$ existe;

Hyp (4): ii) $\frac{d}{dy}\int_a^u f(x,y)dx = \int_a^u \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx$ converge uniformément en y vers $\int_a^{\to b} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx =: g(y)$.
Alors, ce théorème et ses remarques (1) et (2) impliquent que $F(y) = \lim_{u\to b}\int_a^u f(x,y)dx$ existe uniformément par rapport à $y \in I$, que F est différentiable et que

$$F'(y) = g(y) = \int_a^{\to b} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx.$$

FIN DU CHAPITRE 4

5 Quelques compléments

20. Séries de Taylor-MacLaurin

Une série de Taylor-MacLaurin est une série de la forme $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, où $a_n \in \mathbb{C}$ et z est une variable complexe. On les appelles aussi séries entières.

Theorem 20.1 (Théorème de Cauchy-Hadamard)**.**
Soit $R \in [0, \infty]$ définie par

$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim_n \sup\{\sqrt[k]{|a_k|} : k \geq n\}}.$$

Alors pour chaque r avec $0 < r < R$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ converge uniformément et absolument dans le disque $D(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C} : |z-z_0| \leq r\}$. La série diverge si $|z - z_0| > R$.
R s'appelle le rayon de convergence de la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ et $D(z_0, R) := \{z \in \mathbb{C} : |z-z_0| < R\}$ le disque de convergence.

Si $|z - z_0| = R$, on ne peut rien conclure en général (convergence/divergence pour certains/tous les z sur le bord du disque $D(z_0, R)$ est possible; ça dépend des coefficients a_n.

Preuve. Posons $z_0 = 0$

• Soit $|z| > R$, c'est à dire $\frac{1}{|z|} < \frac{1}{R} \Rightarrow \forall\, N \quad \exists\, n \geq N$ tq $\frac{1}{|z|} < \sqrt[n]{|a_n|}$
$\Rightarrow\ 1 < |z^n a_n|$ c'est à dire que $z^n a_n \not\to 0 \Rightarrow$ la série $\Sigma\, a_n z^n$ diverge

• Soit $0 < r < R$ et $r < \rho < R$
$\Rightarrow\ \frac{1}{\rho} > \frac{1}{R} \Rightarrow \exists\, N \in \mathbb{N}$ tq $\sup\left\{\sqrt[k]{|a_k|},\, k \geq N\right\} < \frac{1}{\rho}$ donc $\forall\, z \in D(0, r)$ et $\forall\, n \geq N$:

$$|a_n z^n| \leq |a_n|\, r^n = |a_n| \left(\frac{r}{\rho}\right)^n \rho^n \leq \left(\frac{r}{\rho}\right)^n$$

$$\Rightarrow \sum_{n\geq N} |a_n z^n| \leq \sum_{n\geq N} \left(\frac{r}{\rho}\right)^n = \left(\frac{r}{\rho}\right)^N \frac{1}{1-\frac{r}{\rho}} = c \quad \text{(majoration uniforme)}$$

Exemple 20.2.

• $e^z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ converge $\quad \forall\, z \in \mathbb{C}\ \left(\sqrt[n]{n!} \to +\infty\right)$

• $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n$ converge pour tout $z \in \{w \in \mathbb{C} : |w| \leq 1\} \setminus \{1\}$ et diverge pour $|z| > 1$ et $z = 1$. En effet
$\lim \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1$, donc $R = 1$. Soit $z = e^{it}$; alors $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{int}$ converge d'après la règle d'Abel-Dirichlet pour $t \notin 2\pi\mathbb{Z}$ (voir exemple 5.3 du chapite 1). Pour $t \in 2\pi\mathbb{Z}$, on a $z = 1$. Ainsi notre série coincide avec la série harmonique et elle diverge.

• voir aussi l'exemple 4.7 du chapitre 1.

21. Réarrangements de séries numériques

•*i* On a vu que $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$ diverge. Est-ce que la série $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{3n-1} + \frac{1}{3n} + \frac{1}{3n-2} + \cdots$ à la même nature?

•*ii* Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ convergente. Est-ce que

$$\underbrace{(a_0 + a_1 + a_2)}_{b_0} + \underbrace{(a_3 + a_4 + a_5 + a_6)}_{b_1} + \underbrace{(a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11})}_{b_3} + \cdots$$

converge?
•*iii* Soit

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \underbrace{(a_0 + a_1 + a_2)}_{b_0} + \underbrace{(a_3 + a_4 + a_5 + a_6)}_{b_1} + \underbrace{(a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11})}_{b_3} + \cdots$$

convergente. Est-ce que $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \cdots$ converge?

Théorème 21.1. *Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ une série numérique convergente et soit (k_j) une suite strictement croissante de nombres naturels avec $k_0 = 0$. Alors*

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{k=k_j}^{k_{j+1}-1} a_k \right)$$

converge et les valeurs de ces séries coincident.
1) En d'autres mots, on peut mettre des parenthèses dans les séries convergentes (sorte d'associativité infinie).
2) La réciproque n'est pas correcte; i.e. on ne peut pas laisser tomber les parenthèses dans les séries convergentes.

Preuve. (1) Soit $b_j = \sum_{k=k_j}^{k_{j+1}-1} a_k$. Alors la suite (S_n) des sommes partielles $(\sum_{j=0}^{n} b_j)$ de $\sum b_j$ est une sous-suite des sommes partielles de $\sum a_k$. Donc (S_n) converge. Bien sûr on a donc aussi $\sum b_j = \sum a_k$.
(2) $(1 + (-1)) + (1 + (-1)) + \cdots$ converge, (car coincide avec la série $\sum a_n$ avec $a_n = 0$ pour tout n), mais la série $1 + (-1) + 1 + (-1) + \cdots$ diverge, car le terme générale $(-1)^n$ ne tend pas vers 0.

Definition 21.1. *Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ une série numérique. Soit $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une bijection. Alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\phi(n)}$ s'appelle un réarrangement de la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.*

Theorem 21.2. *Si la série $S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ est absolument convergente, alors chaque réarrangement $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\phi(n)}$ de S converge et on a $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\phi(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$*

Preuve. Par hypothèse $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ converge. D'après le critère de Cauchy

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; : \; \sum_{n=n_0+1}^{\infty} |a_n| < \varepsilon.$$

Soit $S=\sum_{n=0}^\infty a_n$. Choisir $k_0\in\mathbb{N}$ tel que $\{0,1,2,\dots,n_0\}\subseteq\{\phi(0),\phi(1),\dots,\phi(k_0)\}$. Pour $N\geq k_0$ on a:

$$|S-\sum_{n=0}^{N}a_{\phi(n)}|=|S-\sum_{k=0}^{n_0}a_k|+|\sum_{k=0}^{n_0}a_k-\sum_{n=0}^{N}a_{\phi(n)}|$$

$$\leq|\sum_{k=n_0+1}^{\infty}a_k|+\sum_{k=n_0+1}^{\infty}|a_k|\leq 2\varepsilon.$$

L'assertion du théorème 21.2 n'est plus vraie pour les séries semi-convergentes.

Exemple 21.3. La série harmonique alternée

$$S=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}+\frac{1}{11}\pm\dots$$

converge et $\frac{1}{2}<S<\frac{5}{6}$. Son réarrangement

$$R=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}++-\dots+\frac{1}{4n+1}+\frac{1}{4n+3}-\frac{1}{2n+2}++-\cdots$$

converge aussi, (voir ci-dessous) mais

$$R\overset{(21.1)}{=}(1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2})+(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4})++-\dots>1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=\frac{5}{6},$$

car tous les termes entre parenthèses sont strictement positives.

Lemma 21.4. *Soit $\sum_{n=0}^\infty a_n$ une suite numérique. Supposons que la sous-suite (S_{3N-1}) de (S_N) converge et que $(a_n)\to 0$. Alors (S_N) converge.*

Preuve. Soit $S=\lim S_{3N-1}$. Alors $S_{3N}=S_{3N-1}+a_{3N}\to S$ et $S_{3N+1}=S_{3N-1}+a_{3N}+a_{3N+1}\to S$.

Convergence de R:

$$S_{3N-1}=\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{1}{4n+1}+\frac{1}{4n+3}-\frac{1}{2n+2}\right)=$$

$$\sum_{n=0}^{N}\left(\left[\frac{1}{4n+1}-\frac{1}{4n+4}\right]+\left[\frac{1}{4n+3}-\frac{1}{4n+4}\right]\right)=$$

$$\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{3}{((4n+1)(4n+4)}-\frac{1}{(4n+3)(4n+4)}\right).$$

Comme cette série est de la forme $\sum\frac{1}{n^2}$, $S:=\lim S_{3N-1}$ existe. D'après le Lemme 21.4,(S_N) converge vers le même nombre.

Pour $a_k\in\mathbb{R}$, soit $a_n^+=\max\{0,a_n\}$ et $a_n^-=-\min\{0,a_n\}$. Alors $a_k^+\geq 0$ et $a_k^-\geq 0$ et on a $a_k=a_k^+-a_k^-$ et $|a_k|=a_k^++a_k^-$.

Lemma 21.5. *Si* $a_k \in \mathbb{R}$, *alors*
(1) $\sum_{n=0}^{\infty} a_k$ *converge absolument* $\iff \sum a_k^+$ *et* $\sum a_k^-$ *convergent.*
(2) Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_k$ *est semi-convergente, alors* $\sum a_k^+$ *et* $\sum a_k^-$ *divergent.*

Preuve. (1) évident car $|a_k|, a_k^+$ et $a_k^- \geq 0$.
(2) En vue de (1), au moins une des séries $\sum a_k^+$ et $\sum a_k^-$ diverge. Mais alors, $a_k = a_k^+ - a_k^-$ implique que l'autre diverge aussi.

On a le résultat très étonnant suivant:
Theorem 21.6 (Théorème de réarrangement de Riemann)**.**
Soit $S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *une suite de nombres réels semi-convergente. Alors* $\forall a \in \mathbb{R}$ *il existe un réarrangement* $R = \sum_{n=0}^{\infty} a_{\phi(n)}$ *de* S *tel que* R *converge et que la valeur de cette série est égale à* a*. En plus, il existe un réarrangement* $D = \sum_{n=0}^{\infty} a_{\psi(n)}$ *de* S *tel que* D *diverge.*

Preuve. Notons d'abord que d'après le lemme 21.5, $\sum a_k^+$ et $\sum a_k^-$ divergent. vers ∞. S.p.g. $a_k \neq 0$ et $a_0 < a$. Prenons maintenant dans l'ordre tant de termes positifs dans $\{a_1, a_2, \dots\}$ tel qu'on surpasse une première fois a; (i.e $\sum_{k=1}^{N} a_{n_k} \geq a$ et $\sum_{k=1}^{N-1} a_{n_k} < a$); ensuite prenons dans l'ordre correct tant de termes négatifs dans $\{a_1, a_2, \dots\}$ tel qu'on arrive une première fois à un nombre plus petit que a; i.e.

$$\sum_{k=1}^{N_1} \underbrace{a_{n_k}}_{>0} + \sum_{j=1}^{M_1} \underbrace{a_{m_j}}_{<0} \leq a \text{ et } \sum_{k=1}^{N_1} a_{n_k} + \sum_{j=1}^{M_1-1} a_{m_j} > a.$$

De nouveau on prend dans l'ordre tant de termes positifs dans $\{a_1, a_2, \dots\}$ tel qu'on surpasse une deuxième fois a;

$$\sum_{k=1}^{N_1} \underbrace{a_{n_k}}_{>0} + \sum_{j=1}^{M_1} \underbrace{a_{m_j}}_{<0} + \sum_{k=N_1+1}^{N_2} \underbrace{a_{n_k}}_{>0} \geq a$$

et

$$\sum_{k=1}^{N_1} a_{n_k} + \sum_{j=1}^{M_1-1} a_{m_j} + \sum_{k=N_1+1}^{N_2-1} \underbrace{a_{n_k}}_{>0} < a.$$

Et ainsi de suite. Comme pour tout q la section $\sum_{n=p+1}^{n=p+q} a_n \to 0$ si $p \to \infty$, on obtiendra un rapprochement des sommes partielles de ce réarrangement à la valeur a.
De façon analogue on raisonne pour le cas de la divergence.

Theorem 21.7. *Soient* $I_j \subseteq \mathbb{N}$ *des ensembles infinis, disjoints deux a deux, tels que* $\mathbb{N} = \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$*. Soit* $S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *une série absolument convergente et* $S_j = \sum_{n \in I_j} a_n$*. Alors La série* $R = \sum_{n=0}^{\infty} S_j$ *est absolument convergente et* $R = S$*.*

Proof. $\square$

Notons que S_j est bien une série absolument convergente; donc l'ordre de sommation ne joue pas de rôle.
Comme $\sum |a_n|$ est convergente, $\forall \epsilon > 0$, $\exists M = M(\epsilon) > 0$ tel que $\sum_{n=M}^{\infty} |a_n| < \epsilon$. En plus, il existe $N = N(\epsilon)$ tel que $\forall n \geq N :\ \min I_n \geq M$. Donc

$$\sum_{j=N}^{\infty} |S_j| \leq \sum_{n=M}^{\infty} |a_n| < \epsilon.$$

Donc R est absolument convergente.
En plus $p \geq N$

$$|\sum_{j=1}^{p} S_j - \sum_{j=1}^{M-1} a_j| \leq \sum_{n=M}^{\infty} |a_n| < \epsilon,$$

car tous les a_n avec $n < M$ se trouvent quelque part dans les S_j, $j \leq N$. Ainsi

$$|\sum_{j=1}^{p} S_j - \sum_{j=1}^{\infty} a_j| \leq |\sum_{j=1}^{p} S_j - \sum_{j=1}^{M-1} a_j| + |\sum_{j=1}^{M-1} a_j - \sum_{j=1}^{\infty} a_j| =$$

$$\leq \epsilon + \sum_{n=M}^{\infty} |a_n| \leq 2\epsilon$$

pour $p \geq N$.

22. Changement de signe dans la série harmonique

Exemple 22.1. • $1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}-\frac{1}{8}++--\cdots$ converge.
• $1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}-\frac{1}{9}\ ++-\ ++-\cdots$ diverge.

Proposition 22.2. *Considérons $\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n\frac{1}{n}$ où $\varepsilon_n\in\{-1,1\}$. Supposons que ε_n est égal à 1 p-fois, puis égal à -1 q-fois, puis de nouveau égal à 1 p-fois, puis égal à -1 q-fois etc. Alors la série est convergente si $p=q$ et divergente si $p\neq q$.*

Preuve. (seulement pour $p=q=2$ et pour $p=2$ et $q=1$).

• $p=q=2$
$a_n=\frac{1}{n}$ si $n=4k+1$ et $n=4k+2$, et $a_n=-\frac{1}{n}$ si $n=4k+3$ et $n=4k+4$, $k\in\mathbb{N}$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}-\frac{1}{8}++\cdots=$$

$$(1+\frac{1}{2})-(\frac{1}{3}+\frac{1}{4})+(\frac{1}{5}+\frac{1}{6})-(\frac{1}{7}+\frac{1}{8})+-\cdots$$

Soit $b_k=(-1)^k(\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2})$. Alors la série $S=\sum_{k=0}^{\infty}b_k$ est convergente (car alternée et $|b_k|$ est décroissante avec $\lim b_k=0$.)

$S_{4N}=\sum_{n=1}^{4N}a_n=\sum_{k=0}^{2N-1}b_k\to S$. Mais $S_{4N+1},S_{4N+2},S_{4N+3}$ ce distinguent de S_{4N} par au plus 3 termes. Comme $a_n\to 0$, on conclut que ces 4 sous-suites de (S_N) convergent vers S.

• $p=2,q=1$
$a_n=\frac{1}{n}$ si $n=3k+1$ et $n=3k+2$ et $a_n=-\frac{1}{n}$ si $n=3k+3$,$k\in\mathbb{N}$.

$$S_{3N+3}=\sum_{k=0}^{N}\left(\frac{1}{3k+1}+\frac{1}{3k+2}\right)-\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{3k+3}=$$

$$=\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{3k+1}+\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{1}{3k+2}-\frac{1}{3k+3}\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{3k+1}+\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{(3k+2)(3k+3)}.$$

Mais $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{3k+1}$ diverge (car minorée par $\frac{1}{3}\sum\frac{1}{k+1}$) et $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(3k+2)(3k+3)}$ converge, car de la forme $C\sum\frac{1}{k^2}$. Donc la limite de S_{3N+3} est infinie, et ainsi (S_n) diverge.

Exemple 22.3.
On va étudier une série de la forme $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \frac{1}{n}$, où la formule pour le changement de signe est plus compliquée: on suppose qu'il change après 3, puis 5, puis 7, puis 9, etc termes:
$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} - \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \cdots + \frac{1}{15} - \frac{1}{16} - \cdots$
i.e. on considère la série

$$Q = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = -\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{[\sqrt{n}]} \frac{1}{n}.$$

Notons que $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n+1) = (n+1)^2$.
On va montrer que Q converge.

Considérons

$$R := \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \cdots + \frac{1}{15}\right) - \frac{1}{16} - \cdots$$

Soit

$$b_k = \sum_{i=k^2}^{(k+1)^2-1} \frac{1}{i}.$$

Alors $R = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} b_k$ converge (voir ci-dessous). Soit $S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n$. Alors

$$S_{(N+1)^2-1} = \sum_{k=1}^{N} (-1)^{k+1} b_k \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} R$$

Il faut étudier maintenant les sommes partielles S_j avec

$$j = N^2, \ldots, N^2 + 2N - 1 = (N+1)^2 - 2.$$

On voit que pour ces j on a : $|S_j - S_{(N+1)^2-1}| \leq b_N \to 0$ si $N \to \infty$. Donc ces sommes partielles convergent aussi vers R. Ainsi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

Il reste à montrer que $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} b_k$ converge. Utilisons le critère de Leibniz. Pour $k \geq 2$

$$b_{k+1} = \sum_{i=(k+1)^2}^{(k+2)^2-1} \frac{1}{i} \leq \int_{(k+1)^2-1}^{(k+2)^2-1} \frac{1}{x} dx = \log\left(\frac{(k+2)^2 - 1}{(k+1)^2 - 1}\right) =: L_k$$

$$I_k := \log\left(\frac{(k+1)^2}{k^2}\right) = \int_{k^2}^{(k+1)^2} \frac{1}{x} dx \leq \sum_{i=k^2}^{(k+1)^2-1} \frac{1}{i} = b_k$$

Mais

$$L_k \leq I_k \Longleftrightarrow \frac{(k+2)^2 - 1}{(k+1)^2 - 1} \leq \frac{(k+1)^2}{k^2} \Longleftrightarrow$$

$$\frac{((k+2)+1)(k+2-1)}{((k+1)+1)(k+1-1)} \leq \frac{(k+1)^2}{k^2} \Longleftrightarrow$$

$$\frac{(k+3)(k+1)}{(k+2)k} \leq \frac{(k+1)^2}{k^2} \iff$$
$$\frac{k+3}{k+2} \leq \frac{k+1}{k} \iff$$
$$k(k+3) \leq (k+1)(k+2) \iff 0 \leq 2.$$

Donc (b_k) est décroissante. En plus, $b_k \to 0$ car

$$b_k \leq \sum_{i=k^2}^{(k+1)^2-1} \frac{1}{i} \leq \int_{k^2-1}^{(k+1)^2-1} \frac{1}{x} dx = \log\left(\frac{(k+1)^2-1}{k^2-1}\right) \to 0$$

23. La fonction Gamma

Theorem 23.1. *L'intégrale impropre $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$ converge pour $x > 0$. C'est la fonction Gamma. Elle satisfait $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, $x > 0$. En plus, $\Gamma(n+1) = n!$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Γ est une fonction de classe C^∞ sur $]0, \infty[$.*

Preuve. Soit $f(t,x) = t^{x-1}e^{-t}$. Notons que $\lim_{t\to 0} f(t,x) = 0$ si $x > 1$ et $= 1$ si $x = 1$. Donc, si $x \geq 1$, c'est seulement en ∞ qu'on doit étudier la convergence de cette intégrale impropre. D'autre part, si $0 < x < 1$, l'intégrale est aussi impropre en 0.
Fixons $x > 0$ et soit $N = [x] + 1$. Alors, pour $t \geq 1$,

$$0 \leq f(t,x) \leq \frac{t^N}{e^t} \leq \frac{t^N}{\frac{t^{N+2}}{(N+2)!}} = (N+2)!\frac{1}{t^2}$$

Comme $\int_1^\infty \frac{1}{t^2}dt$ converge, on voit que $\int_1^\infty f(t,x)dt$ converge $\forall x > 0$.
Grâce au théorème 6.2 du chapitre 2, la famille des intégrales impropres $\int_1^\infty f(t,x)dt$ est même uniformément convergente par rapport au paramètre $x \in]0, x_0]$; donc $\int_1^\infty f(t,x)dt$ est continue sur $]0, \infty[$ en vertue du théorème 2.1 du chapitre 4.

Etudions la différentiabilité de $\int_1^\infty f(t,x)dx$. Notons que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t,x) = (\log t)t^{x-1}e^{-t} = (\log t)f(t,x).$$

De même,

$$H_n(t,x) := \frac{\partial^n f}{\partial^n x}(t,x) = (\log t)^n f(t,x).$$

Ces fonctions sont continues sur $]0, \infty[\times]0, \infty[$.
Par le même raisonnement que ci-dessus on voit que les intégrales impropres $\int_1^\infty H_n(t,x)dt$ sont uniformément convergente par rapport au paramètre $x \in]0, x_0]$ (notez que $(\log t)^n \leq t^n$ si $t \geq 1$.) Donc, $\int_1^\infty H_{n-1}(t,x)dt$ est différentiable pour chaque $x > 0$ et la dérivée est égale $\int_1^\infty H_n(t,x)dt$.

Etudions maintenant $\int_0^1 f(t,x)dt$. Soit $0 < a < 1$ et $a \le x \le 1$. Alors $t^{x-1}e^{-t} \le t^{a-1}$ pour $0 < t \le 1$. Comme $\int_0^1 \frac{1}{t^{1-a}}dt$ est convergente, la famille des intégrales impropres $\int_0^1 f(t,x)dt$ est uniformément convergente par rapport à $x \in [a,1]$. Donc, $\int_0^1 f(t,x)dt$ est continue.
En notant que pour $s \ge 1$ et $\beta > 0$ on a $(\log s)^n \le C_n s^\beta$, on voit que

$$(\log(1/t))^n t^{x-1}e^{-t} \le C_n t^{-a/2}t^{a-1} = C_n \frac{1}{t^{1-\frac{a}{2}}}$$

pour $0 < t \le 1$. Donc, de nouveau, la famille des intégrales impropres $\int_0^1 H_n(t,x)dt$ est uniformément convergente par rapport à $x \in [a,1]$. Donc $\int_0^1 f(t,x)dt$ est infiniment différentiable.

Ainsi, on a montré que Γ est infiniment différentiable et que

$$\Gamma^{[n]}(x) = \int_0^\infty (\log t)^n t^{x-1}e^{-t}dt.$$

On va montrer maintenant que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. Soit $x > 0$. Alors, en utilisant l'intégration par partie (valable aussi pour les intégrales impropres $\int_{\to 0}^1 f(x,t)dt$), on obtient

$$\Gamma(x+1) = \lim_{M\to\infty} \int_0^M t^x e^{-t}dt =$$

$$\lim_{M\to\infty} \left[-t^x e^{-t}\right]_0^M + \lim_{M\to\infty} \int_0^M x t^{x-1}e^{-t}dt = x\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt = x\Gamma(x).$$

On déduit que $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = \cdots = n!\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}dt = n!$

Théorème 23.2 (Formule de Stirling)**.**
On a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!e^n}{\sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}} = 1,$$

i.e.

$$n! \sim \frac{n^n\sqrt{2\pi n}}{e^n}$$

The $(n+1)$th Proof of Stirling's Formula

Reinhard Michel

A review of different approaches to Stirling's formula is given in **[4]**. A further reference is **[2]**, where the purpose is "to give an extremely short proof." There, the author must employ some analysis to justify the application of Lebesgue's dominated convergence theorem (which, in fact, is not an elementary one). To avoid this application, in **[1]** we used a skillful but not so obvious estimate of the ln function.

In the following we present a really elementary deduction of Stirling's formula. Let $t > 0$, $f(x) = x^t e^{-x}$ for $x > 0$, and $A = \{x : |x - t| \geq t/2\}$. Then

$$\Gamma(t+1) = \int_0^\infty f(x)\,dx = \int_{t/2}^{3t/2} f(x)\,dx + \int_0^\infty 1_A(x) f(x)\,dx,$$

where 1_A is the characteristic function of A. As $x \in A$ implies $1 \leq 4(x-t)^2/t^2$, we have $1_A(x) \leq 4(x-t)^2/t^2$. This and $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ for all $z > 0$ (see **[3**, p. 280, No. 11**]**) yield

$$\left|1 - \frac{1}{\Gamma(t+1)} \int_{t/2}^{3t/2} x^t e^{-x}\,dx\right| \leq 4\frac{t+2}{t^2}.$$

Making the change of variables $x = y\sqrt{t} + t$ and setting $g_t(y) = (1 + y/\sqrt{t})^t e^{-y\sqrt{t}}$ for $y > -\sqrt{t}$, we get

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t^t\sqrt{t}}{\Gamma(t+1)e^t} \int_{-\sqrt{t}/2}^{\sqrt{t}/2} g_t(y)\,dy = 1. \tag{1}$$

Now, if $|x| \leq 1/2$ then

$$\left|\ln(1+x) - x + \frac{1}{2}x^2\right| \leq \sum_{k=3}^\infty \frac{|x|^k}{k} \leq \frac{1}{3}\cdot\frac{|x|^3}{1-|x|} \leq \frac{2}{3}|x|^3,$$

and for all u and v,

$$|e^u - e^v| = \left|\sum_{k=1}^\infty \frac{(u-v)^k}{k!}\right| e^v \leq |u-v|e^{|u-v|}e^v.$$

Applying these formulas with $x = y/\sqrt{t}$, $u = \ln g_t(y) = t[\ln(1+x) - x]$, and $v = -y^2/2 = -tx^2/2$ gives

$$\left|g_t(y) - e^{-y^2/2}\right| \leq \frac{|y|^3}{\sqrt{t}} e^{-y^2/6}$$

whenever $|y| \leq \sqrt{t}/2$, whence

$$\left|\int_{-\sqrt{t}/2}^{\sqrt{t}/2} g_t(y)\,dy - \int_{-\infty}^\infty e^{-y^2/2}\,dy\right| \leq \frac{1}{\sqrt{t}} \int_{-\sqrt{t}/2}^{\sqrt{t}/2} |y|^3 e^{-y^2/6}\,dy + \int_{|y|>\sqrt{t}/2} e^{-y^2/2}\,dy.$$

Therefore

$$\lim_{t\to\infty} \int_{-\sqrt{t}/2}^{\sqrt{t}/2} g_t(y)\,dy = \int_{-\infty}^\infty e^{-y^2/2}\,dy = \sqrt{2\pi}.$$

Combining this with equation (1), we have

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\Gamma(t+1)e^t}{\sqrt{2\pi}\,t^{t+1/2}} = 1.$$

REFERENCES

1. R. Michel, On Stirling's formula, this MONTHLY **109** (2002) 388–390.
2. J. M. Patin, A very short proof of Stirling's formula, this MONTHLY **96** (1989) 41–42.
3. M. R. Spiegel, *Schaum's Outline of Complex Variables*, McGraw-Hill, New York, 1974.
4. I. Tweddle, Approximating $n!$: Historical origins and error analysis, *Amer. J. Phys.* **52** (1984) 487–488.

Department of Mathematics, University of Wuppertal, Gauss-Strasse 20, D-42097 Wuppertal, Germany
michel@math.uni-wuppertal.de

FIGURE 10. American Math. Monthly 115 (2008), 844-845,————————————————————————————————————

FIN DU CHAPITRE 5————————————————————————11.5.2011————————————