Analyse complexe

cours L3 en 2015

Université de Lorraine, Metz

Raymond Mortini

January 16, 2015

Contents

Chapter 1

Fonctions holomorphes

1.1 Limites et holomorphie

1.1.A A Notions basiques

1. $i^2 = -1$

2. $\mathbb{C} = \{z = x + iy : (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$, $x = \mathrm{Re}\, z, y = \mathrm{Im}\, z$,

3. $\overline{z} = x - iy$

4. $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\overline{z}}$ module de $z \in \mathbb{C}$,

5. $z = x + iy$ et $w = u + iv \Longrightarrow zw = (xu - yv) + i(xv + yu)$

6. Représentation polaire: $z \neq 0$, alors

   $z = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ où $r = |z|$ et θ est l'argument de z, $\theta \in [-\pi, \pi[$ ou $\theta \in [0, 2\pi[$,.....

7. inégalités triangulaires: $a, b \in \mathbb{C}$,

$$\big||a| - |b|\big| \leq |a + b| \leq |a| + |b|.$$

8. $a, b \in \mathbb{C}$:

$$|a \pm b|^2 = |a|^2 \pm 2\,\mathrm{Re}\,(a\,\overline{b}) + |b|^2.$$

9. Le disque de centre $z_0 \in \mathbb{C}$ et de rayon $R > 0$ est noté par $D(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$.

10. Soit $a, b \in \mathbb{C}$. Le segment $[a, b]$, parcouru de a vers b, est l'enveloppe convexe des points a et b, i.e. $[a, b] = \{(1 - t)a + tb : 0 \leq t \leq 1\}$.

11. Une ligne polygonale est une réunion finie de segments $[a_n, b_n]$, $n = 1, \cdots, N$, tels que $b_n = a_{n+1}$, $n = 1, \cdots, N$ où $a_n, b_n \in \mathbb{C}$.

12. Un chemin dans $\mathbb{C}$ est application continue $\gamma = u + iv : [0,1] \mapsto \mathbb{C}$ qui est différentiable par morceaux: i.e. $\exists\ 0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_N = 1$ tel que $\forall s \in]t_j, t_{j+1}[$ et $\forall j \in \{0, \cdots, N-1\}$

$$\gamma'(s) = \lim_{t \to s} \frac{\gamma(t) - \gamma(s)}{t - s}$$

existent et que les dérivées à droite

$$\gamma'_+(t_j) = \lim_{t \to t_j^+} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_j)}{t - t_j}$$

respectivement les dérivées à gauche

$$\gamma'_-(t_{j+1}) = \lim_{t \to t_{j+1}^-} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_{j+1})}{t - t_{j+1}}$$

existent.

13. L'image $\Gamma = \gamma([0,1])$ est dite une courbe.

14. Le point de départ (point initial) de la courbe est $A := \gamma(0)$; le point d'arrivée (point terminal) est $B := \gamma(1)$.

15. Interprétation dynamique: Si t parcourt l'intervalle $[0,1]$, alors $\gamma(t)$ parcourt la courbe de A vers B.

    On dit aussi que $\gamma(t)$ est un paramétrage ou une paramétrisation de la courbe.

16. Les lignes polygonales sont des exemples.

17. Autre exemple: le cercle $\{e^{it} : 0 \le t \le 2\pi\}$ parcouru une fois dans le sens positif (i.e. le disque déterminé par ce cercle ce trouve à gauche du cercle).

18. Un ensemble $V \subseteq \mathbb{C}$ est dit un voisinage de z_0 s'il existe $R > 0$ tel que $D(z_0, R) \subseteq V$.

19. Un ensemble $U \subseteq \mathbb{C}$ est dit un ouvert si $\forall z \in U\ \exists \varepsilon > 0 : D(z, \varepsilon) \subseteq U$.

20. On dit que l'ensemble ouvert U est connexe par arcs si pour tout $x, y \in U$ il existe un chemin $\gamma : [0,1] \to U$ entièrement inclus dans U tel que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$. On peut prendre pour γ une ligne polygonale.

Theorem 1.1. *Soit $U \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert . Alors U est connexe par arcs $\Longleftrightarrow$ U ne s'écrit pas comme réunion disjointe de deux ouverts non vides.*

1. Les ouverts connexes par arcs sont donc exactement les ouverts connexes.

2. On dit que U est un domaine si U et un ouvert connexe.

Exemples

1. Si $0 \leq r < R \leq \infty$, alors les disques $D(z_0, R)$ et les couronnes
$$A(z_0, r, R) = \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$$
sont des domaines.

2. Les demi-plans $\{z \in \mathbb{C} : \text{Re } z > a\}$ et $\{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > b\}$ sont des domaines $(a, b \in \mathbb{R})$.

3. L'ensemble ouvert $D(0,1) \cup D(2,1)$ n'est pas un domaine.

1.1.B Limites

1. Une suite $(z_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ de nombres complexes est une application de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{C}$.

2. On dit que (z_n) converge vers z, notation: $z_n \to z$, si $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0$ tq $\forall n \geq n_0$: $|z_n - z| < \varepsilon$.

3. $z_n \to \infty$ si $\forall M > 0\ \exists n_0$ tq $\forall n \geq n_0 :\ |z_n| \geq M$.

Exemples
a) $i + n \to \infty$;
b) $(-n)^n \to \infty$;
c) $i + 3/n \to i$.
Attention à la situation différente lorsqu'on considère les limites de suites réelles dans $\mathbb{R}$

1. $U \subseteq \mathbb{C}$ ouvert, $f : U \to \mathbb{C},\ z \mapsto f(z),\ z_0 \in U$.

2. $\lim_{z \to z_0} f(z) = w$ si $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tq: $\forall z \in U, 0 < |z - z_0| < \delta \Longrightarrow |f(z) - w| < \varepsilon$.

3. f continue en z_0 si $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$, i.e $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tq: $\forall z \in U, |z - z_0| < \delta \Longrightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$.

4. on note aussi: $f(z) = f(z_0) + o(1),\ (z \to z_0)$.

   symboles de Landau:

5. Soient $f, g : D(z_0, R) \to \mathbb{C}, g(z) \neq 0\ \forall z \neq z_0$. $f = o(g),\ z \to z_0$, si $\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = 0$.
   $f = \mathcal{O}(g),\ z \to z_0$, si $\limsup_{z \to z_0} \frac{|f(z)|}{|g(z)|} < \infty$.

6. Donc $f = o(1),\ z \to z_0$ veut dire que $\lim_{z \to z_0} f(z) = 0$.

7. $f = \mathcal{O}(z - z_0) \Longrightarrow f = o(1)$ quand $z \to z_0$ car $|f(z)| = |(z - z_0)(\frac{f(z)}{z - z_0})| \leq |z - z_0| \cdot M \to 0$ si $z \to z_0$.

1.1.C Holomorphie

Definition 1.2. $U \subseteq \mathbb{C}$ ouvert, $z_0 \in U$. On dit que $f : U \to \mathbb{C}$ est $\mathbb{C}$-différentiable en z_0 si

$$L := \lim_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \text{ existe dans } \mathbb{C}.$$

On note L par $f'(z_0)$; c'est le dérivée de f en z_0.

On a que f est $\mathbb{C}$-différentiable en z_0

$$\iff \exists L \in \mathbb{C} \text{ tq } f(z) = f(z_0) + L(z-z_0) + \mathcal{O}(z-z_0),$$

car cette dernière équation n'est rien d'autre que $\frac{f(z)-f(z_0)-L(z-z_0)}{z-z_0} \to 0$ si $z \to z_0$.

Definition 1.3. Soit $U \subseteq \mathbb{C}$ ouvert et $z_0 \in U$.

1. On dit que f est holomorphe dans U, $f \in H(U)$, si f est $\mathbb{C}$-différentiable en chaque point de U.

2. On dit que f est holomorphe en z_0, si f est holomorphe dans un voisinage de z_0.

Proposition 1.4. *Soit $f : U \to \mathbb{C}, z_0 \in U$. Alors f $\mathbb{C}$-différentiable en $z_0 \implies f$ continue en z_0.*

Proof. $f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + \mathcal{O}(z-z_0) \implies |f(z) - f(z_0)| \leq \varepsilon$ quand $|z - z_0|$ est petit $\implies \lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$. □

Exemples

1. La fonction identité, $f(z) = z$ est holomorphe dans $\mathbb{C}$, car $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = 1 \to 1$ si $z \to z_0$. Donc $f'(z) \equiv 1 \; \forall z \in \mathbb{C}$.

2. Les fonctions constantes $f(z) \equiv c$ sont holomorphes dans $\mathbb{C}$ et $f'(z) \equiv 0$.

3. $f(z) = \overline{z}$ n'est pas $\mathbb{C}$-différentiable en $z_0 \in \mathbb{C}$.

Car:
$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \frac{\overline{z}-\overline{z}_0}{z-z_0} = \frac{\overline{z-z_0}}{z-z_0} =: \frac{\overline{\omega}}{\omega} =: \frac{Re^{-it}}{Re^{it}} = e^{-2it}$.
Notons que $\omega \to 0 \iff z \to z_0$. Comme e^{-2it} dépend de l'argument de ω, et pas de $|\omega|$, $\lim_{\omega \to 0} \frac{\overline{\omega}}{\omega}$ n'existe pas.

Par exemple si on se rapproche de 0 sur la demi-droite $z = r$, $r \to 0^+$, le résultat est 1; si on se rapproche de 0 sur la demi-droite $z = re^{i\pi/4}$, $r \to 0^+$, alors le résultat est $e^{-i\pi/2} = -i \neq 1$.

Lemma 1.5. *Soit $f : U \to \mathbb{C}$ continue en $z_0 \in U$. Supposons que $f(z_0) \neq 0$. Alors $\exists \varepsilon > 0$ et $\delta > 0$ tq $\forall z \in D(z_0, \delta) : \; |f(z)| \geq \varepsilon$.*

Proof. Posons $\varepsilon = \frac{|f(z_0)|}{2}$. Par continuité, $\exists\delta$ tq

$$\forall z \in D(z_0, \delta) : \ |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon.$$

Donc

$$|f(z)| = |\big(f(z) - f(z_0)\big) + f(z_0)| \geq |f(z_0)| - |f(z) - f(z_0)| \geq$$

$$\geq |f(z_0)| - \frac{|f(z_0)|}{2} = \frac{|f(z_0)|}{2}.$$

□

Règles

Soient $U \subseteq \mathbb{C}$ ouvert, $f, g \in H(U)$, alors
a) $f + g \in H(U)$ et $(f+g)' = f' + g'$,
b) $f \cdot g \in H(U)$ et $(fg)' = f'g + fg'$,
c) Si $Z(g) = \{z \in U : g(z) = 0\}$ est l'ensemble des racines/zéros de g, alors $\frac{f}{g} \in H(U \setminus Z(g))$ et $(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.
d) $f : U \to V$ holomorphe, $g : W \to \mathbb{C}$ holomorphe et $V \subseteq W$, alors $g \circ f : U \to \mathbb{C}$ holomorphe et $(g \circ f)'(z) = g'(f(z)) \cdot f'(z)$, $z \in U$.

Proof. b)

$$\frac{(fg)(z) - (fg)(z_0)}{z - z_0} = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} g(z) + \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} f(z_0)$$

$$\longrightarrow_{z \to z_0} f'(z_0)g(z_0) + g'(z_0)f(z_0).$$

c) on regarde $1/g$: $g(z_0) \neq 0 \overset{\text{Lemme}}{\Longrightarrow} g(z) \neq 0 \ \forall z \in D(z_0, \delta)$.

$$\frac{(1/g)(z) - (1/g)(z_0)}{z - z_0} = \frac{g(z_0) - g(z)}{g(z)g(z_0)(z - z_0)} =$$

$$-\frac{1}{g(z)g(z_0)} \cdot \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} \to -\frac{1}{g^2(z_0)} g'(z_0).$$

□

Exemples

1. $f_n(z) = z^n \in H(\mathbb{C})$ et $f_n'(z) = nz^{n-1}$ car:
   $f_1'(z) = 1$,
   par récurrence: $n \to n+1$:
   $f_{n+1}(z) = z \cdot z^n \Longrightarrow f_{n+1}'(z) = 1 \cdot z^n + z \cdot (z^n)' = z^n + z \cdot nz^{n-1} = (n+1)z^n$.
2. Soit $p \in \mathbb{C}[z]$ un polynôme de degré N, i.e. $p(z) = \sum_{n=0}^{n} a_n z^n$, où $a_n \in \mathbb{C}$.
   Alors $p \in H(\mathbb{C})$ et $p'(z) = \sum_{n=1}^{N} na_n z^{n-1}$.

1.1.D Propriétés de la dérivée

Lemma 1.6. *$\Omega \subseteq \mathbb{C}$ domaine, $f : \Omega \to \mathbb{C}$, $z_0 \in \Omega$.*
Alors f est $\mathbb{C}$-différentiable en $z_0 \iff \exists g : \Omega \to \mathbb{C}$ continue en z_0 tq

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)g(z).$$

Dans ce cas $f'(z_0) = g(z_0)$.

Comparer avec $f(z) = f(z_0) + L(z - z_0) + \mathcal{O}(z - z_0)$.

Si $h : [0, 1] \to \mathbb{C}$ est différentiable en t_0, on a bien sûr une assertion analogue.

Proof. "$\Longleftarrow$:" $f(z) = f(z_0) + (z - z_0)g(z) \Longrightarrow$

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} g(z) \overset{g \text{ continue}}{=} g(z_0).$$

"$\Longrightarrow$" Supposons que $f'(z_0)$ existe. Posons

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} & \text{si } z \neq z_0. \\ f'(z_0) & \text{si } z = z_0. \end{cases}$$

$\Longrightarrow g$ continue en z_0 car: $\lim_{z \to z_0} g(z) = f'(z_0) = g(z_0)$.
En plus, $f(z) = f(z_0) + (z - z_0)g(z)$. □

Proposition 1.7. *Soit $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ domaine, $h = u + iv : [0, 1] \to \Omega$ un chemin $C^1([0, 1])$, $f \in H(\Omega)$. Alors $g = f \circ h : [0, 1] \to \mathbb{C}$ est un chemin $C^1([0, 1])$ et $g'(t) = (f \circ h)'(t) = f'(h(t)) \cdot h'(t)$.*

Proof. Lemme $\Longrightarrow$ $f(z) = f(z_0) + (z - z_0)F(z)$, F continue en $z_0 \in \Omega$ et $h(t) = h(t_0) + (t - t_0)H(t)$, H continue en $t_0 \in [0, 1]$. En remplaçant $z \to h(t)$, $z_0 \to h(t_0)$, on obtient:
$f(h(t)) = f(h(t_0)) + (h(t) - h(t_0))F(h(t)) = f(h(t_0)) + (t - t_0)H(t)F(h(t)) \Longrightarrow f \circ h$ différentiable en t_0 car $t \mapsto H(t)\, F(h(t))$ continue en t_0. En plus
$(f \circ h)'(t_0) = \lim_{t \to t_0} H(t)\, F(h(t)) = H(t_0)F(h(t_0)) = h'(t_0)f'(h(t_0))$. □

Theorem 1.8. $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ *domaine, $f \in H(\Omega)$. Supposons $f' \equiv 0$. Alors $f \equiv$ const.*

Proof. (i) Fixons $z_0 \in \Omega$. Ω ouvert $\Longrightarrow \exists D = D(z_0, R) \subseteq \Omega$. Soit $z \in D$ et $S = \{h(t) := (1 - t)z_0 + tz,\ 0 \leq t \leq 1\}$ le segment joignant z_0 et z; h est un chemin $C^1([0, 1])$ avec $h(0) = z_0$, $h(1) = z$.
Considérons la fonction $f \circ h : [0, 1] \to \mathbb{C}$. Elle est bien définie, $f \circ h \in C^1([0, 1])$, et $(f \circ h)'(t) = f'(h(t))\, h'(t) = 0\ \forall t \in [0, 1]$.
$(f \circ h)(t) = u(t) + iv(t)$, $(f \circ h)'(t) = u'(t) + iv'(t) \equiv 0$ dans l'intervalle $[0, 1] \Longrightarrow u' \equiv 0$ et $v' \equiv 0 \Longrightarrow u \equiv c$ (constante) et $v \equiv \tilde{c}$ (constante), $c, \tilde{c} \in \mathbb{R}$. Donc $f \circ h \equiv c + i\tilde{c}$ sur $[0, 1]$. Ainsi $f(z_0) = f(h(0)) = f(h(1)) = f(z)$. Concl.: $f(z) = f(z_0)\ \forall z \in D(z_0, R)$.
(ii) $A := \{z \in \Omega : f(z) = f(z_0)\}$. Montrons que $A = \Omega$!

1. A est un fermé dans Ω car: $a_n \in A, a_n \to z \in \Omega \Longrightarrow f(z_0) = f(a_n) \to f(z)$ $\Longrightarrow f(z) = f(z_0) \Longrightarrow z \in A$.

2. A ouvert dans Ω car: $a \in A \subseteq \Omega \underset{(i)}{\Longrightarrow} \exists \varepsilon > 0 : D(a, \varepsilon) \subseteq \Omega$

   et $f \equiv f(a) = f(z_0)$ dans $D(a, \varepsilon) \Longrightarrow D(a, \varepsilon) \subseteq A$.

Donc: $\Omega = A \cup (\Omega \setminus A)$ est une décomposition en deux ensembles ouverts et fermés dans Ω. Ω connexe, $A \neq \emptyset$, $\Longrightarrow \Omega \setminus A = \emptyset \Longrightarrow A = \Omega$. $\square$

1.2 Equations de Cauchy-Riemann

Rappel
Soit $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert et $f : \Omega \to \mathbb{C}$.
Alors f est $\mathbb{C}$-différentiable en $z_0 \in \Omega$ s'il existe une application $\mathbb{C}$-linéaire Ψ telle que

$$f(z) = f(z_0) + \Psi(z - z_0) + \mathcal{O}(z - z_0) \quad z \to z_0.$$

Notons que les applications $\mathbb{C}$-linéaires ont la forme $\Psi(z) = az$, pour $a = \Psi(1) \in \mathbb{C}$.

Définition Soit $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert et $f : \Omega \to \mathbb{C}$.
Regardons $\mathbb{C}$ comme espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$.
On dit que f est $\mathbb{R}$-différentiable en $z_0 \in \Omega$ s'il existe une application $\mathbb{R}$-linéaire $\Phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ telle que

$$f(z) = f(z_0) + \Phi(z - z_0) + \mathcal{O}(z - z_0)\ , \quad z \to z_0.$$

Ecrivons $z = x + iy$, où x est la partie réelle et y la partie imaginaire de z. Alors la $\mathbb{R}$-différentiablilité est équivalent à l'existence de deux nombres complexes $a = \Phi(1)$ et $b = \Phi(i)$ tels que

$$f(z) = f(z_0) + a(x - x_0) + b(y - y_0) + \mathcal{O}(z - z_0)\ , \quad z \to z_0. \tag{2}$$

On écrit $f_x(z_0) = a$ et $f_y(z_0) = b$. Ce sont les dérivées partielles de f en z_0.
Si $f = u + iv$, où u est la partie réelle de f et v la partie imaginaire de f, on voit que f est $\mathbb{R}$-différentiable $\Longleftrightarrow$ les fonctions à deux variables réelles $U(x, y) := u(x + iy)$ et $V(x, y) := v(x + iy)$ sont différentiables au sens habituel.
Par abus de notation, on écrira u et v au lieu de U et V. En plus on aura $f_x = u_x + iv_x$ et $f_y = u_y + iv_y$.

Theorem 1.9. *Soit $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert et $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Alors $f = u+iv$ est $\mathbb{C}$-différentiable en $z_0 \in \Omega \Longleftrightarrow$ u et v sont $\mathbb{R}$- différentiables en z_0 et les équations de Cauchy-Riemann sont satisfaites:*

$$u_x = v_y,\ u_y = -v_x \text{ en } z_0 \tag{CR}$$

Démonstration Soit $h = h_1 + ih_2 \in \mathbb{C}$, $f'(z_0) = \alpha + i\beta$.
f est $\mathbb{C}$-différentiable en $z_0 \Longleftrightarrow$ $f(z_0 + h) = f(z_0) + f'(z_0)h + \mathcal{O}(h)$

$$\Longleftrightarrow u(x_0 + h_1, y_0 + h_2) = u(x_0, y_0) + \alpha h_1 - \beta h_2 + \mathrm{Re}\ \mathcal{O}(h)$$

et

$$v(x_0 + h_1, y_0 + h_2) = v(x_0, y_0) + \beta h_1 + \alpha h_2 + \mathrm{Im}\ \mathcal{O}(h) \tag{3}$$

$\Longleftrightarrow$ u et v différentiables en z_0 avec $u_x = \alpha = v_y$ et $u_y = -\beta = -v_x$ en z_0.
Remarques • Soit $f = u + iv$ $\mathbb{C}$-différentiable en z_0. Alors $f' = f_x = u_x + iv_x$ en z_0. En plus,

$$f(z_0+h) = u(x_0+h_1, y_0+h_2) + iv(x_0+h_1, y_0+h_2) =$$
$$\Big(u(x_0,y_0)+iv(x_0,y_0)\Big) + (\alpha+i\beta)h_1 + (i\alpha-\beta)h_2 + \mathcal{O}(h),$$

donc, d'après (2), f est $\mathbb{R}$ différentiable et on a
$f_x = \alpha + i\beta = u_x + iv_x$ ainsi que $f_y = i\alpha - \beta = if_x$.

Lemma 1.10. *Supposons que $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$. Alors*
(1) $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$ *est holomorphe dans* $\mathbb{C}$.
(2) *Si en plus* $f(\overline{z})$ *est holomorphe dans* $\mathbb{C}$, *alors* f *est constante.*

Démonstration
(1) $\quad \dfrac{g(z+h)-g(z)}{h} = \dfrac{\overline{f(\overline{z}+\overline{h})} - \overline{f(\overline{z})}}{h} = \overline{\left(\dfrac{f(\overline{z}+\overline{h}) - f(\overline{z})}{\overline{h}}\right)} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} \overline{f'(\overline{z})};$
d'où $g'(z) = \overline{f'(\overline{z})}$.

(2) $\quad f(z) \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ et $f(\overline{z}) \in \mathcal{H}(\mathbb{C}) \overset{(1)}{\Longrightarrow} \overline{f(z)} \in \mathcal{H}(\mathbb{C}) \Longrightarrow \operatorname{Re} f = \frac{f+\overline{f}}{2} \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ et $\operatorname{Im} f = \frac{f-\overline{f}}{2i} \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.
En calculant les dérivées partielles, on déduit des équations de Cauchy-Riemann que $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont constantes (voir TD).

1.3 Les dérivées de Wirtinger

Soit $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert et $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Supposons que f soit $\mathbb{R}$-différentiable en $z_0 \in \Omega$. Alors, pour $x - x_0 = \frac{1}{2}\big((z-z_0)+(\overline{z}-\overline{z_0})\big)$ et $y - y_0 = \frac{1}{2i}\big((z-z_0)-(\overline{z}-\overline{z_0})\big)$, on obtient
$f(z) = f(z_0) + f_x(z_0)(x-x_0) + f_y(z_0)(y-y_0) + \mathcal{O}(z-z_0) =$
$= f(z_0) + \frac{1}{2}\big(f_x(z_0) - if_y(z_0)\big)(z-z_0) + \frac{1}{2}\big(f_x(z_0)+if_y(z_0)\big)(\overline{z}-\overline{z_0}) + \mathcal{O}(z-z_0).$

Cette représentation est unique. Les dérivées de Wirtinger de f en z_0 sont alors les nombres complexes
$f_z(z_0) := \frac{1}{2}\big(f_x(z_0) - if_y(z_0)\big)$ et
$f_{\overline{z}}(z_0) := \frac{1}{2}\big(f_x(z_0) + if_y(z_0)\big)$.
On écrit encore $\partial f = \frac{\partial f}{\partial z} = f_z$ et $\overline{\partial} = \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = f_{\overline{z}}$.

Remarque. Les équations de Cauchy-Riemann prennent donc la forme $f_{\overline{z}} = 0$.
En plus, f $\mathbb{C}$-différentiable en z_0 implique $f' = f_z = f_x$.

Formules (1) Les opérateurs ∂ et $\overline{\partial}$ sont des opérateurs linéaires.
(2) $(fg)_z = f_z g + f g_z$, $(fg)_{\overline{z}} = f_{\overline{z}} g + f g_{\overline{z}}$,
(3) $\left(\dfrac{f}{g}\right)_z = \dfrac{f_z g - f g_z}{g^2}$, $\left(\dfrac{f}{g}\right)_{\overline{z}} = \dfrac{f_{\overline{z}} g - f g_{\overline{z}}}{g^2}$,
(4) $(g\circ f)_z = (g_w \circ f) f_z + (g_{\overline{w}} \circ f)\overline{f}_z$, $(g\circ f)_{\overline{z}} = (g_w\circ f) f_{\overline{z}} + (g_{\overline{w}}\circ f)\overline{f}_{\overline{z}}$,
(5) $\overline{f_z} = \overline{f}_{\overline{z}}$.
(6) $\frac{\partial z}{\partial z} = 1$, $\frac{\partial \overline{z}}{\partial z} = 0$ $\frac{\partial z}{\partial \overline{z}} = 0$, $\frac{\partial \overline{z}}{\partial \overline{z}} = 1$.

(7) Si f est 2-fois continûment $\mathbb{R}$-différentiable, alors $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \overline{z}} = f_{\overline{z}z} = \frac{1}{4}\triangle f = \frac{1}{4}(f_{xx} + f_{yy})$.

Exemples. Soit $f(z) = az^n\overline{z}^m$. Alors $\frac{\partial f}{\partial z} = anz^{n-1}\overline{z}^m$ et $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = amz^n\overline{z}^{m-1}$.

Règle : si on a une expression en z et $\overline{z}$, on calcule la dérivée de Wirtinger f_z en dérivant f par rapport à z et en regardant $\overline{z}$ comme une constante.
De même pour $f_{\overline{z}}$. On a ainsi les mêmes règles de calcul que pour les dérivées partielles de fonctions de deux variables (indépendantes l'une de l'autre).

1.4 Transformations de Möbius

Définition Une fonction $f : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ est dite holomorphe en ∞ si la limite de $f(z)$ si $z \to \infty$ existe dans $\mathbb{C}$ et si f est holomorphe dans l'extérieur d'un disque $\Big(\Longleftrightarrow f\left(\frac{1}{z}\right)$ admet une singularité artificielle en 0 $\Big)$

Définition Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$
une matrice dans $\mathbb{C}$ telle que det $A = ad - bc \neq 0$.
L'application $T : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}, z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ s'appelle transformation de Möbius (ou transformation homographique).
On note $\mathcal{M}$ l'ensemble de toutes les transformations de Möbius.

Propriétés

- 1) λA donne lieu à la même transformation que A, si $\lambda \neq 0$
- 2) T est holomorphe dans $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{\frac{-d}{c}\}$
- 3) T est continue sur $\widehat{\mathbb{C}}$.
- 4) T est une bijection sur $\widehat{\mathbb{C}}$.
- 5) $T\left(\frac{-d}{c}\right) = \infty$, $T(\infty) = \frac{a}{c}$ et $T^{-1}(z) = \dfrac{dz - b}{-cz + a}$
- 6) si $S, T \in \mathcal{M}$, $S \sim \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $T \sim \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ alors :
$$S \circ T \in \mathcal{M} \quad \text{et} \quad S \circ T \sim \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix};$$
donc $(\mathcal{M}, \circ)$ est un groupe.

Ce groupe est engendré par les transformations suivantes :

- -1 *inversion* : $I(z) = \frac{1}{z}$
- -2 *translation* : $T(z) = z + b$, $b \in \mathbb{C}$

- -3 *homothétie complexe* : $H(z) = \lambda z$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

En effet $T_1(z) = az + b = a\left(z + \frac{b}{a}\right) = H \circ T$, $T_2(z) = \frac{b}{cz+d} = \frac{b}{c}\frac{1}{z+\frac{d}{c}} = H \circ I \circ T$, $T_3(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} + \frac{\frac{a}{c}\left(\frac{b}{a} - \frac{d}{c}\right)}{z+\frac{d}{c}} = = T \circ H \circ I \circ \tilde{T}$

Propriétés géométriques Soit $\mathcal{C}$ la réunion de tous les cercles et droites dans $\widehat{\mathbb{C}}$. $\mathcal{C}$ est décrit par les équations suivantes :

· $|z|^2 + \overline{\alpha}\, z + \alpha\, \overline{z} + \beta = 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $\beta < |\alpha|^2$ cercles
· $\overline{\alpha}\, z + \alpha\, \overline{z} + \beta = 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ droites

Proposition 1.11. : *$\mathcal{C}$-invariance des transformations de Möbius*

$$T \in \mathcal{M}\, , C \in \mathcal{C} \;\Rightarrow\; T\,(C) \in \mathcal{C}$$

Démonstration
Clair si T est une translation ou une homothétie complexe. Soit T l'inversion $T(z) = \frac{1}{z}$. Posons $V = \frac{1}{z}$ et soit $\varepsilon = 0, 1$. Considérons le cercle généralisé

$$\varepsilon\, |z|^2 + \overline{\alpha}\, z + \alpha\, \overline{z} + \beta = 0\ ,\ \beta < |\alpha|^2.$$

Alors $\varepsilon + \overline{\alpha}\, \overline{V} + \alpha\, V + \beta\, |V|^2 = 0.$

- -si $\beta = 0$: on a une droite
- -si $\beta \neq 0$: on a un cercle d'équation $|V|^2 + \frac{\alpha}{\beta} V + \frac{\overline{\alpha}}{\beta}\overline{V} + \frac{\varepsilon}{\beta} = 0$. Notons que $\frac{1}{\beta} < \frac{|\alpha|^2}{\beta^2} \Longleftrightarrow \beta < |\alpha|^2$

Proposition 1.12. : *Invariance de l'angle et de l'orientation*
(1) Soit T une transformation de Möbius. Supposons que les cercles généralisés $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ se coupent en un point a et que les tangentes à $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ au point a forment un angle de α degré. Alors les images $T\mathcal{C}_1$ et $T\mathcal{C}_2$ sont des cercles généralisés qui se coupent en Ta et dont les tangentes en ce point forment le même angle α (voir fig.)
(2) Soit $\mathcal{C}$ un cercle généralisé orienté. Soit $\mathcal{O}_g$ la composante connexe de $\mathbb{C} \setminus \mathcal{C}$ qui se trouve à gauche de $\mathcal{C}$. Alors $T(\mathcal{O}_g)$ est la composante connexe de $\mathbb{C} \setminus T(\mathcal{C})$ qui se trouve à gauche de $T(\mathcal{C})$

Définition Birapport
Soient $(z_1\, , z_2\, , z_3) \in \mathbb{C}^3$, $z_j \neq z_k$ pour $j \neq k$. Alors la transformation
$T(z) = \frac{z-z_1}{z-z_3}\frac{z_2-z_3}{z_2-z_1}$
satisfait $T\,(z_1) = 0$, $T(z_2) = 1$, $T\,(z_3) = \infty$

- - si $z_1 = \infty$: $T\,(z) = \frac{z_2-z_3}{z-z_3}$ (c'est la limite de $(*)$ si $z_1 \to \infty$)
- - si $z_2 = \infty$: $T\,(z) = \frac{z-z_1}{z-z_3}$ (c'est la limite de $(*)$ si $z_2 \to \infty$)

- - si $z_3 = \infty$: $T(z) = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$ (c'est la limite de $(*)$ si $z_3 \to \infty$)

Elle s'appelle le birapport des points z, z_1, z_2, z_3 et est notée par:

$$BR(z, z_1, z_2, z_3).$$

Theorem 1.13. *Soient* $(z_1\,,\,z_2\,,\,z_3)$ *et* $(v_1\,,\,v_2\,,\,v_3)$ *deux triplets de points de* $\widehat{\mathbb{C}}$. *Supposons que* $z_j \neq z_k$ *et* $v_j \neq v_k$ *pour* $j \neq k$. *Alors il existe une et une seule transformation de Möbius* $T \in \mathcal{M}$ *telle que :* $T(z_j) = v_j \qquad (j = 1, 2, 3)$.

Démonstration
Posons

$$T_1(z) = BR(z, z_1, z_2, z_3)\ ,\ T_2(v) = BR(v, v_1, v_2, v_3).$$

Alors $T = T_2^{-1} \circ T_1 \in \mathcal{M}$ et $T(z_j) = v_j$, $(j = 1, 2, 3)$.
- *Unicité* : Soit S une autre transformation de Möbius avec $S(z_j) = v_j$. D'où

$$S^{-1} \circ T(z_j) = z_j \quad (z = 1, 2, 3)\,.$$

Mais une transformation de Möbius n'admet qu'un ou deux points fixes dans $\widehat{\mathbb{C}}$, si elle est différente de l'identité.
En effet, si $a \neq d$ dans le cas où $b = c = 0$, on a:

$$\frac{az+b}{cz+d} = z \Longleftrightarrow cz^2 + z\,(d-a) - b = 0$$

admet au plus deux solutions dans $\mathbb{C}$.
Finalement $S^{-1} \circ T = id \Rightarrow S = T$.

Corollary 1.14. *(1) Soit* $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. *Alors* $f(z) = \overline{f(\overline{z})}$.
(2) Soit $T \in \mathcal{M}$, $T(\hat{\mathbb{R}}) = \hat{\mathbb{R}}$. *Alors* $T(z) = \overline{T(\overline{z})}$.

Démonstration
(1) 1.10 $\Longrightarrow$ $g(z) = \overline{f(\overline{z})} \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$. Si $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \overline{f(\overline{x})} = \overline{f(x)} = f(x) \Rightarrow g - f = 0$ dans $\mathbb{R} \underset{2.11}{\Rightarrow} g - f = 0$ sur $\mathbb{C}$.
De même pour (2).

Theorem 1.15. *:* *Invariance du birapport*
Soient $z_1\,,\,z_2\,,\,z_3 \in \widehat{\mathbb{C}}$ *des points différents,* $z \in \widehat{\mathbb{C}}$, *et* T *une transformation de Möbius. Alors* $BR(z, z_1, z_2, z_3) = BR\,(T(z), T(z_1), T(z_2), T(z_3))$.

Démonstration
Soit $S(z) = BR(T(z), T(z_1), T(z_2), T(z_3)) \Rightarrow S \in \mathcal{M}$ et $S(z_1) = 0\,,\, S(z_2) = 1$ et $S(z_3) = \infty$. D'où $S(z) = BR(z, z_1, z_2, z_3)$ par le théorème d'unicité 1.13.

- Points symétriques par rapport à des cercles généralisés

- Soit $a + b\,t \,:\, t \in \mathbb{R}$ l'équation d'une droite dans $\mathbb{C}$ $(a, b \in \mathbb{C},\ b \neq 0)$. Le point symétrique de $z \in \mathbb{C}$ par rapport à cette droite est le point $z^* = a + \dfrac{b}{\overline{b}}(\overline{z} - \overline{a})$.
- Soit $\partial D(z_0, R)$ le cercle de centre z_0 et de rayon R. Alors le point symétrique de $z \in \mathbb{C}$ par rapport à ce cercle est le point $z^* = z_0 + \dfrac{R^2}{\overline{z} - \overline{z}_0}$.

Proposition 1.16. *Soit z^* le point symétrique de z (par rapport à une droite ou un cercle $\mathcal{C}$). Alors $\forall\, T \in \mathcal{M}$ avec $T(\mathcal{C}) = \hat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ on a: $z^* = T^{-1}(\overline{Tz})$.*

Démonstration

- $T^{-1}\,(\overline{Tz})$ ne dépend pas de T choisi:

Soit T, $S \in \mathcal{M}$ et $T(\mathcal{C}) = S(\mathcal{C}) = \hat{\mathbb{R}}$. Posons $M = T \circ S^{-1}$. Alors $M(\hat{\mathbb{R}}) = \hat{\mathbb{R}}$. $\overset{1.14}{\Longrightarrow} M(\overline{Sz}) = \overline{M(Sz)}$. Ainsi $(T \circ S^{-1})(\overline{Sz}) = \overline{(T \circ S^{-1})(Sz)} = \overline{Tz}$. En composant avec T^{-1} on obtient:

$$S^{-1}(\overline{Sz}) = T^{-1}(T \circ S^{-1})(\overline{Sz}) = T^{-1}(\overline{Tz}).$$

- Si $\mathcal{C}$ est la droite $a + b\,t, t \in \mathbb{R}$, on choisit

$T(z) = \overline{b}\,(z - a) \Rightarrow T\,(\mathcal{C}) = \hat{\mathbb{R}}$

$\Rightarrow\ T(z^*) = \overline{b}\,(z^* - a) = \overline{b}\,\left(a + \frac{b}{\overline{b}}\,(\overline{z} - \overline{a}) - a\right) =$

$= b\,(\overline{z} - \overline{a}) = \overline{T(z)}$.

D'où

$$z^* = T^{-1}\,(\overline{Tz}).$$

- Si $\mathcal{C}$ est le cercle $\partial D(z_0, R)$, on choisit $T \in \mathcal{M}$ tel que $T\,(\mathcal{C}) = \hat{\mathbb{R}}$. Un exemple est fournit par $T(z) = BR(z, z_1, z_2, z_3)$, où z_1 , z_2 , $z_3 \in \mathcal{C}$ sont des points différents. Alors

$$BR(T^{-1}(\overline{Tz}), z_1, z_2, z_3) \underset{1.15}{=} BR(\overline{Tz}, Tz_1, Tz_2, Tz_3) =$$

$$= BR(\overline{Tz}, 0, 1, \infty) = \frac{\overline{T(z)} - 0}{1 - 0} = \overline{T(z)}.$$

D'autre part, en utilisant 1.15 pour $\xi \mapsto \xi - \overline{z_0}$, on obtient

$$\overline{T(z)} = \overline{BR(z\,,\, z_1\,,\, z_2\,,\, z_3)} \underset{\text{déf.}}{=} BR\,(\overline{z}\,,\, \overline{z}_1\,,\, \overline{z}_2\,,\, \overline{z}_3) =$$

$$\underset{1.15}{=}\ BR\,(\overline{z - z_0}\,,\, \overline{z_1 - z_0}\,,\, \overline{z_2 - z_0}\,,\, \overline{z_3 - z_0})\,.$$

Notons que $z_j \in \mathcal{C}$. Ainsi $\frac{R^2}{\overline{z_j} - \overline{z_0}} = z_j - z_0$. Donc en utilisant 1.15 pour $\xi \mapsto \frac{R^2}{\xi}$, on obtient

$T(z) = BR\left(\frac{R^2}{\overline{z} - \overline{z}_0}, z_1 - z_0, z_2 - z_0, z_3 - z_0\right) = BR\,(z^* - z_0, z_1 - z_0, z_2 - z_0, z_3 - z_0) = BR\,(z^*, z_1, z_2, z_3)$

D'où $\quad BR\,(z^*, z_1, z_2, z_3) = BR\,(T^{-1}(\overline{Tz}), z_1, z_2, z_3) \underset{bij.}{\Longrightarrow} z^* = T^{-1}\,(\overline{Tz})$.

Theorem 1.17 (Invariance des points symétriques)**.** *Soit $\mathcal{C}$ un cercle généralisé et z_1, z_2, z_3 trois points différents sur $\mathcal{C}$. Alors*

- *1) $BR(z^*, z_1, z_2, z_3) = \overline{BR(z, z_1, z_2, z_3)}$*
- *2) Si $T \in \mathcal{M}$, alors $T(z^*) = (Tz)^*$, où z^* est le point symétrique de z par rapport à $\mathcal{C}$ et $(Tz)^*$ est le point symétrique de Tz par rapport à $T\mathcal{C}$.*

Démonstration

- 1) Voir la démonstration précédente.
- 2) Utilisons 1.16: Soit $S \in \mathcal{M}$ tel que $S(\mathcal{C}) = \hat{\mathbb{R}}$. Alors $(S \circ T^{-1})(T\mathcal{C}) = \hat{\mathbb{R}}$.

Donc:

$$T(z^*) \underset{1.16}{=} T(S^{-1})(\overline{S\,z}) = (T \circ S^{-1})\,(\overline{Sz}) = (S \circ T^{-1})^{-1}\,(\overline{Sz}) =$$
$$= (S \circ T^{-1})^{-1}\left(\overline{(S \circ T^{-1})(T\,z)}\right) \underset{1.16}{=} (T(z))^*.$$

Proposition 1.18. *Soit $\mathbb{D}$ le disque unité et $H = \{z \in \mathbb{C} \ : \ \operatorname{Im} z > 0\}$.*
(1) Les transformations de Möbius T telles que $T(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$ sont de la forme

$$T(z) = e^{i\theta}\tfrac{a-z}{1-\bar{a}z}, \text{ où } \quad \theta \in \mathbb{R} \text{ et } a \in \mathbb{D}.$$

(2) Les transformations de Möbius T de H sur H sont de la forme

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \text{ où } a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ et } ad - bc > 0. \qquad (*)$$

Démonstration (1) Soit $T \in \mathcal{M}$ telle que $T(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$. Notons que ceci implique que $T(\partial\mathbb{D}) = \partial\mathbb{D}$. Soit $a = T^{-1}(0)$. Alors $a \in \mathbb{D}$. Le point symétrique de a par rapport au cercle $\{|z| = 1\}$ est le point $a^* = \dfrac{1}{\bar{a}}$.
Le théorème 1.17 nous dit alors que $T(a^*) = 0^* = \infty$. Donc T a la forme $C\frac{a-z}{a^*-z} = C'\frac{a-z}{1-\bar{a}z}$. Soit $S_a(z) = \dfrac{a-z}{1-\bar{a}z}$.
Parce que $|S_a\,(z)| < 1 \iff |z| < 1 = 1 \iff |z| = 1 > 1 \iff |z| > 1$,
on obtient que $T(z) = e^{i\theta}S_a(z)$ est nécessaire et suffisante pour que $T(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$.

(2) Soit $T \in \mathcal{M}$ telle que $T(H) = H$. Ceci implique que $T(\hat{\mathbb{R}}) = \hat{\mathbb{R}}$. Posons $z_1 = T^{-1}(0)\,,\ z_2 = T^{-1}(1)\,,\ z_3 = T^{-1}(\infty)$. Notons que $z_j \in \hat{\mathbb{R}}$. Alors
$T(z) = BR(z, z_1, z_2, z_3) = \frac{z-z_1}{z-z_3}\,\frac{z_2-z_3}{z_2-z_1} = \frac{az+b}{cz+d} \qquad a, b, c, d \in \mathbb{R}$
$T(i) = \frac{ai+b}{ci+d}$, $\operatorname{Im} T(i) = \frac{ad-bc}{|ci+d|^2} > 0$.
Réciproquement, si T satisfait $(*)$, alors, d'après 1.11, $T(\hat{\mathbb{R}}) = \hat{\mathbb{R}}$. Comme $\operatorname{Im} T(i) > 0$, on en déduit que $T(H) = H$.

Chapter 2

Séries entières

Soit $S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ une série dans $\mathbb{C}$ et $S_n = \sum_{j=0}^{n} a_j$ ses sommes partielles. On dit que S converge si $\lim S_n$ existe. S est dite absolument convergente, si $\sum_n |a_n|$ converge.

Theorem 2.1 (Critère de Cauchy)**.** *$a_n \in \mathbb{C}$; $\sum a_n$ converge $\Longleftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0$ tq $\forall m \geq n \geq n_0 : |\sum_{j=n}^{m} a_j| < \varepsilon$.*

Theorem 2.2. *La convergence absolue entraine la convergence d'une série.*

Proof. Utiliser $|\sum_{j=n}^{m} a_j| \leq \sum_{j=n}^{m} |a_j|$. □

Definition 2.3. Une série entière (série de Mac Laurin) est une série de la forme :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \, , \; a_n \in \mathbb{C} \, , \; z_0 \, , \; z \in \mathbb{C}.$$

Theorem 2.4 (Théorème de Cauchy-Hadamard)**.** *Soit $R \in [0, \infty]$ défini par :*

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sup\left\{ \sqrt[k]{|a_k|} \; : \; k \geq n \right\}}.$$

Alors la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \, (z - z_0)^n$ converge uniformément et absolument dans chaque partie compacte du disque $D(z_0, R)$ si $R > 0$.
En plus, la série diverge si $|z - z_0| > R$. On dit que R est le rayon de convergence et que $D(z_0, R)$ est le disque de convergence.

Proof. Posons $z_0 = 0$ Soit $|z| > R \Longrightarrow \frac{1}{|z|} < \frac{1}{R} \Rightarrow \forall N \quad \exists n \geq N$ tq $\frac{1}{|z|} < \sqrt[n]{|a_n|}$
$\Rightarrow \; 1 < |z^n a_n| \Longrightarrow z^n a_n \not\to 0 \Rightarrow$ la série $\Sigma \, a_n z^n$ diverge.
Soit $0 < r < R$ et $r < \rho < R$
$\Rightarrow \; \frac{1}{\rho} > \frac{1}{R} \Rightarrow \exists \, N \in \mathbb{N}$ tq $\sup\left\{ \sqrt[k]{|a_k|} \, , \, k \geq N \right\} < \frac{1}{\rho}$ donc $\forall \, z \in D(0, r)$ et $\forall \, n \geq N$:

$$|a_n z^n| \leq |a_n| \, r^n = |a_n| \left(\frac{r}{\rho}\right)^n \rho^n \leq \left(\frac{r}{\rho}\right)^n$$

$\Rightarrow \sum\limits_{n\geq N} |a_n z^n| \leq \sum\limits_{n\geq N} \left(\frac{r}{\rho}\right)^n = \left(\frac{r}{\rho}\right)^N \frac{1}{1-\frac{r}{\rho}} = c$ (majoration uniforme) □

Exemples

- $e^z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ converge $\quad \forall\, z \in \mathbb{C}$ $\left(\sqrt[n]{n!} \to +\infty\right)$
- $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} z^{2n+1} = \sin z$ converge pour $\forall\, z \in \mathbb{C}$,

  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} z^{2n} = \cos z$ converge pour $\forall\, z \in \mathbb{C}$,
- $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ converge pour $|z| < 1$.
- $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}\, z^n$ converge pour $|z| < 1$.

Proposition 2.5. *La série $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\,(z-z_0)^n$ de rayon de convergence R, $R > 0$, est une fonction holomorphe dans $D(z_0, R)$. La série obtenue en dérivant $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ terme par terme, c'est à dire $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\, a_n\,(z-z_0)^{n-1}$, est uniformément et absolument convergente dans $D(z_0, r)$ $\forall\; 0 < r < R$ et coincide avec $f'(z)$. De même on a $\forall z \in D(z_0, R)$:*

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n\, n(n-1)\cdots(n-k+1)(z-z_0)^{n-k} =$$

$$= \sum_{n=k}^{\infty} a_n \binom{n}{k} k!(z-z_0)^{n-k}.$$

En particulier: $\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} = a_k$

Proof. Posons $z_0 = 0$

$$\sqrt[n]{n|a_n|} = \underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\downarrow \atop 1}\; \sqrt[n]{|a_n|} \Rightarrow \limsup\; \sqrt[n]{n|a_n|} = \frac{1}{R} \Rightarrow \text{1ère assertion}$$

Montrons que f est holomorphe dans $D(0, R)$

$$S = \frac{f(z) - f(w)}{z - w} - \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, w^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{z^n - w^n}{z - w} - n\, w^{n-1}\right).$$

On a pour $n \geq 2$ d'après la formule binomiale:

$$\left|\frac{z^n - w^n}{z - w} - n\, w^{n-1}\right| = \left|\sum_{k=0}^{n-1} z^{n-k-1}\, w^k - n\, w^{n-1}\right|$$

$$= \left|\sum_{k=0}^{n-1} w^k \left(z^{n-k-1} - w^{n-k-1}\right)\right|$$

$$\underset{n\geq 2}{=} \left| \sum_{k=0}^{n-2} w^k \, (z-w) \sum_{j=0}^{n-k-2} z^{n-k-2-j} \, w^j \right|$$

$$= \left| (z-w) \sum_{m=0}^{n-2} \sum_{(j,k):j+k=m} z^{(n-2)-m} w^m \right|$$

$$= \left| (z-w) \sum_{m=0}^{n-2} (m+1) \, z^{n-m-2} \, w^m \right|$$

Soit $|z|\,,\,|w| < \rho < R$. Alors
$|S| = \left| \frac{f(z)-f(w)}{z-w} - \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, w^{n-1} \right| \leq |z-w| \, \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \, \rho^{n-2} \, \frac{n\,(n-1)}{2} = |z-w| \; H(\rho)$.
Si $z \to w$, alors $f'(w) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, w^{n-1}$. □

Proposition 2.6 (Théorème d'unicité)**.** • *(a) Si les séries*

$$f(z) = \sum_0^{\infty} a_n \, (z-z_0)^n$$

et

$$g(z) = \sum_0^{\infty} b_n \, (z-z_0)^n$$

coincident dans un voisinage de z_0 alors $a_n = b_n \, \forall \, n$.

- *(b) Si les séries $f(z)$ et $g(z)$ coincident pour une suite $(w_k)_{k\in\mathbb{C}}$ telle que $w_k \to z_0$, alors $a_n = b_n \quad \forall \, n$*

Proof. (a) Soit $0 < r < \min\,(R(f)\,,\,R(g))$.
On suppose que $f(z) = g(z) \quad \forall \, |z-z_0| < r$.
Ces séries sont holomorphes dans $D\,(z_0\,,\,r)$; donc on a $a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} = \frac{g^{(k)}(z_0)}{k!} = b_k \; \forall \, k$
(b) Soit $f(w_k) = g(w_k)\,,\, w_k \to z_0$
f, g continue en $z_0 \Longrightarrow a_0 = f(z_0) = \lim_{k\to+\infty} f(w_k) = \lim_{k\to+\infty} g\,(w_k) = g\,(z_0) = b_0$.
Par récurrence: $a_0 = b_0\,,\, a_1 = b_1, \cdots, a_k = b_k, \quad k \to k+1$:

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} a_n \, (w_j - z_0)^n = \sum_{n=k+1}^{\infty} b_n \, (w_j - z_0)^n$$

En divisant par $(w_j - z_0)^{k+1}$ on obtient :
$a_{k+1} + a_{k+2}(w_j - z_0) + \cdots = \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n \, (w_j - z_0)^{n-k-1} =$
$= \sum_{n=k+1}^{\infty} b_n \, (w_j - z_0)^{n-k-1} = b_{k+1} + b_{k+2}(w_j - z_0) + \cdots$.
Par continuité, si $w_j \to z_0$, on obtient

$$a_{k+1} = b_{k+1}$$

□

Chapter 3

Théorie de Cauchy

3.1 intégrales curvilignes et primitives

Définition Soit $I = [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$.
Toute application continue $\phi : I \to \mathbb{C}$ est une courbe.
L'image, qu'on appelle aussi courbe, est notée $\gamma = \phi(I)$.
Un chemin de $\mathbb{C}$ est une courbe dans $\mathbb{C}$ tel qu'il existe une représentation paramétrique ϕ qui est continûment différentiable par morceaux, c'est à dire $\exists \alpha = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n = \beta$ tel que

$$\phi\,|_{[t_j\,,\,t_{j+1}]} \in C^1\left([t_j\,,\,t_{j+1}]\right),\ j = 0, \cdots, n-1$$

Le chemin est dit fermé si $\phi(\alpha) = \phi(\beta)$ (on parle dans ce cas d'un lacet)

$\phi(\alpha)$ est le point initial et $\phi(\beta)$ est le point terminal. Chaque paramétrage de γ donne lieu à un sens d'orientation.
Définition Soit $\gamma = \phi(I)$ un chemin dans $\mathbb{C}$. Si $f : \gamma \to \mathbb{C}$ est une fonction continue sur γ. Alors on définit :

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\,\phi'(t)\,dt$$

Remarque L'intégrale est indépendante de la représentation paramétrique. En effet, soit h une bijection continû ment différentiable de $I = [\alpha, \beta]$ sur $[\alpha', \beta']$ tel que $h(\alpha) = \alpha'$, $h(\beta) = \beta'$, et soit $\phi : [\alpha'\,,\,\beta'] \to \mathbb{C}$ un chemin.
On pose $\phi_1 = \phi \circ h$. Alors on obtient $\gamma = \phi(J) = \phi_1(I)$ et

$$\int_\alpha^\beta f(\phi_1(t))\,\phi_1'(t)\,dt = \int_\alpha^\beta f\big(\phi(\underbrace{h(t)}_{s})\big)\,\phi'(h(t))\,h'(t)\,dt$$

$$\overset{ds=h'(t)\,dt}{=} \int_{\alpha'}^{\beta'} f(\phi(s))\,\phi'(s)\,ds$$

Soit γ un chemin dans $\mathbb{C}$ donné par le paramétrage $\phi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$. Alors on définit le chemin inverse par:

$\gamma^- : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}; t \mapsto \phi(\alpha + \beta - t)$

On a $\int_{\gamma^-} f(z)\, dz = -\int_\gamma f(z)\, dz$

Définition : <u>Addition de chemins $\gamma_1 + \gamma_2$</u>

- Soient

$\gamma_1 : [\alpha_1, \beta_1] \to \mathbb{C}$ et $\gamma_2 : [\alpha_2, \beta_2] \to \mathbb{C}$ deux chemins. Supposons que $\gamma_1(\beta_1) = \gamma_2(\alpha_2)$. Alors $\gamma_1 + \gamma_2$ est le chemin γ défini par

$$\gamma : [\alpha_1, \beta_2 - \alpha_2 + \beta_1] \to \mathbb{C};$$
$$t \mapsto \gamma_1(t) \text{ si } \alpha_1 \le t \le \beta_1;$$
$$t \mapsto \gamma_2(\alpha_2 - \beta_1 + t) \text{ si } \beta_1 \le t \le \beta_2 - \alpha_2 + \beta_1$$

Alors $\int_{\gamma_1+\gamma_2} = \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2}$

- Si γ_j sont des chemins fermés, alors on dit que le système $\gamma_1 \cup \cdots \cup \gamma_n$ est un cycle. Notation: $\gamma_1 + \cdots + \gamma_n$.
- Soient γ_j, $j = 1, \cdots, n$ des chemins arbitraires.

On définit $\displaystyle\int_{\sum_{j=1}^n \gamma_j} f = \sum_{j=1}^n \int_{\gamma_j} f.$

Définition Soit $I = [\alpha, \beta]$ et $\gamma : I \to \mathbb{C}$ un chemin. On définit :

$$\int_\gamma f(z)\, |dz| = \int_\alpha^\beta f(\gamma(t))\, |\gamma'(t)|\, dt$$

Ainsi $L(\gamma) = \int_\alpha^\beta |\gamma'(t)|\, dt$ est la longueur de la courbe.

<u>ex.</u> Soit $[a, b]$ le segment joignant les points a et b dans $\mathbb{C}$, i.e. $[a, b] = \{(1-t)a + tb : 0 \le t \le 1\}$. On obtient que $\int_{[a,b]} 1\, dz = \int_0^1 (-a + b) dt = b - a$ et $\int_{[a,b]} 1\, |dz| = |b - a|$.

Proposition 2.1 *Soit Γ un chemin, f continue sur Γ. Alors on a*

$$\left|\int_\Gamma f(z)\, dz\right| \le \int_\Gamma |f(z)|\, |dz|$$

Démonstration Soit $I = \int_\Gamma f(z)\, dz$. Alors $I \in \mathbb{C}$. Si $I = 0$, alors rien est à montrer. Si $I \neq 0$, on a $I = |I| e^{i \arg I}$. Donc

$$|I| = e^{-i \arg I} I = \int_\Gamma e^{-i \arg I} f(z)\, dz = \mathrm{Re} \int_\Gamma e^{-i \arg I} f(z)\, dz$$

Soit $h(t) = f(\phi(t))\phi'(t)$, où $\phi(t)$ une paramétrisation du chemin Γ. Alors

$$|I| = \mathrm{Re} \int_\alpha^\beta e^{-i \arg I} h(t)\, dt = \int_\alpha^\beta \mathrm{Re}\left(e^{-i \arg I} h(t)\right) dt \le$$

$$\leq \int_\alpha^\beta \left| e^{-i \arg I} h(t) \right| dt = \int_\alpha^\beta |h(t)| \, dt.$$

On en déduit que

$$|I| \leq \int_\alpha^\beta |f(\phi(t))\phi'(t)| \, dt = \int_\Gamma |f(z)| \, |dz|.$$

Corollaire 2.2 *Si en plus $|f| \leq M$ sur Γ alors on a*

$$\left| \int_\Gamma f(z) \, dz \right| \leq M \cdot L(\Gamma).$$

Définition Soit $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert. Une fonction $F : \Omega \to \mathbb{C}$ s'appelle une primitive de $f : \Omega \to \mathbb{C}$, si F est holomorphe dans Ω et $F' = f$.

Théorème 2.3 Soit Ω un domaine dans $\mathbb{C}$, i.e un ouvert connexe. Supposons que $f : \Omega \to \mathbb{C}$ soit continue. Alors on a les équivalences suivantes :

1. f possède une primitive F sur Ω.
2. $\int_\Gamma f(z) \, dz = F(\phi(\beta)) - F(\phi(\alpha))$ où ϕ est une paramétrisation C^1 par morceaux de Γ (en particulier, l'intégrale ne dépend que des points initiaux et terminaux de Γ).
3. $\int_\Gamma f(z) \, dz = 0 \quad \forall \Gamma \subseteq \Omega \, , \Gamma$ fermé.

Démonstration

- **(1) $\Rightarrow$ (2)**

Soit $\phi|_{[t_j \, , t_{j+1}]} \in C^1([t_j \, , \, t_{j+1}])$ où $\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = \beta$.
Alors on a

$$\int_\Gamma f(z) \, dz = \sum_{j=0}^{n-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \underbrace{f(\phi(t)) \, \phi'(t)}_{=(F \circ \phi)'(t)} \, dt$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} (F \circ \phi)'(t) \, dt$$

$$\overset{(1)}{=} \sum_{j=0}^{n-1} \Big[(F \circ \phi)(t_{j+1}) - (F \circ \phi)(t_j) \Big]$$

$$= F(\phi(\beta)) - F(\phi(\alpha))$$

- **(2) $\Rightarrow$ (3)** évident

- **(3) $\Rightarrow$ (1)**

Soit $z_0 \in \Omega$ $z \in \Omega$ et Γ_z un chemin qcq dans Ω qui joint z_0 à z (possible car Ω est connexe).
Posons
$$F(z) = \int_{\Gamma_z} f(\xi)\, d\xi.$$
Alors F est indépendant du choix de Γ_z joignant z_0 et z car :
$$\Gamma = \Gamma_z + \Gamma_z'^{-} \quad \text{chemin fermé}$$
$$0 \overset{(3)}{=} \int_\Gamma f = \int_{\Gamma_z} f - \int_{\Gamma_z'} f$$
On a : F holomorphe dans Ω et $F' = f$.
En effet :
$$F(z+h) - F(z) = \int_{\Gamma_{z+h}} f(\zeta) d\zeta - \int_{\Gamma_z} f(\zeta) d\zeta$$
$$= \int_{\Gamma_{z+h}+\Gamma_z^-} f(\zeta)\, d\zeta$$
$$\underset{(3)}{=} \int_{[z,z+h]} f(\zeta)\, d\zeta$$
$$\Longrightarrow \quad \left| \frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z) \right| =$$
$$\left| \int_{[z,z+h]} (f(\zeta) - f(z))\, d\zeta \right| \frac{1}{|h|} \leq |h| \max_{\zeta \in [z,z+h]} |f(\zeta) - f(z)| \frac{1}{|h|} \underset{h\to 0}{\to} 0,$$
car f est continue en z.
- *Exemple* • Pour $n = 0, 1, 2, \cdots$, le monôme z^n admet une primitive sur $\mathbb{C}$, à savoir $\frac{1}{n+1} z^{n+1}$.

• Chaque polynôme $P(z) = \sum_{j=0}^N a_j z^j$ admet une primitive sur $\mathbb{C}$, à savoir $\sum_{j=0}^N \frac{1}{j+1} a_j z^{j+1}$.

• Soit $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ convergente sur $D(0,R)$, $R > 0$.
Alors $F(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \frac{z^{n+1}}{n+1}$ est une primitive de f sur $D(0,R)$.

• Pour $n = -2, -3, \cdots$, $\frac{z^{n+1}}{n+1}$ est une primitive de z^n sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

• $\frac{1}{z}$ n'a pas de primitive sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, car
$$\int_{|z|=r} \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{it}} ire^{it} dt = \int_0^{2\pi} i dt = 2\pi i \neq 0$$
(voir théorème 2.3).
On voit aussi, que d'après ce théorème et nos exemples ci-dessus $\int_{|z|=r} z^n dz = 0$ pour $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$.

Ce dernier fait peut aussi être démontré de la façon suivante:

$$\int_0^{2\pi} (re^{it})^n \, ri\, e^{it}\, dt = ir^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t}\, dt =$$
$$0 \text{ si } n \neq -1; 2\pi i \text{ si } n = -1$$

Théorème 2.4 Soit $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert et Γ un chemin dans $\mathbb{C}$. Supposons que la fonction :

$$F\ :\ \Gamma \times \Omega \to \mathbb{C}; (\xi\,,\ z) \mapsto F(\xi\,,\ z)$$

satisfait

1. $F(\xi\,,\ \cdot)$ est holomorphe dans $\Omega \quad \forall \xi \in \Gamma$.
2. $F(\cdot\,,\ z)$ est continue sur $\Gamma \quad \forall z \in \Omega$.
3. $F_z(\xi\,,\ z)$ est continue en $\Gamma \times \Omega$.

Alors la fonction :
$g(z) = \int_\Gamma F(\xi\,,\ z)\, d\xi$ est holomorphe dans Ω et

$$g'(z) = \int_\Gamma F_z(\xi\,,\ z)\, d\xi$$

Démonstration
Soit $z \in \Omega\,,\ h \in \mathbb{C}$ tel que $[z\,,\ z+h] \subset \Omega$ et

$$I(h) = \frac{g(z+h) - g(z)}{h} - \int_\Gamma F_z(\xi\,,\ z)\, d\xi.$$

Alors

$$I(h) = \int_\Gamma \left[\frac{F(\xi\,,\ z+h) - F(\xi\,,\ z)}{h} - F_z\,(\xi\,,\ z) \right] d\xi.$$

On montrera que $I(h) \to 0$ si $h \to 0$.
• Grâce au fait que $F(\zeta, \cdot)$ est une primitive de $F_z(\zeta, \cdot)$, on a par le théorème 2.3 que :

$$F(\xi\,,\ z+h) - F(\xi\,,\ z) = \int_{[z,z+h]} F_z\,(\xi, \sigma)\, d\sigma$$
$$\Rightarrow\ I(h) = \int_\Gamma \frac{1}{h} \int_{[z,z+h]} \big(F_z(\xi, \sigma) - F_z(\xi, z)\big)\, d\sigma\, d\xi.$$

Notons que F_z est uniformément continue sur $\Gamma \times [z, z+h]$. Donc
$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists\, \delta > 0$ tel que si $|h| < \delta$ on a: $|\sigma - z| \leq |h| < \delta$, et ainsi
$\forall\, \xi \in \Gamma$

$$|F_z(\xi, \sigma) - F_z\,(\xi, z)| < \varepsilon$$

$\Rightarrow\ \left| \int_{[z,z+h]} \big(F_z(\xi, \sigma) - F_z(\xi, z)\big)\, d\sigma \right| \leq \varepsilon\, |h|$

$\Rightarrow\ |I(h)| \leq \int_\Gamma \left|\frac{1}{h}\right| \varepsilon |h|\ |d\xi| \leq \varepsilon\, L(\Gamma)$.

Conclusion: $\lim I(h) = 0$ si $h \to 0$.

3.2 Indices de courbes

Théorème 2.5 *indice d'un point par rap. à un lacet/cycle*
1) Soit Γ un chemin fermé et $\Omega = \mathbb{C} \setminus \Gamma$. Posons

$$n(\Gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{d\xi}{\xi - z} \quad (z \in \Omega).$$

Alors $n(\Gamma, z)$ est une fonction à valeurs entières dans Ω. De plus, elle est constante sur chaque composante connexe de Ω et nulle sur la composante non bornée de Ω.
Le nombre $n\,(\Gamma\,,\, z)$ est l'indice de z par rapport à Γ, $\dfrac{1}{\xi - z}$ est le noyau de Cauchy.
2) Si $\Gamma_1, \cdots, \Gamma_n$ sont des lacets et Γ le cycle $\Gamma_1 + \cdots + \Gamma_n$, alors on définit :

$$n\,(\Gamma\,,\, z) = \sum_{j=1}^n n(\Gamma_j, z).$$

L'indice d'un cycle a les mêmes propriétés que celui d'un lacet.

Démonstration

2) est évident avec 1).

1) a) Montrons qu'il existe une composante connexe non bornée unique de Ω.
Γ est compact, donc il existe un disque $D(0, R)$ tel que $\Gamma \subseteq D(0, R)$. Notons qu'un connexe de Ω a la propriété d'être inclus dans une composante connexe unique de Ω; donc, il y a une composante connexe Ω_0 de Ω telle que $\underbrace{\mathbb{C} \setminus D(0, R)}_{\text{connexe}} \subseteq \Omega_0$.

Notons aussi que toute autre composante connexe de Ω est disjointe avec Ω_0. On conclut que tous les composantes connexes de Ω différentes de Ω_0, sont incluses dans $D(0, R)$.
Donc Ω_0 est unique.

b) $\underline{n\,(\Gamma\,,\, z) \in \mathbb{Z}}$
- *Rappel* : $e^w = 1 \Longleftrightarrow w = 2k\pi i$ pour un $k \in \mathbb{Z}$.

Soit $z \in \Omega$. Posons :

$$h(t) = \exp \int_0^t \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s) - z}\, ds \qquad (\Gamma\, :\, [0, 1] \to \mathbb{C}), \quad 0 \le t \le 1$$

<u>Montrons que $h(1) = 1$</u>

Sans aucune restriction, $\Gamma \in C^1[0, 1]$. Donc $h'(t) = h(t)\, \frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t) - z}$.
Posons $g(t) = \frac{h(t)}{\Gamma(t) - z}$. Alors $g \in C^1[0, 1]$ et

$$g'(t) = \frac{(\Gamma(t) - z)\, h'(t) - h(t)\, \Gamma'(t)}{(\Gamma(t) - z)^2} \equiv 0 \qquad \forall\, t \in [0, 1],$$

c'est à dire g est constante. Notons que $g(0) = \frac{h(0)}{\Gamma(0)-z} = \frac{1}{\Gamma(0)-z} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{car } \Gamma \text{ fermé}}}{=} \frac{1}{\Gamma(1)-z}$, et que $g(1) = \frac{h(1)}{\Gamma(1)-z}$.
Donc, $g(0) = g(1)$ implique que $\frac{1}{\Gamma(1)-z} = \frac{h(1)}{\Gamma(1)-z}$. Donc $h(1) = 1$.
On conclut que $2\pi i n(\Gamma, z) = \int_0^1 \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)-z}\, ds \in 2\pi i\mathbb{Z}$.

c) Montrons que l'indice est constant sur les comp. connexes
La fonction $z \mapsto \int_\Gamma \frac{1}{\xi - z}\, d\xi$ est holomorphe dans Ω (théorème 2.4), en particulier continue sur Ω.
Comme $n(\Gamma, z) \in \mathbb{Z}$ on déduit que $n(\Gamma, z)$ est constante sur les composantes connexes de Ω (Notons que l'image d'un connexe par rapport à une fonction continue est connexe.)

d) Montrons que $n(\Gamma, z) \equiv 0$ sur Ω_0
Choisissons $R > 0$ tel que $\{|z| > R\} \subseteq \Omega_0$ (voir a)). D'après c), $n(\Gamma, z)$ est donc constante pour $|z| > R$. Notons cette constante par C.
D'autre part,

$$\lim_{z\to\infty} \int_\Gamma \frac{1}{\xi - z}\, d\xi = \int_\Gamma \underbrace{\lim_{z\to\infty} \frac{1}{\xi - z}}_{=0}\, d\xi = 0.$$

Ainsi $C = 0$.
Justifions l'inversion de $\int$ et lim
$\sup_{\xi\in\Gamma} \left|\frac{1}{\xi - z}\right| \leq \frac{1}{\operatorname{dist}(z,\Gamma)} \to 0$ si $|z| \to \infty$. Donc la convergence est uniforme par rapport a ξ.

- *Exemple* Soit Γ le cercle de centre z_0 et de rayon $R > 0$.
On suppose qu'on parcourt le cercle N fois dans le sens positif (i.e. le domaine borné formé par cette courbe se trouve à gauche)

$\Gamma\, :\, z(t) = z_0 + R\, e^{it} \qquad 0 \leq t \leq 2\pi N$

$n\,(\Gamma\,,\, z_0) = \frac{1}{2\pi\, i} \int_0^{2\pi N} \frac{1}{R\, e^{it}}\, i\, R\, e^{it}\, dt = \frac{2\pi\, i\, N}{2\pi\, i} = N$
Soit Γ' le cercle de centre z_0 et de rayon $R' > R$ parcouru une fois dans le sens négatif. Alors $n(\Gamma', z_0) = -1$. Aussi $n(\Gamma+\Gamma', z_0) = n-1$ et $n(\Gamma+\Gamma', z_1) = -1$ si $R < |z_1| < R'$.

En général, $n(\Gamma, z)$ représente le nombre, noté par N, de tours que le cycle Γ fait autour du point z, compté avec leur orientation.

justification Soit $\Gamma(t) = z + r(t)\, e^{i\theta(t)}$ une courbe fermée où $r(t) > 0$, $r, \theta \in C^1\,[\alpha\,,\, \beta]\,,\, \Gamma\,(\alpha) = \Gamma\,(\beta)$. Notons que ceci implique que $r(\alpha) = r(\beta)$ et que $\theta(\beta) - \theta(\alpha)$ est un multiple de 2π. Par définition de N on a: $N = \frac{\theta(\beta)-\theta(\alpha)}{2\pi}$.

$$\Rightarrow\; n\,(\Gamma\,,\, z) = \int_\alpha^\beta \frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t) - z}\, \frac{dt}{2\pi\, i}$$

$$= \int_\alpha^\beta \left(\frac{r'(t)}{r(t)} + i\,\theta'(t)\right)\frac{dt}{2\pi i}$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\underbrace{\Big[\log r(t)\Big]_\alpha^\beta}_{\substack{=0 \text{ car} \\ \text{chemin fermé}}} + \frac{1}{2\pi}\left(\theta(\beta) - \theta(\alpha)\right)$$

Méthode de calcul de $n(\Gamma, z)$
Soit Γ un cycle. Soit D un disque tel que Γ décompose D en deux composantes D_g et D_d. Soit z_g, resp. z_d, un point dans la composante de $D \setminus \Gamma$ qui se trouve à gauche, resp. droite, du sens de parcours de Γ dans D. Alors on a $n(\Gamma, z_g) = n(\Gamma, z_d) + 1$.

3.3 Théorèmes de Cauchy

Définition Soit A_j trois points non colinéaires dans $\mathbb{C}$. Alors on appelle $\triangle = \triangle(A_1, A_2, A_3) =$
$\{\sigma_1 A_1 + \sigma_2 A_2 + \sigma_3 A_3 : 0 \leq \sigma_j \leq 1, \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 1\}$ le triangle fermé formé par A_1, A_2 et A_3. C'est l'enveloppe convexe des trois points A_j.

2.6 Théorème de Cauchy-Goursat
Soit Ω un ouvert dans $\mathbb{C}$, $p \in \Omega$, $\triangle$ un triangle fermé dans Ω.
Soit f une fonction définie et continue sur Ω tel que f soit holomorphe dans $\Omega \setminus \{p\}$.
Alors
$$\int_{\partial\triangle} f(z)\,dz = 0$$

Démonstration
- 1er cas : $p \notin \triangle$

Prenons les milieux, A', B', C' des côtés de $\partial\triangle$.
On obtient 4 nouveaux triangles $\triangle^j$ $(j = 1, \cdots, 4)$ avec $l(\partial\triangle^j) = \frac{1}{2}\,l(\partial\triangle)$.
On a $J = \int_{\partial\triangle} f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{4} \int_{\partial\triangle^j} f(z)\,dz$ (les $\partial\triangle^j$ étant orientés convenablement)
$\exists\, j_0 \in 1, \cdots, 4$ tel que $\left|\int_{\partial\triangle^{j_0}} f(z)\,dz\right| \geq \frac{|J|}{4}$.
On appelle ce triangle $\triangle_1$. On refait le même raisonnement avec $\triangle_1 \cdots$
On obtient une suite décroissante de triangles fermés (donc compacts), notés par $\triangle_n$.
Notons que $\triangle_{n+1} \subset \triangle_n$. De plus leur diamètre tend vers 0 ; en particulier : $l(\partial\triangle_n) = \frac{1}{2^n}\,l(\partial\triangle) \to 0$.
On peut donc appliquer le lemme d'intersection de Cantor: $\bigcap_n \triangle_n = \{z_0\}$.
Notons que $z_0 \in \Omega$ et que $z_0 \neq p$ car $p \notin \triangle$.
En vue de notre construction, $\left|\int_{\partial\triangle_n} f(z)\,dz\right| \geq \frac{|J|}{4^n}$.
Comme f est holomorphe en z_0 on a :

$\forall \varepsilon > 0\ ,\ \exists\, \delta > 0\ :\ 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow$
$$|f(z) - f(z_0) - (z - z_0)\,f'(z_0)| < |z - z_0|\varepsilon.$$

Soit $h(z) = f(z) - f(z_0) - (z - z_0)\, f'(z_0)$. Parce que le diamètre de $\triangle_n$ tends vers zéro, on pour n assez grand, disons $n \geq n_0$, que $\triangle_n \subseteq D(z_0, \delta)$. Donc $|h(z)| \leq |z - z_0|\varepsilon$ pour $z \in \triangle_n, n \geq n_0$.

$$\Rightarrow \frac{|J|}{4^n} \leq \Big|\int_{\partial\triangle_n} f(z)\, dz\Big| = \Big|\int_{\partial\triangle_n} (f(z_0) + (z - z_0)\, f'(z_0) + h(z))\, dz\Big| \leq$$

$$\leq \underbrace{\Big|\int_{\partial\triangle_n} (f(z_0) + (z - z_0)\, f'(z_0))\, dz\Big|}_{=0 \text{ car polynome}} + \int_{\partial\triangle_n} |h(z)|\; |dz| \leq$$

$$\leq \varepsilon \int_{\partial\triangle_n} |z - z_0|\; |dz| \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2^n} \sup_{z\in\triangle_n} |z - z_0|\, l\,(\partial\triangle) \leq \frac{\varepsilon}{4^n}\, l^2\,(\partial\triangle),$$

car $\sup_{z\in\triangle_n} |z - z_0| \leq \text{diam}\ \triangle_n \leq l(\partial\triangle_n) \leq \frac{1}{2^n} l(\partial\triangle)$.
Donc $|J| \leq \varepsilon l^2\,(\partial\triangle)$. Faisons tendre $\varepsilon \to 0$. Alors on voit que $J = 0$.

- <u>2ième cas</u> : p est un sommet du triangle $\triangle = \triangle(A, B, C)$.

Supposons que $p = C$. Soit $\varepsilon > 0$. Choisissons $X \in [AC]$ et $Y \in [BC]$ tels que $|X - Y| < \varepsilon$, $|C - X| < \varepsilon$ et $|C - Y| < \varepsilon$.

En appliquant le premier cas aux triangles ABX et BYX, on obtient

$$|J| = \Big|\int_{\partial\triangle} f\, dz\Big| = \Big|\int_{\partial YXC} f\, dz\Big| \leq \sup_{\triangle} |f|\; 3\,\varepsilon$$

ε est arbitraire, on en déduit que $J = 0$.

- <u>3ième cas</u> p se trouve sur le bord du triangle $\Delta(A, B, C)$, disons $p \in [AC]$. Dans ce cas on considère les deux triangles ABp et BCp et on utilse le cas 2.

- <u>4ième cas</u> : $p \in \triangle^0$
Formons les trois triangles Δ_j de sommets ABP, BCP, CAP. Le deuxième cas nous donne alors:

$\int_{\partial\triangle} f = \sum\limits_{j=1}^{3} \int_{\partial\triangle_j} f = 0.$

Attention

$\int_\gamma f(z)\, dz \neq 0$ en général, $f \in \mathcal{H}\,(\Omega)$, γ courbe fermé dans Ω.

- <u>*Exemple*</u> $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $f(z) = \frac{1}{z} \in \mathcal{H}(\Omega)$, $\gamma =$ cercle unité.
$\Rightarrow \int_\Gamma f(z)\, dz = 2\pi i$.

Définition Un domaine D (= ouvert connexe) est appelé <u>domaine étoilé</u> s'il existe un point a de ce domaine tel que : $\forall\, z \in D : \quad [a, z] \subset D$.
On dit que dans ce cas a est un point étoilé de D.

- *Exemple* Chaque ouvert convexe ; $\mathbb{C} \setminus]-\infty\,,\,0]$

- *contre-exemple* $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

2.7.1 Théorème de Cauchy Soit D un domaine étoilé. Supposons que $f \in H(D)$. Alors pour tout chemin fermé Γ dans D on a

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 0.$$

2.7.2 Théorème de Cauchy Soient D un domaine étoilé, $p \in D$ et $f : D \to \mathbb{C}$ continue. Supposons que $f \in \mathcal{H}\,(D \setminus \{p\})$. Alors pour tout chemin fermé Γ dans D on a

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 0.$$

Démonstration D'après le théorème 2.3, cela revient à montrer que f admet une primitive.
Soit $a \in D$ un point étoilé de D. Pour tout $z \in D$ on a donc que $[a,z] \subseteq D$. Ainsi la fonction $F(z) = \int_{[a,z]} f(\xi)\,d\xi$ est bien définie pour $z \in D$. Montrons que $F \in H(D)$. Fixons $z_0 \in D$. Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est continue en z_0 on a :

$$\exists\,\tilde{\delta} > 0 \;:\; |\xi - z_0| < \delta \Rightarrow |f(\xi) - f(z_0)| < \varepsilon.$$

Soit $z \in D$ tel que $|z - z_0| < \delta < \tilde{\delta}$ et que le triangle $\Delta(a, z_0, z)$ soit inclus dans D (un tel choix est possible car D est un ouvert étoilé par rapport à a). D'après le théorème 2.6 de Cauchy-Goursat on a $\int_{\partial\triangle(a,z_0,z)} f(\xi)\,d\xi = 0$.
D'où $F(z) - F(z_0) = \int_{[z_0,z]} f(\xi)\,d\xi$.

$\Longrightarrow \frac{F(z)-F(z_0)}{z-z_0} - f(z_0) =$

$$= \frac{1}{z - z_0}\Big(\int_{[z_0\,,\,z]} f(\xi)\,d\xi - \int_{[z_0\,,\,z]} f(z_0)\,d\xi\Big) =$$

$= \frac{1}{z-z_0} \int_{[z_0,z]} (f(\xi) - f(z_0))\,d\xi.$

Parce que $|z - z_0| < \delta$, on obtient

$$\left|\frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} - f(z_0)\right| < \varepsilon \frac{|z - z_0|}{|z - z_0|} = \varepsilon.$$

Donc F est différentiable en z_0 et $F'(z_0) = f(z_0)$. C'est à dire que F est une primitive de f dans D. Théorème 2.3 maintenant implique que $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ pour tout chemin fermé γ dans D.

Proposition 2.8: Formule de Cauchy
Soit D un domaine étoilé et γ un chemin fermé dans D.
Soit $f \in \mathcal{H}(D)$ et soit $z_0 \in D \setminus \gamma$. Alors

$$n\,(\gamma\,,\,z_0)\,f(z_0) = \frac{1}{2\pi\,i} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z_0}\,d\xi$$

En plus, f est infiniment différentiable, c'est à dire $f', f'', \cdots$ sont holomorphes dans D et

$$n\,(\gamma\,,\,z_0)\,f^{(n)}\,(z_0) = \frac{n!}{2\pi\,i}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}\,d\xi \qquad (*)$$

Démonstration

1) Posons

$$g(z,\xi) = \frac{f(\xi)-f(z)}{\xi - z} \text{ si } \xi \neq z \qquad (\xi\,,\,z \in D)$$

$$g(z,\xi) = f'(z) \text{ si } \xi = z$$

$g(z\,,\,\cdot)$ est continue dans D (car f est dérivable) $\forall\, z \in D$. En plus, $g(z\,,\,\cdot) \in H(D\backslash\{z\})$. En vue du théorème de Cauchy 2.7 (avec $p = z$), on a $\forall z \in D$:

$$\int_\gamma g(z\,,\,\xi)\,d\xi = 0.$$

Ainsi $\int_\gamma \frac{f(\xi)-f(z)}{\xi - z}\,d\xi = 0$. Donc $\forall z \in D \setminus \Gamma$:

$\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi-z}\,d\xi = f(z)\int_\gamma \frac{1}{\xi-z}\,d\xi = f(z)\,2\pi\,i\,n\,(\gamma\,,\,z)$

2) Appliquons 2.4 à $\Omega = D \setminus \gamma$ et à $F(\xi,z) = \frac{f(\xi)}{\xi-z}$, $(\xi \in \gamma, z \in \Omega)$.

Notons que $F_z(\xi,z) = \frac{\partial}{\partial z}\frac{f(\xi)}{\xi-z} = \frac{f(\xi)}{(\xi-z)^2}$ est continue sur $\gamma \times \Omega$. Comme $n(\gamma,z)$ est constante sur les composantes connexes de $\mathbb{C}\setminus\gamma$ on obtient avec 2.4 que pour $z \in D\setminus\gamma$

$$\frac{d}{dz}\big(n(\gamma,z)f(z)\big) = n(\gamma,z)f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2}\,d\xi.$$

La même procédure pour les dérivées d'ordre supérieur. D'où la formule $(*)$.

2.9 Théorème de Morera

Soit f une fonction continue sur un ouvert Ω telle que $\int_{\partial\triangle} f(z)\,dz = 0$ pour tout triangle fermé $\triangle$ dans Ω. Alors f est holomorphe dans Ω.

Démonstration

Soit $a \in \Omega$ fixé et $D(a,R) \subseteq \Omega$. D'après la démonstration de 2.3; (3) $\Longrightarrow$ (1), ou de 2.7, on sait que pour $z \in D(a,R)$ la fonction $F(z) = \int_{[a,z]} f(\xi)\,d\xi$ est une primitive de f dans $D(a,R)$ (notons qu'ici l'hypothèse $\int_{\partial\triangle} f = 0$ a été utilisé).

En vertu du théorème 2.8, la dérivée F' de F est holomorphe dans $D(a,R)$. Comme $F' = f$, on a finalement que f est holomorphe dans Ω.

3.4 Analyticité des fonctions holomorphes

Théorème 2.10: analyticité des fonctions holomorphes

Soit $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert et f une fonction holomorphe dans Ω.

Alors f est localement développable en série entière dans Ω. Plus précisément:

$\forall\, a \in \Omega$ il existe une suite (a_n) telle que la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$, converge vers $f(z)$ dans le plus grand disque de centre a inclus dans Ω, c'est à dire $R(a) \geq d := dist\ (a, \partial\Omega)$ si $\Omega \neq \mathbb{C}$ et $R(a) = \infty$ si $\Omega = \mathbb{C}$
(On dit que f est analytique sur Ω)
En plus, on a pour tout $0 < R < d$:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi\, i} \int_{|\xi-a|=R} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}\, d\xi.$$

Démonstration
Soit $a \in \Omega$ et $0 < R < d$ tel que $\overline{D(a,R)} \subseteq \Omega$. Comme $f \in H(\Omega)$, on a d'après la formule de Cauchy 2.8 que pour tout $0 < r < R$ et $z \in D(a,r)$

$$f(z) = \int_{|\xi-a|=R} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \frac{d\xi}{2\pi\, i}.$$

Notons que $\left|\frac{z-a}{\xi-a}\right| \leq \frac{r}{R} < 1$. Ainsi pour tout $z \in D(a,r)$ la série
$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{(\xi-a)+(a-z)} = \frac{1}{\left(1 - \frac{z-a}{\xi-a}\right)} \frac{1}{\xi-a} =$
$= \frac{1}{\xi-a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{\xi-a}\right)^n$
converge uniformément par rapport à la variable ξ.
Soit $\Gamma = \{|\xi - a| = R\}$. D'où $\forall\ |z-a| < r$

$$f(z) = \int_\Gamma \frac{f(\xi)}{\xi-a} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{\xi-a}\right)^n \cdot \frac{d\xi}{2\pi\, i} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (z-a)^n \underbrace{\left[\int_\Gamma \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}} \frac{d\xi}{2\pi\, i}\right]}_{=a_n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n.$$

Ainsi $R(a) \geq r$. Notons que a_n ne dépend pas de r. En faisant tendre $r \to d$, on obtient $R(a) \geq d$.

Remarque Ceci nous montre de nouveau que si f est holomorphe dans Ω, alors f' est aussi holomorphe dans Ω.

Définition Soit $E \subseteq \mathbb{C}$. Alors on dit que $a \in \mathbb{C}$ est un point d'accumulation de E, s'il existe une suite (a_n) d'éléments differents de E qui converge vers a.

2.11 Théorème d'unicité :

Soit $D \subseteq \mathbb{C}$ un domaine et $f, g \in H(D)$. Alors on a les équivalences suivantes :

1. $f = g$ sur D.

2. $I = \{z \in D \ ; \ f(z) = g(z)\}$ a un point d'accumulation dans D.
3. $\exists \ z_0 \in D$ tel que $f^{(n)}(z_0) = g^{(n)}(z_0) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Démonstration

- (1) $\Rightarrow$ (2) évident

- (2) $\Rightarrow$ (3)

Soit z_0 un point d'accumulation de I dans D. Alors $f, g \in H(D) \underset{2.10}{\Rightarrow} f$ et g sont développables en série entière au point $z_0 \in I$.
D'où (3) (par le théorème d'unicité des séries entières 1.4)

- (3) $\Rightarrow$ (1)

Posons $h = f - g \in H(D)$
$A = \{z \in D \ : \ h^{(n)}(z) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}\}$,
$B = D \setminus A \Rightarrow D = A \cup B$ et $A \cap B = \emptyset$

· d'après l'hypothèse (3) $A \neq \emptyset$. En plus A est fermé (dans D).

· <u>A est ouvert</u> ; en effet :

soit $w_0 \in A$, h est développable en série entière en w_0,
c'est à dire $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{h^{(n)}(w_0)}{n!}}_{=0} (z - w_0)^n \equiv 0$ pour tout z dans un voisinage V de w_0.
Donc A est ouvert.

Ainsi D est la réunion disjointe de deux ouverts A et B. Comme D est connexe et $A \neq \emptyset$ on obtient que $B = \emptyset$. D'où $A = D$.

Remarques

(1) Soit $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad x \in \mathbb{R}$.

D'après le théorème précédent, il n'existe qu'une seule fonction holomorphe dans $\mathbb{C}$ qui prolonge e^x à savoir :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

(2) La fonction $f(x) = \exp(-\frac{1}{x^2})$ si $x \neq 0$, et $f(x) = 0$ si $x = 0$, n'admet pas de prolongement holomorphe dans $\mathbb{C}$, car $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout n.

(3) Les zéros d'une fonction holomorphe $f \not\equiv 0$ sont isolés, c'est à dire si $f \in H(\Omega)$, alors $Z(f) = \{a \in \Omega : f(a) = 0\}$ n'admet pas de points d'accumulation dans Ω, en d'autre mots, $Z(f)$ est discret dans Ω.

3.5 Principe du maximum

Lemme 2.13 : <u>Estimations de Cauchy</u>

Soit $f \in \mathcal{H}\,(D(a,R))$ *et* $|f(z)| \le M \quad \forall\, z \in D(a,R)$. *Alors :*

$$|f^{(n)}(a)| \le \frac{n!\,M}{R^n}\,(n = 1, 2, \cdots)$$

Démonstration
Soit $0 < r < R$. D'après le théorème de Cauchy on a pour tout $z \in D(a,r)$:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi\, i} \int_{|\xi - a| = r} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}\, d\xi.$$

Si $z = a$, on obtient

$$|f^{(n)}(a)| \le \frac{n!}{2\pi} \int_{|\xi - a| = r} \frac{|f(\xi)|}{|\xi - a|^{n+1}}\, |d\xi| \le \frac{n!}{2\pi}\, \frac{M}{r^{n+1}}\, 2\pi\, r = \frac{n!}{r^n}\, M.$$

Maintenant on fait tendre $r \to R$.
2.14 Théorème de Liouville
Soit f une fonction holomorphe dans $\mathbb{C}$ (on dit que f est une fonction entière). Supposons que f est bornée. Alors f est constante.

Démonstration
$f \in \mathcal{H}\,(\mathbb{C}) \Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, z^n$ converge $\forall\, z \in \mathbb{C}$. Soit $|f| \le M$.
D'après les estimations de Cauchy on a

$$0 \le \frac{|f^{(n)}(0)|}{n!} \le \frac{M}{R^n} \quad \forall\, R > 0\ ,\ n = 1, 2, \cdots$$

En faisant tendre $R \to \infty$, on obtient que $f^{(n)}(0) = 0 \quad \forall\, n = 1, 2, \cdots$.
On en déduit que $f \equiv f(0)$.
2.15 Théorème du maximum
Soit Ω *un domaine de* $\mathbb{C}$, $a \in \Omega$, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. *Alors ou bien* f *est constante ou bien tout voisinage de* a *contient un point* b *tel que* $|f(a)| < |f(b)|$, *c'est à dire* f *n'admet pas de maximum local dans* Ω.

Démonstration
Supposons que f admette un maximum local en a, i.e. qu'il existe un disque $D = D(a,R)$, $\overline{D} \subseteq \Omega$ tel que $\forall\, z \in D$, $|f(z)| \le |f(a)|$.

(1) Montrons que f est constante sur D.
D'après le théorème 2.10,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n\ ,\ |z - a| < R.$$

Pour $0 < r < R$ on obtient:

$$I = \int_0^{2\pi} \left| f\left(re^{i\theta} + a\right) \right|^2 d\theta \underset{TD}{=} 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \, r^{2n} \, .$$

D'autre part :

$$I \leq \int_0^{2\pi} |f(a)|^2 \, d\theta = 2\pi \, |f(a)|^2 = 2\pi \, |a_0|^2$$

c'est à dire que $|a_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} \leq |a_0|^2$.
Donc $a_n = 0$ pour tout $n = 1, 2, \cdots$. Ainsi $f|_D \equiv a_0 =$ constante.

(2) Le théorème d'unicité 2.11 implique implique maintenant que f est constante sur Ω.

2.16 Théorème du maximum (2$^{\text{me}}$ version) :
Soit $K \subseteq \mathbb{C}$ un compact, $f \in \mathcal{C}\,(K)$ et $f \in \mathcal{H}(K^\circ)$. Alors

$$\max_{z \in K} |f(z)| = \max_{\xi \in \partial K} |f(\xi)|.$$

Démonstration
Supposons qu'il existe $a \in K^\circ$ tel que $|f(a)| = \max_{z \in K} |f(z)|$.
Comme les composantes connexes de K° sont connexes, on peut appliquer la première version du théorème du maximum à la composante connexe C de K° qui contient a.
Donc, f est constante $= f(a)$ sur C. Comme $\overline{C} \cap \partial K \neq \emptyset$, on en déduit que

$$\max_{z \in K} |f(z)| = \max_{z \in \partial K} |f(z)|.$$

Corollaire 2.17
Soit $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un domaine et $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ non constante. Supposons que a est un minimum local de f. Alors $f(a) = 0$.

Démonstration Par hypothèse il existe un disque $D = D(a, r) \subseteq \Omega$ tel que $|f(a)| \leq |f(z)|$ pour tout $z \in D$. Supposons que $f(a) \neq 0$. Alors f n'admet pas de zéros dans D. Ainsi $\frac{1}{f}$ est holomorphe dans D. Comme a est le lieu d'un maximum de $\frac{1}{f}$ dans D, on conclut avec 2.15 que $\frac{1}{f}$ et ainsi f est constante dans D. Comme Ω est connexe, le théorème d'unicité 2.11 implique que f est constante sur Ω. Contradiction.

Définition
Soit $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert, $a \in \Omega$ et $f \in H(\Omega \setminus \{a\})$. Alors on dit que a est une singularité isolée de f.
Elle est dite artificielle s'il existe un prolongement h holomorphe dans Ω tel que $h|_{\Omega \setminus \{a\}} = f$

- *Exemple* $\frac{1}{z}$, $exp(\frac{1}{z})$
0 est une singularité isolée.

2.18 Théorème de Riemann sur les singularités artificielles
Soit $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert, $a \in \Omega$ et $f \in H\big(\Omega \setminus \{a\}\big)$. Supposons que f soit bornée dans un voisinage pointé de a (c'est à dire dans $D(a, \varepsilon) \setminus \{a\}$).

Alors a est une singularité artificielle de f.

Démonstration
Posons $h(z) = (z-a)^2 f(z)$, $z \in D(a,\varepsilon) \setminus \{a\}$, $D := D(a,\varepsilon) \subseteq \Omega$, et $h(a) = 0$.
$\Rightarrow \; h \in \mathcal{H}(D \setminus \{a\})$
on a

$$\frac{h(z)-h(a)}{z-a} = (z-a) f(z) \xrightarrow[z \to a]{f \text{ bornée}} 0.$$

Donc $h \in H(D)$ avec $h'(a) = 0$. D'après le théorème 2.10, h est développable en série entière, c'est à dire :

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n = \sum_{n=2}^{\infty} a_n (z-a)^n \,, \quad \underline{\forall\, z \in D}.$$

$\Rightarrow \; f(z) = \frac{h(z)}{(z-a)^2} = \sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n (z-a)^{n-2} \quad \underline{\forall\, z \in D \setminus \{a\}}.$
Donc cette série est le prolongement holomorphe de f dans D.
Posons $g(z) = f(z)$ si $z \in \Omega, z \neq a$ et $f(z) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n (z-a)^{n-2}$ si $z \in D$.
Alors g est bien définie et holomorphe dans Ω. C'est la fonction cherchée et elle est unique.

Application Soit $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ et $a \in \Omega$. Alors $\dfrac{f(z)-f(a)}{z-a}$ admet un prolongement holomorphe f^* en a. Celui-ci satisfait $f^*(a) = f'(a)$.

3.6 Version homologique des théorèmes de Cauchy

Définition Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$.
(1) Un cycle $\Gamma = \Gamma_1 + \cdots + \Gamma_n$ dans Ω est dit <u>homologue à zéro par rapport à Ω</u> (on note $\Gamma \underset{\Omega}{\sim} 0$) si $n(\Gamma, z) = 0 \quad \forall\, z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$.
(2) Deux cycles Γ_1 et Γ_2 dans Ω sont homologues (par rapport à Ω), si $\Gamma_1 - \Gamma_2 \underset{\Omega}{\sim} 0$; notation: $\Gamma_1 \underset{\Omega}{\sim} \Gamma_2$.

- <u>*Exemple*</u> Soit $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ et $\Omega = \mathbb{D} \setminus \{0\}$ et $\Gamma_1 = \mathcal{C}\left(0\,,\, \frac{1}{2}\right)$ le cercle centré en 0 de rayon $\frac{1}{2}$, parcouru une fois dans le sens positif. Alors $\Gamma_1 \underset{\Omega}{\not\sim} 0$ car $n(\Gamma_1\,,\,0) = 1 \neq 0$
Soit $\Gamma_2 = \mathcal{C}\left(0, \frac{2}{3}\right)$ parcouru une fois dans le sens négatif et $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$.
Alors $\Gamma \underset{\Omega}{\sim} 0$ car pour $z_0 = 0$ on a $n(\Gamma\,,\,0) = n(\Gamma_1\,,\,0) + n(\Gamma_2\,,\,0) = 1 + (-1) = 0$ et pour $|z_0| > 1$ on a : $n(\Gamma, z_0) = 0$, car z_0 est dans la composante non bornée de $\mathbb{C} \setminus \Gamma$.
Proposition 2.19 *Soit Ω un ouvert convexe (ou étoilé).*
Alors chaque cycle Γ dans Ω est homologue à zero par rapport à Ω.

Démonstration Soit $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ et soit $\Gamma = \sum\limits_{j=1}^{n} \Gamma_j$. Alors

$$n(\Gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi\, i} \int_\Gamma \frac{1}{\xi - z_0}\, d\xi \; = \frac{1}{2\pi\, i} \sum_{j=1}^{n} \int_{\Gamma_j} \frac{1}{\xi - z_0}\, d\xi.$$

Comme $\frac{1}{\xi - z_0} \in \mathcal{H}\,(\Omega)$ (par rapport à ξ) le théorème de Cauchy pour les domaines étoilés nous fournit le résultat $n(\Gamma, z_0) = 0$.

2.20 Théorème de Cauchy global

Soit Ω un ouvert dans $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ et soit Γ un cycle dans Ω homologue à zéro par rapport à Ω.
Alors $\forall\, z \in \Omega \setminus \Gamma$ on a :
(I) $n\,(\Gamma\,,\, z)\, f(z) = \frac{1}{2\pi\, i} \int_\Gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi$ *(formule de Cauchy)*
(II) $\int_\Gamma f(z)\, dz = 0$.

(III) Si Γ_1 est un cycle homologue à Γ_2 par rapport à Ω (c'est à dire $\Gamma_1 - \Gamma_2 \underset{\Omega}{\sim} 0$), alors

$$\int_{\Gamma_1} f\, dz = \int_{\Gamma_2} f\, dz \quad \forall\, f \in \mathcal{H}(\Omega).$$

Démonstration

(1) Notons que $(I) \Longleftrightarrow (I')$, donné par

$$(I') \qquad \int_\Gamma \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z}\, d\xi = 0 \qquad \forall\, z \in \Omega \setminus \Gamma.$$

Soit $g(\xi, z) = \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z}$ si $\xi \neq z$ et $(\xi\,,\, z) \in \Omega \times \Omega f'(z)$ si$\xi = z$.

- g est continue sur $\Omega \times \Omega$.

- g est continue hors de la diagonale complexe d.
- soit $a \in \Omega$ et $(a, a) \in d$

Parce que f' est continue (2.10), on peut choisir un disque $D = D(a, \delta)$, $\overline{D} \subseteq \Omega$ et tel que :

$$|f'(w) - f'(z)| < \varepsilon \quad \forall\, w, z \in D\,.$$

Soit $z_1 \neq z_2 \in D$, D est convexe $\Rightarrow$ $w\,(t) = (1 - t)\, z_2 + t\, z_1 \in D$ pour $0 \leq t \leq 1$. Comme

$$g\,(z_1\,,\, z_2) = \frac{f(z_1) - f(z_2)}{z_1 - z_2} \overset{2.3}{=} \frac{1}{z_1 - z_2} \int_{[z_2, z_1]} f'(z)\, dz$$

on a:

$$|g\,(z_1\,,\, z_2) - g(a, a)| = \left| \int_0^1 [f'(w(t)) - f'(a)]\, dt \right| \leq \varepsilon\,.$$

- <u>$g(\xi, \cdot)$ est holomorphe dans Ω.</u>

En effet, $\forall\, \xi \in \Omega \;\; g(\xi, \cdot)$ est borné dans un voisinage de ξ. Par le théorème de Riemann, $g(\xi, \cdot)$ est holomorphe en $z = \xi$.

(2) Soit $h(z) = \int_\Gamma g\,(w, z)\, dw \Rightarrow h$ est continue sur Ω.
On a même que $h \in \mathcal{H}\,(\Omega)$. Pour montrer cela, on peut utiliser le théorème de Morera:

Soit $\triangle \subseteq \Omega$ un triangle fermé. Alors

$$\begin{aligned}\int_{\partial\triangle} h(z)\, dz &= \int_{\partial\triangle} \Big(\int_\Gamma g(\xi, z)\, d\xi \Big)\, dz \\ &= \int_\Gamma \Big(\int_{\partial\triangle} g(\xi, z)\, dz \Big)\, d\xi = 0\end{aligned}$$

car $g(\xi, \cdot)$ hol. dans $\Omega = 0$.
(3) Soit $\mathcal{O} = \{z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma \;:\; n(\Gamma, z) = 0\}$
$\mathcal{O} \neq \emptyset$ car la composante connexe non bornée de $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ est inclus dans $\mathcal{O}$. De même, $\mathcal{O} \cap \Omega \neq \emptyset$.
De plus $\mathcal{O}$ est ouvert (car réunion de composantes connexes de $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ et celles-là sont ouvertes).
Posons :

$$h_1(z) = \frac{1}{2\pi\, i} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w - z}\, dw, \quad z \in \mathcal{O}$$

D'après 2.4, $h_1 \in \mathcal{H}\,(\mathcal{O})$.
Soit $z \in \mathcal{O} \cap \Omega$. Alors

$$h_1(z) = \frac{1}{2\pi\, i} \int_\Gamma \frac{f(w) - f(z)}{w - z}\, dw \quad \text{car} \quad n\,(\Gamma\,,\, z) = 0.$$

Donc d'après la définition de h on voit que $h_1 = h$ sur $\mathcal{O} \cap \Omega$. D'où h_1 est un prolongement analytique de h, i.e. $\exists\, \phi \in \mathcal{H}(\Omega \cup \mathcal{O})$ tel que $\phi|_\Omega = h\,,\, \phi|_{\mathcal{O}} = h_1$.

(4) $\underline{\Omega \cup \mathcal{O} = \mathbb{C}}$
En effet $\Gamma \underset{\Omega}{\sim} 0$, c'est à dire $n\,(\Gamma\,,\, z) = 0 \quad \forall\, z \notin \Omega$
$\Rightarrow \mathbb{C} \setminus \Omega \subseteq \mathcal{O} \Rightarrow \mathcal{O} \cup \Omega = \mathbb{C}$.

De (3) et (4) on obtient que $\phi \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$. En plus, $\lim_{z\to\infty} \phi(z) = \lim_{z\to\infty} h_1(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}\, dw = 0$.
Donc ϕ est une fonction entière bornée. La limite à l'infini étant 0, le théorème de Liouville implique que $\phi \equiv 0$ dans $\mathbb{C}$. Ainsi
$h \equiv 0$ sur Ω, donc $h(z) = \int_\Gamma \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z}\, d\xi = 0 \quad \forall z \in \Omega \setminus \Gamma$.

II - Soit $F(z) = (z - a)\, f(z)$ où $a \in \Omega$ est fixé, d'où :

$$f(z) = \frac{F(z)}{z - a} \quad \text{avec} \quad F \in \mathcal{H}\,(\Omega)$$

$$\overset{(1)}{\Longrightarrow} \quad \int_\Gamma \frac{F(z)}{z - a}\, dz = 2\pi i\; n\,(\Gamma\,,\, a)\, F\,(a) = 0.$$

Ainsi $\int_\Gamma f(z)\,dz = 0$.

III - $\Gamma_1 \underset{\Omega}{\sim} \Gamma_2 \Longleftrightarrow \Gamma_1 - \Gamma_2 \underset{\Omega}{\sim} 0 \underset{(\mathrm{II})}{\Longrightarrow} 0 = \int_{\Gamma_1 - \Gamma_2} f(z)\,dz = 0 \Longleftrightarrow \int_{\Gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\Gamma_2} f(z)\,dz$.

3.7 Théorème du résidu et applications

Définition Soit f holomorphe dans $\Omega = D(a,R) \setminus \{a\}$, $0 < r < R$. Alors le nombre

$$Res(f,a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} f(z)\, dz$$

s'appelle le résidu de f en a.

Remarque Le théorème de Cauchy global nous dit que $Res(f,a)$ ne dépend pas du choix de $0 < r < R$, car $\{r_1 e^{it} : 0 \leq t \leq 2\pi\} \underset{\Omega}{\sim} \{r_2 e^{it} : 0 \leq t \leq 2\pi\}$ pour $0 < r_1 \leq r_2 < R$.

3.1 Théorème du résidu

Soit $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert et $P \subseteq \Omega$ un ensemble discret (c'est à dire P n'a pas de point d'accumulation dans Ω). Soit $f \in H(\Omega \setminus P)$ et γ un cycle dans Ω tel que :
$\gamma \cap P = \emptyset$ et $\gamma \underset{\Omega}{\sim} 0$. Alors

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)\, dz \overset{(1)}{=} \sum_{w \in \Omega} n(\gamma, w)\, Res(f,w)$$

$$\overset{(2)}{=} \sum_{p \in P} n(\gamma, p)\, Res(f,p).$$

Démonstration.
1) Notons que P, qui est l'ensemble des singularités isolées de f, est au plus dénombrable.
2) $\Omega \setminus P$ est ouvert, car $(\overline{P} \setminus P) \cap \Omega = \emptyset$.
3) Si $w \in \Omega \setminus P$, alors $Res(f,w) = 0$.
En effet, il existe un disque $D = D(w, \varepsilon) \subseteq \Omega \setminus P$ tel que $f \in \mathcal{H}(D)$. D'où par Cauchy:

$$\int_{|z-w|=\frac{\varepsilon}{2}} f(z)\, dz = 0.$$

Ainsi (3) est vraie. On conclut que les deux sommes coincident.
4) Les deux sommes sont des sommes à support fini. En effet considérons $C = \{z \in \mathbb{C} \setminus \gamma \,:\, n(\gamma\,,\, z) \neq 0\}$. On voit que $\overline{C}$ est un compact et que $\overline{C} \subseteq \Omega$. Notons que $\gamma \underset{\Omega}{\sim} 0$.
Comme P est discret, il n'existe qu'un nombre fini d'éléments de P dans C (resp. dans $\overline{C}$) (sinon P aurait des points d'accumulations dans $\overline{C} \subset \Omega$). Notons aussi que $P \cap C = P \cap \overline{C}$. D'où le support est fini.
5) Soit $P \cap C = \{a_1, a_2, , \cdots, a_n\}$.
Choisissons des disques $D(a_j, \varepsilon_j) = D_j$ tel que

$$f \in \mathcal{H}(D_j \setminus \{a_j\})\,,\, \overline{D_j} \subseteq\, (\Omega \setminus P) \cup \{a_j\}.$$

Orientons les frontières γ_j de D_j de façon positive.

Posons :

$$\gamma^* = \gamma - \sum_{j=1}^{n} \underbrace{n\,(\gamma\,,\,a_j)}_{=n_j \in \mathbb{Z}} \gamma_j$$

Alors γ^* est un cycle dans Ω tel que $\gamma^* \sim 0$ par rapport à $\Omega \setminus P$. Justification:
Notons d'abord que $(\Omega \setminus P)^c = \Omega^c \cup P$. On distinguera trois cas:
$\cdot\ w \in \Omega^c \underset{\gamma \underset{\Omega}{\sim} 0}{\Longrightarrow} n(\gamma, w) = 0$ et $n\,(\gamma_j, w) = 0$. Ainsi $n(\gamma^*, w) = 0$

$\cdot\ w \in P \setminus \{a_1, \cdots, a_n\} \Rightarrow n(\gamma, w) - \sum\limits_{j=1}^{n} n_j \underbrace{n(\gamma_j, w)}_{=0} = n(\gamma, w) = 0$, car $w \notin C$.

$\cdot\ w \in \{a_1, \cdots, a_n\} \underset{w=a_k}{\Rightarrow} n(\gamma^*, w) = n(\gamma, a_k) - n(\gamma\,,\,a_k) = 0$ car
$n(\gamma_j, a_k) = \delta_{j,k}$.

(6) $\quad f \in \mathcal{H}\,(\Omega \setminus P) \underset{\substack{\text{Cauchy} \\ \text{global}}}{\Longrightarrow} 0 = \int_{\gamma^*} f(z)\,dz = \int_\gamma f - \sum\limits_{j=1}^{n} n_j \int_{\gamma_j} f$

$\iff \int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum\limits_{j=1}^{n} n\,(\gamma\,,\,a_j)\,Res\,(f\,,\,a_j)$.

Définition Soit a une singularité isolée de $f \in \mathcal{H}(D(a,r) \setminus \{a\})$. On dit que f a un <u>pôle</u> en a si $\lim\limits_{z\to a} f(z) = \infty$. Si a n'est ni une singularité artificielle, ni un pôle, alors on dit que a est une <u>singularité essentielle</u>.

- <u>*Exemple*</u> Soit $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, P et Q des polynômes premiers entre eux. Alors les pô les de f sont les racines de Q.

- <u>*Exemple*</u> $f(z) = \frac{e^z}{z}$, $\quad z = 0$ est un pô le.

- <u>*Exemple*</u> $f(z) = e^{1/z}$. Alors $z = 0$ est une singularité essentielle.

Soit $\Omega = D(a,r) \setminus \{a\}$. Supposons que a soit un pôle de $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ et que $f \neq 0$ dans Ω. Alors $\frac{1}{f} \in \mathcal{H}\,(\Omega)$ et a est une singularité artificielle de $\frac{1}{f}$ (Riemann). Notons que $\lim_{z\to a} \frac{1}{f(z)} = 0$.
Posons $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ si $z \in \Omega$ et $g(a) = 0$. Comme $g \in \mathcal{H}(D(a,r))$, on a:

$$g(z) = \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n \text{ pour } |z-a| < r.$$

En plus, il existe n_0 tel que $g(a) = \cdots = g^{(n_0-1)}(a) = 0$ et $g^{(n_0)}\,(a) \neq 0$. Notons que $g(z) = (z-a)^{n_0} G(z)$, où $G \in \mathcal{H}(D(a,r))$ et satisfait $G \neq 0$ dans $D(a,r)$.
On dit que a est un zéro d'ordre n_0 de g ou a est un pôle d'ordre n_0 de f. On appelle aussi n_0 la multiplicité du zéro ou du pôle.

Ainsi f a un pôle d'ordre n_0 en a si et seulement si $\lim_{z\to a} f(z)\,(z-a)^{n_0}$ existe et est différent de 0 ($n_0 \in \{1, 2, \cdots\}$).
En plus :

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)^{n_0}\,a_{n_0} + (z-a)^{n_0+1}\,a_{n_0+1} + \cdots} =$$

$$\frac{1}{(z-a)^{n_0}} \cdot \left[\frac{1}{a_{n_0}+h(z)}\right].$$

Notons que $a_{n_0}+h=G$, que h holomorphe dans $D\,(a,r)$ et que $h(a)=0$. En plus $\frac{1}{G} \in \mathcal{H}(D(a,r))$. Ainsi
$\dfrac{1}{G(z)} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n$, où $b_0 = \dfrac{1}{a_{n_0}}$. On obtient donc:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^{n-n_0} =$$

$$\underbrace{\frac{b_0}{(z-a)^{n_0}} + \frac{b_1}{(z-a)^{n_0-1}} + \cdots + \frac{b_{n_0-1}}{z-a}}_{\text{partie principale}} + b_{n_0} + \cdots .$$

Calcul des résidus $f(z) = \frac{a_{-n}}{(z-a)^n} + \cdots + \frac{a_{-2}}{(z-a)^2} + \frac{a_{-1}}{(z-a)^1} \Longrightarrow Res(f,a) = a_{-1}$,
car pour $j \neq 1$ la fonction rationnelle $\frac{a_{-j}}{(z-a)^j}$ admet une primitive dans $\mathbb{C} \setminus \{a\}$.

Proposition 3.2 *Si a est un pô le d'ordre N de f, on a*

$$Res\,(f,a) = \lim_{z\to a} \frac{d^{N-1}}{dz^{N-1}}\big((z-a)^N f(z)\big)\,\frac{1}{(N-1)!}$$

Démonstration Parce que a est un pôle d'ordre N, on a que $\lim_{z\to a}(z-a)^N f(z)$ existe et est différent de 0. Ainsi, d'après 2.18, il existe $H \in \mathcal{H}(D(a,r))$, $H(a) \neq 0$ tel que $H(z) = (z-a)^N H(z)$ pour $z \in D(a,r)$. Donc

$$f(z) = \frac{H(z)}{(z-a)^N} =$$

$$= \frac{H(a) + H'(a)(z-a) + \cdots + (z-a)^N\, H^{(N)}(a) \cdot \frac{1}{N!} + \cdots}{(z-a)^N} =$$

$$= \frac{H(a)}{(z-a)^N} + \frac{H'(a)}{(z-a)^{N+1}} + \cdots + \frac{H^{(N-1)}(a)}{(N-1)!\,(z-a)} + F(z),$$

où F est holomorphe dans $D(a,r)$

$\Rightarrow Res\,(f,a) = \frac{1}{(N-1)!}\, H^{(N-1)}(a)$.

Lemme 3.3 *Soit $f = \frac{g}{h}$ où $g,h \in \mathcal{H}\,(D\,(a,r))$. Supposons que $g(a) \neq 0$, $h(a) = 0$, $h'(a) \neq 0$. Alors a est un pôle simple de f et $Res(f,a) = \frac{g(a)}{h'(a)}$.*

Démonstration

$$(z-a)\,f(z) = \frac{g(z)}{\frac{h(z)-h(a)}{(z-a)}} \xrightarrow[z\to a]{} \frac{g(a)}{h'(a)}.$$

Appliquer maintenant la proposition 3.2 .

Lemme 3.4 :*résidu de la dérivée logarithmique d'une fonction méromorphe* Soit $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un domaine et f une fonction méromorphe dans Ω, c'est à dire, f est le quotient de deux fonctions holomorphes dans Ω, non identiquement nulles. Alors $\forall a \in \Omega$:
$Res\left(\frac{f'}{f}, a\right) = N$ si a est un zéro d'ordre N de f et $= -N$ si a est un pô le d'ordre N de f.
Démonstration
1) $f(z) = (z-a)^N g(z)$ où $g \in \mathcal{H}(D(a,r))$, $D(a,r) \subseteq \Omega$, $g \neq 0$ dans $D(a,r)$
$\Longrightarrow \frac{f'}{f} = \frac{N}{z-a} + \frac{g'}{g}$.
Soit γ le cercle de centre a et de rayon $\frac{r}{2}$. Alors d'après Cauchy
$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'}{f}\,dz = N\,n\underbrace{(\gamma, a)}_{=1} + \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{g'}{g}\,dz = N + 0.$

2) $f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^N}$ où $g \in \mathcal{H}(D(a,r))$, $D(a,r) \subseteq \Omega$, $g \neq 0$ dans $D(a,r)$
$\Longrightarrow \frac{f'}{f} = \frac{g'}{g} - \frac{N}{z-a}$
$\Longrightarrow \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'}{f}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{g'}{g}\,dz - \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{N}{z-a}\,dz = 0 - N$
Corollaire 3.5 *Soit $h \in \mathcal{H}(D(a,r))$, $f \in \mathcal{H}(D(a,r) \setminus \{a\})$. Supposons que a ne soit pas une singularité essentielle de f. Alors*

$$Res\left(h\frac{f'}{f}, a\right) = h(a)\,Res\left(\frac{f'}{f}, a\right).$$

Démonstration :
Ecrivons $f(z) = (z-a)^N g(z)$ où g est holomorphe dans $D(a,r)$ et satisfait $g(a) \neq 0$.
Notons que $N \in \mathbb{Z}$.
Supposons que $g \neq 0$ dans $D(a,\varepsilon)$, avec $0 < \varepsilon < r$. Alors

$$h\frac{f'}{f} = \frac{Nh}{z-a} + h\frac{g'}{g}.$$

Donc

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=\varepsilon} h\frac{f'}{f}\,dz = N\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=\varepsilon}\frac{h(z)}{z-a}\,dz + 0 =$$
$$= Nh(a) = h(a)\,Res(\frac{f'}{f}, a).$$

(Notons que $h\frac{g'}{g}$ est holomorphe dans $D(a,\varepsilon)$).

3.7.A Calcul d'intégrales impropres réelles

- <u>*Exemple 1*</u> Supposons que $R = \frac{P}{Q}$ soit une fonction rationnelle, continue sur $\mathbb{R}$ telle que $\deg Q \geq \deg P + 2$. Alors

(1) $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,dx = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im} z > 0} Res(R, z).$

- <u>*Exemple 2*</u> Supposons que $R = \frac{P}{Q}$ soit une fonction rationnelle, continue sur $\mathbb{R}$ telle que $\deg Q \geq \deg P + 1$. Alors

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\, e^{imx} dx = 2\pi i \sum\limits_{\mathrm{Im}\xi > 0} Res(R(z) e^{imz}, \xi)$.

Démonstration (2) Comme $\deg Q \geq \deg P + 1$, on voit que $zR(z)$ est bornée pour $|z| \geq \rho_0$. Donc $|R(z)| \leq C/|z|$ pour $|z| \geq \rho_0$. En particulier il n'y a plus de pôles dans $|z| \geq \rho_0$.
Pour $\rho \geq \rho_0$, soit $\Gamma = \Gamma(\rho)$ la frontière du demi-disque $|z| = \rho$, $\mathrm{Im}\, z \geq 0$, parcourue dans le sens positif.
Soit $\rho \geq \rho_0$. Alors, d'après le théorème des résidus on a:

$$\int_\Gamma R(z) e^{imz} dz = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}\,\xi > 0} Res(R(z) e^{imz}, \xi).$$

Soit Γ_1 le demi-cercle $\rho e^{it} : 0 \leq t \leq \pi$, et Γ_2 le segment $[-\rho, \rho]$. Alors $\int_\Gamma = \int_{\Gamma_1} + \int_{\Gamma_2}$.
(1) $\int_{\Gamma_2} R(z) e^{imz} dz = \int_{-\rho}^{\rho} R(t) e^{imt} dt$.
(2) On utilisant l'inégalité

$$0 \leq \frac{2}{\pi} t \leq \sin t \leq t \leq \frac{\pi}{2},$$

on obtient pour $z(t) = \rho e^{it}$
$\left| \int_{\Gamma_1} R(z) e^{imz} dz \right| \leq \int_{\Gamma_1} |R(z)|\, e^{\mathrm{Re}(imz)}\, |dz| \leq \int_{\Gamma_1} \frac{C}{|z|} e^{-m\mathrm{Im} z}\, |dz|$
$= \frac{C}{\rho} \int_0^\pi e^{-m\rho \sin t} \rho dt = 2C \int_0^{\pi/2} e^{-m\rho \sin t} dt \leq 2C \int_0^{\pi/2} e^{-m\rho \frac{2}{\pi} t} dt =$
$= 2C \frac{-\pi}{2m\rho} \left[e^{-m\rho \frac{2}{\pi} t} \right] \Big|_0^{\pi/2} \leq \frac{C\pi}{m\rho} \to 0$ si $\rho \to \infty$.
Donc $\lim\limits_{\rho \to \infty} \int_{-\rho}^{\rho} R(t) e^{imt} dt$ existe et coincide avec
$2\pi i \sum\limits_{\mathrm{Im}\,\xi > 0} Res\big(R(z) e^{imz}, \xi\big)$.

- <u>*Exemple 3*</u> Supposons que $R = \frac{P}{Q}$ soit une fonction rationnelle, continue sur $]0, \infty[$ telle que $\deg Q \geq \deg P + 2$ et que R ait au plus un pôle simple en 0.
Soit $0 < \alpha < 1$ et

$$z^\alpha = (re^{i\varphi})^\alpha = r^\alpha e^{i\alpha\varphi} \qquad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Alors

$$\int_0^\infty x^\alpha\, R(x)\, dx = -\frac{\pi\, e^{-i\pi\alpha}}{\sin \pi\alpha} \sum_{\xi \neq 0} Res\,(z^\alpha\, R(z)\,,\, \xi).$$

Démonstration Soit $f(z) = z^\alpha R(z)$. Alors f est une fonction méromorphe dans $\Omega = \mathbb{C} \setminus [0, +\infty[$. Notons que chaque cycle dans Ω est homologue à zéro, car Ω est un domaine étoilé. Donc on peut appliquer le théorème du résidu à la courbe $\Gamma = \Gamma_{\varepsilon,r,R}$, étant définie comme la frontière du domaine $\{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R,\ \varepsilon < \arg z < 2\pi - \varepsilon\}$. Ici les paramètres $0 < \varepsilon < \pi/4,\ 0 < r < R$ sont choisis de telle façon que tous les pôles de f dans Ω soient contournés une fois dans le sens positif par Γ (voir fig).

Ainsi $\int_\Gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{\xi \neq 0} Res(f, \xi)$.
I. $z = te^{i\varepsilon},\ r \leq t \leq R$:

$$\int_I f(z)dz = \int_r^R t^\alpha e^{i\alpha\varepsilon} R(te^{i\varepsilon}) e^{i\varepsilon}\, dt \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} \int_r^R t^\alpha R(t)\, dt.$$

III. $z = te^{(2\pi - \varepsilon)i},\ r \leq t \leq R$ orienté négativement:

$$\int_{III} f(z)dz = -\int_r^R t^\alpha e^{(2\pi-\varepsilon)\alpha i} R(te^{(2\pi-\varepsilon)i}) e^{(2\pi-\varepsilon)i}\, dt$$

$$\underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} -e^{2\pi\alpha i} \int_r^R t^\alpha R(t)\, dt.$$

II. Notons que l'hypothèse sur le degré nous donne: $|R(z)| \leq \dfrac{C}{|z|^2}$ pour $|z| = R \geq R_0$. Ainsi
$\left|\int_{II} f(z)dz\right| \leq 2\pi R\ \max_{|z|=R} |z|^\alpha |R(z)| \leq 2\pi R \cdot R^\alpha \frac{C}{R^2} = \frac{2\pi C}{R^{1-\alpha}} \underset{R \to \infty}{\longrightarrow} 0.$
IV. Parce que $R(z)$ a en plus un pôle simple à l'origine, il existe $r_0 > 0$ et $C > 0$ tel que $|R(z)| \leq C/|z|$ pour $|z| < r_0$. D'où

$$\left|\int_{IV} f(z)dz\right| \leq 2\pi r \max_{|z|=r} |z|^\alpha |R(z)| \leq 2\pi C r^\alpha \underset{r \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

De

$$\int_I + \underbrace{\int_{II}}_{\to 0} + \int_{III} + \underbrace{\int_{IV}}_{\to 0} = 2\pi i \sum_{\xi \neq 0} Res(f, \xi)$$

pour $r \to 0$, $R \to +\infty$ et $\varepsilon \to 0$, on déduit

$$(1 - e^{2\pi\alpha i}) \int_0^\infty x^\alpha R(x)dx = 2\pi i \sum_{\xi \neq 0} Res(z^\alpha R(z), \xi).$$

L'égalité

$$\frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi\alpha i}} = \frac{2\pi i e^{-\pi\alpha i}}{e^{-\pi\alpha i} - e^{\pi\alpha i}} = -\frac{\pi e^{-\pi\alpha i}}{\sin(\alpha\pi)}$$

nous donne finalement l'assertion.

- _Exemple 4_

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{1 + x^2}\, dx = \frac{\pi}{2\cos\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right)}, \quad 0 < \alpha < 1$$

- <u>*Exemple 5*</u> R rationnelle (2 variables)

$$I = \int_0^{2\pi} R(\cos\theta\,,\,\sin\theta)\,d\theta$$

Posons $\cos\theta = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ $\sin\theta = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)$.
Alors

$$I = \int_{|z|=1} R_1(z)\,dz = 2\pi i \sum_{|z|<1} Res(R_1, z),$$

où R_1 est la fonction rationnelle $R_1(z) = \dfrac{1}{iz} R\left(\dfrac{z+\frac{1}{z}}{2}, \dfrac{z-\frac{1}{z}}{2i}\right)$.

3.8 Singularitées isolées

Rappel. Soit $f \in \mathcal{H}(D(a,r) \setminus \{a\})$; c'est à dire a est une singularitée isolée de f.

· a est une singularité artificielle $\Longleftrightarrow \lim\limits_{z\to a} f(z)$ existe

· a est un pô le $\Longleftrightarrow \lim\limits_{z\to a} f(z) = +\infty$

· a est une singularité essentielle si a n'est ni artificielle, ni un pôle

<u>**3.6 Théorème de Casorati-Weierstrass**</u>

Soit $\Omega_r = D(a,r) \setminus \{a\}$ et $f \in \mathcal{H}(\Omega_r)$. Les assertions suivantes sont équivalentes:

(1) a est une singularité essentielle de f,
(2) $f(\Omega_\varepsilon)$ est dense dans $\mathbb{C}$ $\forall\, 0 < \varepsilon \le r$.

Démonstration

Remarquons que l'assertion (2) est équivalente à : $\forall\, w \in \mathbb{C}\ \exists\, z_n \to a$ tel que $f(z_n) \to w$

(2) $\Longrightarrow$ (1) clair.

(1) $\Longrightarrow$ (2): Supposons que (2) soit fausse, c'est à dire $\exists\, \varepsilon > 0\,,\ S = \overline{f(\Omega_\varepsilon)} \subset \mathbb{C}$. D'où $\mathbb{C} \setminus S$ est un ouvert non vide. Ainsi $\exists\, \delta > 0\,,\ \exists\, w \in \mathbb{C}$ tel que

$$\forall\, z \in D(a,\varepsilon) \setminus \{a\} : \quad |f(z) - w| > \delta$$

On pose

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - w} \quad \text{où} \quad z \in \Omega_\varepsilon = D(a,\varepsilon) \setminus \{a\}.$$

Evidemment, a est une singularité isolée de g.
Comme $|g| \le \frac{1}{\delta}$ dans Ω_ε, par Riemann on en déduit que a est une singularité artificielle; donc g admet un prolongement holomorphe dans $\Omega_\varepsilon \cup \{a\} = D(a,\varepsilon)$, que l'on note aussi par g.

- <u>1er cas</u> : $g(a) \neq 0$

$g(a) \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{g(z)} = f(z) - w$ est borné dans $D(a,\varepsilon') \setminus \{a\}$, où $0 < \varepsilon' < \varepsilon$

$\overset{\text{Riemann}}{\Longrightarrow}$ f a une singularité artificielle en a.

- <u>2ème cas</u> : $g(a) = 0$

Soit m l'ordre de la racine a de g. Donc $g(z) = (z-a)^m h(z)$ où $h(a) \neq 0$, $h \in \mathcal{H}(D(a,\varepsilon))$. Ainsi, a est un pôle d'ordre m de $\frac{1}{g}$. Comme $\frac{1}{g} = f - w$ dans Ω_ε, on conclut que f a un pô le d'ordre m en a.

3.9 Séries de Laurent

Définition Soit $L(z) = \overset{+\infty}{\underset{-\infty}{\Sigma}} a_n (z-z_0)^n =$
$= \overset{-1}{\underset{-\infty}{\Sigma}} a_n (z-z_0)^n + \overset{+\infty}{\underset{0}{\Sigma}} a_n (z-z_0)^n =$
$= \overset{\infty}{\underset{k=1}{\Sigma}} a_{-k} \frac{1}{(z-z_0)^k} + \overset{\infty}{\underset{n=0}{\Sigma}} a_n (z-z_0)^n$.
L est une série de Laurent de terme principal
$\overset{-1}{\underset{-\infty}{\Sigma}} a_n (z-z_0)^n$.

Remarque Soit R_+ le rayon de convergence de
$\overset{+\infty}{\underset{0}{\Sigma}} a_k (z-z_0)^k$ et R_- celui de $\overset{+\infty}{\underset{k=1}{\Sigma}} a_{-k} w^k$. Alors la série de Laurent converge pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que :
$|z-z_0| < R_+$ et $|z-z_0| > \frac{1}{R_-}$.
Ceci étant équivalent à $\frac{1}{R_-} < |z-z_0| < R_+$, on voit qu'une condition nécessaire et suffisante pour la convergence d'une série de Laurent est que $\frac{1}{R_-} < R_+$.
La convergence est uniforme dans chaque partie compacte de la couronne
$A = \left\{ z \in \mathbb{C} : \frac{1}{R_-} < |z-z_0| < R_+ \right\}$,
et absolue dans toute la couronne A. Notons aussi que $R_-, R_+ \in [0, \infty]$.

3.7 Théorème de Laurent
Soit f une fonction holomorphe dans $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : r < |z-z_0| < R\}$, où $0 \leq r < R \leq \infty$. Alors f est développable en série de Laurent dans Ω; c'est à dire il existe $a_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$, tel que la série $\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$ converge $\forall\, z \in \Omega$ vers $f(z)$.

Les a_n sont déterminés de façon unique. De plus on a

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi - z_0| = \rho} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}\, d\xi \quad \text{où} \quad r < \rho < R\,.$$

Démonstration
Soient $r < \rho_1 < \rho_2 < R$ et Γ_j le cercle centré en z_0 de rayon ρ_j parcouru une fois dans le sens positif.
Posons $\Gamma = \Gamma_2 - \Gamma_1$. Alors Γ est un cycle homologue à 0 dans Ω, i.e, $\Gamma \underset{\Omega}{\sim} 0$.
D'après le théorème de Cauchy global :
$n(\Gamma, z) f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} dz \ \ \forall z \in \Omega \setminus \Gamma$.

Soit $\rho_1 < |z - z_0| < \rho_2 \Rightarrow n(\Gamma, z) = 1$.
D'où :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\left[\int_{\Gamma_2} - \int_{\Gamma_1}\right] \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi = f_2(z) - f_1(z)$$

où
$\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi$ définit une fonction $f_2 \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \Gamma_2)$, en particulier $f_2 \in \mathcal{H}(D(z_0, \rho_2))$,
et
$\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi$ définit une fonction $f_1 \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \Gamma_1)$, en particulier
$f_1 \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus D(z_0, \rho_1))$.
(1) f_2 est développable en série entière en z_0, c'est à dire $\forall z \in D(z_0, \rho_2)$ et $\rho_1 < \rho < \rho_2$ on a:

$$f_2(z) = \sum_0^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{où} \quad a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi - z_0| = \rho} \frac{f_2(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}\, d\xi.$$

(2) on pose $w = \frac{1}{z - z_0}$, $|w| < \frac{1}{\rho_1}$
$\widetilde{f_1} : |w| < \frac{1}{\rho_1}\} \to \mathbb{C}0 \neq w \mapsto \widetilde{f_1}(w) = f_1\left(z_0 + \frac{1}{w}\right)$
$\widetilde{f_1}$ est bien définie car $|z_0 + \frac{1}{w} - z_0| = \left|\frac{1}{w}\right| > \rho_1$.
De plus $\lim\limits_{w \to 0} \widetilde{f_1}(w) = \lim\limits_{z \to +\infty} f_1(z) = 0$.
D'après Riemann $\widetilde{f_1}$ admet un prolongement holomorphe en 0 noté aussi par $\widetilde{f_1}$, i.e. $\widetilde{f_1} \in \mathcal{H}\left(D(0, \frac{1}{\rho_1})\right)$.
Soit $\widetilde{f_1}(w) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n w^n$, où $|w| < \frac{1}{\rho_1}$. Notons que $b_0 = 0$ et que pour $|z - z_0| > \rho_1$ on a $f_1(z) = \widetilde{f_1}\left(\dfrac{1}{z - z_0}\right)$.
De (1) et (2) on obtient:

$$\rho_1 < |z - z_0| < \rho_2 \Longrightarrow f(z) = \sum_0^{+\infty} a_n (z - z_0)^n - \sum_1^{+\infty} b_n \left(\frac{1}{z - z_0}\right)^n$$

- Unicité des coefficients a_n
Posons $a_{-n} = -b_n$ si $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n \qquad \rho_1 < |z - z_0| < \rho_2.$$

En plus,

$$\frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{k+1}} = \frac{a_k}{\xi - z_0} + \underbrace{\sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq k}}^{+\infty} a_n (\xi - z_0)^{n-k-1}}_{\text{admet une primitive dans } \rho_1 < |\xi - z_0| < \rho_2}$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi-z_0|=\rho}\frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{k+1}}\,d\xi = a_k + 0 \qquad \forall\, k\in\mathbb{Z} \text{ et } \rho_1<\rho<\rho_2.$$

Comme pour tout $\rho_1 < \rho < \rho_2$ les cercles $\{z_0+\rho e^{it} : 0\le t\le 2\pi\}$ sont homologues dans Ω, le théorème de Cauchy global implique qu'ainsi les coefficients a_k ne dépendent pas de ρ resp. ρ_1 et ρ_2. En faisant tendre $\rho_1\to r$ et $\rho_2\to R$, on voit que $f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ converge pour tout z tel que $r<|z-z_0|<R$.

Théorème 3.8 Soit f holomorphe dans $\Omega = D(z_0,\varepsilon)\setminus\{z_0\}$.
Alors dans Ω , f est développable en série de Laurent $\overset{+\infty}{\underset{-\infty}{\Sigma}} a_k(z-z_0)^k$ et la partie principale converge $\forall\, z\neq z_0$. On a
(1) z_0 est une singularité isolée artificielle $\Longleftrightarrow a_k = 0 \quad \forall\, k<0$
(2) z_0 est un pôle d'ordre $m \Longleftrightarrow a_k=0 \quad \forall\, k<-m$
(3) z_0 est une singularité essentielle $\Longleftrightarrow$ il existe une infinité d'indices négatifs k, tel que $a_k\neq 0$.

Démonstration
Pour montrer (1) et (2), utiliser le fait que z_0 est une singularité artificielle ($m=0$), resp. un pôle d'ordre plus petit ou égal à m , $(m=1,2,\cdots)$ de f, si et seulement si $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^m f(z)$ existe.

Exemples • Soit $f(z) = \dfrac{-z}{(z-1)(z-2)}$ et $\Omega=\{z\in\mathbb{C} : 1<|z|<2\}$. Alors

$$f(z) = \frac{1}{z-1} - \frac{2}{z-2} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} + \frac{1}{1-\frac{z}{2}} =$$

$$= \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n = \cdots\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}+1+\frac{1}{2}z+\frac{1}{4}z^2+\cdots$$

• $g(z) = \exp(\frac{1}{z})$, $\quad \Omega = \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Alors

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{z}\right)^n = 1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2}\frac{1}{z^2}+\frac{1}{6}\frac{1}{z^3}+\cdots$$

Proposition 3.9 *Soit $\Omega = D(z_0,r)\setminus\{z_0\}$, $f\in\mathcal{H}(\Omega)$ et*

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

la série de Laurent de f dans Ω. Alors $Res(f,z_0) = a_{-1}$.

Démonstration Ecrivons

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z-z_0} + \underbrace{\sum_{\substack{-\infty\\ n\neq -1}}^{\infty} a_n(z-z_0)^n}_{=g(z)}.$$

Parce que g admet une primitive dans Ω, on obtient pour $0 < \rho < r$ que $Res(f, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi - z_0| = \rho} f(\xi)\, d\xi = a_{-1}$.

3.10 Zéros de fonctions holomorphes

dénombrement des pôles et des zéros

Définition Soit $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$ un domaine borné et soit Γ un cycle dans $\mathbb{C}$.
On dit que $\mathcal{U}$ est bordé par Γ si :
(i) $\partial \mathcal{U} = \Gamma$
(ii) $n(\Gamma\,,\, a) = 1$ si $a \in \mathcal{U}$ et 0 si $a \in \mathbb{C} \setminus (\Gamma \cup \mathcal{U})$

- *Exemple* $\mathcal{U} = \mathbb{D}$; $\mathbb{D} \setminus \{0\}$; $\{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Re}\, z| < \frac{\pi}{2}\,,\, |\mathrm{Im}\, z| < \frac{\pi}{2}\}$;
$\{z \in \mathbb{C} : 0 < R_1 < |z - z_0| < R_2\}$.

Théorème 3.10 *Soit $D \subseteq \mathbb{C}$ un domaine et f méromorphe dans D. Soit A la réunion des pôles et des zéros de f. Supposons que $\mathcal{U}$ soit un domaine de $\mathbb{C}$ et Γ un cycle dans $D \setminus A$ tel que :*
i) $\overline{\mathcal{U}} \subseteq D$
ii) $\mathcal{U}$ *est bordé par* Γ.
Alors
(1) le nombre de pô les (P) (resp. de zéros (N)) (multiplicité incluse) dans $\mathcal{U}$ est fini.
(2) $N - P = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_\Gamma \frac{f'}{f}\, dz = n(f \circ \Gamma\,,\, 0)$.

Démonstration
(1) Notons d'abord que A est discret dans D et que A est dénombrable, car les zéros et pôles d'une fonction méromorphe sont isolés, i.e. n'ont pas de point d'accumulation dans D.
Comme $\overline{\mathcal{U}}$ est compact et $\overline{\mathcal{U}} \subset D$, on en déduit qu'il n'existe qu'un nombre fini d'éléments de A dans $\mathcal{U}$ (même comptés avec leurs multiplicités)

(2) On voit que $\Gamma \underset{D}{\sim} 0$. En effet, soit $a \in \mathbb{C} \setminus D \underset{(i)}{\Longrightarrow} a \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathcal{U}} \overset{(ii)}{\Longrightarrow} n(\Gamma, a) = 0$.

Soit $a \in \mathcal{U} \overset{(ii)}{\Longrightarrow} n(\Gamma, a) = 1$

Comme $Res(\frac{f'}{f}, a) = 0$ si $a \notin A$, on a d'après le théorème des résidus :
$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f'}{f}\, dz = \sum_{a \in A \cap \mathcal{U}} Res\left(\frac{f'}{f}\,,\, a\right) \underset{3.4}{=} \sum_{\substack{f(a)=0 \\ a \in A \cap \mathcal{U}}} m(f, a) - \sum_{\substack{a \text{pô le} \\ a \in \mathcal{U} \cap A}} \mathrm{ord}(f, a) = N - P$,

où $m(f, a)$ est la multiplicité du zéro a de f et $\mathrm{ord}(f, a)$ est l'ordre du pôle a de f.
D'autre part, si γ est une courbe fermée dans $D \setminus A$ paramétrée par $z(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, on obtient:
$\int_\gamma \frac{f'}{f}\, dz = \int_\alpha^\beta \frac{f'(z(t))}{f(z(t))} z'(t)\, dt \underset{f \text{ hol.}}{=} \int_\alpha^\beta \frac{(f \circ z)'(t)}{(f \circ z)(t)}\, dt = \int_\alpha^\beta \frac{w'(t)}{w(t)}\, dt = \int_{f \circ \gamma} \frac{1}{w}\, dw = 2\pi i\, n(f \circ \gamma\,,\, 0)$.
De même pour des cycles.

3.11 Théorème de Rouché

Soit $D \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert et $K \subseteq D$ une partie compacte. Soient $f, g \in H(D)$. Supposons que $|f+g| < |f|+|g|$ sur ∂K. Alors f et g ont le même nombre de zéros dans K (resp. K^0) (multiplicité incluse).

Dém. Notons d'abord que $|f+g| < |f|+|g|$ sur ∂K implique que f et g n'ont pas de zéros sur ∂K. Dû à la continuité, il existe un voisinage U de ∂K tel que $|f+g| < |f|+|g|$ sur U. Soit $\Omega = K \cup U$. Alors Ω est un ouvert. D'après 6.1 il existe dans $\Omega \setminus K$ un cycle Γ tel que :

- 0) $n(\Gamma, z) \in \{0, 1\}$ $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$,
- 1) $n(\Gamma, z) = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \Omega \quad (\Gamma \underset{\Omega}{\sim} 0)$
- 2) $n(\Gamma, z) = 1 \quad \forall z \in K$.

Soit $V = \{z \in \Omega \setminus \Gamma : n(\Gamma, z) = 1\}$. Alors V est un ouvert bordé par Γ et $\overline{V} \subseteq \Omega$. Notons que $\Gamma \subseteq U$. Donc $|f+g| < |f|+|g|$ sur Γ. Il reste à montrer que que f et g ont le même nombre de zéros dans V. Une fois ceci fait, on utilise que $V \setminus K \subseteq U$, que $|f+g| < |f|+|g|$ sur U et que f et g n'ont pas de zéros dans $V \setminus K$. Ainsi le nombre de zéros de f et de g coincident dans K^0 (resp. K).
A démontrer encore: Soient D et V des domaines, f, g holomorphes dans D et soit Γ un cycle dans D tel que :

- *(1)* $\quad \overline{V} \subseteq D$
- *(2)* $\quad V$ *est bordé par* Γ
- *(3)* $\quad |f(z)+g(z)| < |f(z)|+|g(z)| \quad \forall z \in \Gamma = \partial V$.

Alors f et g ont dans V le même nombre des zéros, comptés avec leurs multiplicités.

Démonstration

Notons d'abord que (3) implique que f et g n'ont pas de zéros sur ∂V. Soit $N(f)$ (resp. $N(g)$), le nombre de zéros de f (resp. g) dans V, multiplicités incluses.
Parce que ∂V est compact, f et g continues, il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de ∂V, $\mathcal{U} \subset D$, tel que $f \neq 0$ et $g \neq 0$ sur $\mathcal{U}$.
Posons $h = \frac{f}{g}$. Alors $h \in \mathcal{H}(\mathcal{U})$ et $h \neq 0$ dans $\mathcal{U}$. En vertu de (3) on obtient:
$|h+1| < |h|+1$ sur $\partial V \Rightarrow \frac{|h+1|}{|h|+1} < 1$ sur ∂V. Comme h est continue et ∂V compact, on a:

$$\frac{|h+1|}{|h|+1} \leq 1 - \varepsilon < 1 \quad \text{sur} \quad \partial V$$

$\Rightarrow \quad \exists \mathcal{U}'$ ouvert tel que $\partial V \subseteq \mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$ et $\frac{|h+1|}{1+|h|} \leq 1 - \frac{\varepsilon}{2} < 1$ sur $\mathcal{U}'$
$\Rightarrow \quad h(\mathcal{U}') \cap [0, +\infty[= \emptyset$.

On va montrer que $\frac{h'}{h}$ a une primitive sur $\mathcal{U}'$.
Considérons $\frac{1}{z}$ définie sur $\mathbb{C} \setminus [0, \infty[= \Omega$.
Ω est étoilée $\underset{2.19}{\Rightarrow}$ $n(\gamma, a) = 0 \quad \forall \gamma \subseteq \Omega$, γ cycle et $\forall a \in [0, +\infty[$. En particulier, $\int_\gamma \frac{1}{z}\, dz = 0$. Ainsi, d'après le théorème 2.3, $\frac{1}{z}$ admet une primitive L sur Ω. Notons pour la suite, que $h(\mathcal{U}') \subseteq \Omega$. Ainsi $L \circ h$ est bien définie sur $\mathcal{U}'$.
En plus

$$(L \circ h)' = (L' \circ h)\, h' = \frac{h'}{h} \quad \text{sur} \quad \mathcal{U}'.$$

Comme $\Gamma \subseteq \mathcal{U}'$, on obtient
$\int_\Gamma \frac{h'}{h}\, dz = \sum_{j=1}^n \int_{\gamma_j} \frac{h'}{h} dz \underset{2.3}{=} 0$ car $\frac{h'}{h}$ a la primitive $L \circ h$ sur $\mathcal{U}'$.
D'autre part :

$$0 = \int_\Gamma \frac{h'}{h} = \int_\Gamma \frac{f'}{f} - \int_\Gamma \frac{g'}{g} \underset{3.10}{\Longrightarrow} N(f) - N(g) = 0$$

$\Rightarrow N(f) = N(g)$ (multiplicité incluse)

3.11 Domaines de Cauchy

Définition On appelle domaine de Cauchy tout domaine D dans $\mathbb{C}$ tel que le théorème de Cauchy soit vrai; c'est à dire

$$\forall\, \Gamma \subseteq D\,,\ \Gamma \text{ cycle},\ \forall\, f \in \mathcal{H}\,(D) \text{ on a: } \int_\Gamma f(z)\, dz = 0.$$

3.12 Théorème Soit $D \subset \mathbb{C}$ un domaine. Alors on a les équivalences suivantes :

- 1) $n(\Gamma, a) = 0 \quad \forall\, a \in \mathbb{C} \setminus D$ et tout cycle Γ dans D; i.e. $\Gamma \underset{D}{\sim} 0$,
- 2) D est un domaine de Cauchy,
- 3) chaque $f \in \mathcal{H}(D)$ possède une primitive F dans D,
- 4) chaque $f \in \mathcal{H}(D)$ avec $Z(f) = \emptyset$ admet un logarithme holomorphe, i.e. $\exists\, F \in \mathcal{H}\,(D)\ \ tq\ \ e^F = f$,
- 5) chaque $f \in \mathcal{H}(D)$ avec $Z(f) = \emptyset$ admet une racine carrée holomorphe dans D, i.e. $\exists\, G \in \mathcal{H}\,(D)\ \ tq\ \ G^2 = f$.

Démonstration

(1) $\Longrightarrow$ (2)

On utilise le théorème de Cauchy global.

(2) $\Longrightarrow$ (3) C'est une des assertions du Théorème 2.3.

(3) $\Longrightarrow$ (4)

$$Z(f) = \emptyset \Rightarrow \frac{f'}{f} \in \mathcal{H}(D).$$

Par hypothèse, $\frac{f'}{f}$ admet une primitive dans D, i.e.

$\exists\, F \in \mathcal{H}\,(D)$ tel que $F' = \frac{f'}{f}$.

Considérons $H = f\, e^{-F} \Rightarrow H' = f'\, e^{-F} - f e^{-F}\, F' \equiv 0$ sur D.
C'est à dire $H \equiv$ const. $= C \neq 0$. Ainsi $C = e^a$ où $a \in \mathbb{C}$. D'où

$$f = e^F\, e^a = e^{a+F} = e^{\widetilde{F}} \quad \text{où} \quad \widetilde{F} \in \mathcal{H}(D).$$

(4) $\Longrightarrow$ (5)

Soit $f = e^F$, $F \in \mathcal{H}(D)$
Posons $G = e^{F/2}$

$\Rightarrow\; G \in \mathcal{H}(D)$ et $G^2 = e^F = f$.

(5) $\Longrightarrow$ (1)

Par l'absurde.
Supposons qu'il existe un cycle Γ dans D tel que $\Gamma \underset{D}{\not\sim} 0$.
C'est à dire $\exists\, \Gamma \subseteq D\,,\, \exists\, a \in \mathbb{C} \setminus D \;\; tq \;\; \int_\Gamma \frac{1}{z-a}\, dz \neq 0$.
Considérons la fonction $f(z) = z - a \Rightarrow Z_D(f) = \emptyset$

$\underset{(5)}{\Longrightarrow}\; \exists\, f_1 \in \mathcal{H}(D)$ tel que $f_1^2 = f$ avec $Z_D(f_1) = \emptyset$

$\underset{(5)}{\Longrightarrow}\; \exists\, f_2 \in \mathcal{H}(D)$ tel que $f_2^2 = f_1 \Rightarrow f_2^{2^2} = f,\; Z_D(f_2) = \emptyset$

$\cdots\cdots$

$\Longrightarrow \exists\, f_n \in \mathcal{H}\,(D) \;\; tq \;\; f_n^2 = f_{n-1} \Rightarrow f_n^{2^n} = f\,,\, Z_D(f_n) = \emptyset$.

Comme $f(z) = z - a$ on a

$$\frac{1}{z-a} = \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{2 f_1 f_1'}{f_1^2} = 2\,\frac{f_1'}{f_1} = 2\left(2\,\frac{f_2'}{f_2}\right) = \cdots = 2^n \frac{f_n'}{f_n};$$

d'où $0 \neq \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{z-a}\, dz}_{\substack{=N\in\mathbb{Z} \\ \text{indépendant de } n}} = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma 2^n \frac{f_n'}{f_n}\, dz = 2^n\, \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f_n'}{f_n}\, dz}_{=N_n} = 2^n\, N_n = N \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*$

Ainsi $N_n \to 0$. Parce que $N_n \in \mathbb{Z}$ (voir dém. de 3.10), on obtient $N_n = 0\; \forall\, n \geq n_0$.
Contradiction.

3.13 Corollaire *Soit D un domaine de Cauchy tel que $0 \notin D$. Alors il existe dans D une détermination holomorphe du logarithme, c'est à dire*

$$\exists\, F \in \mathcal{H}\,(D) \;\; \text{tq} \;\; e^{F(z)} = z \quad \forall\, z \in D.$$

F est unique si on fixe la valeur de F en un point $z_0 \in D$. En plus, F est une primitive de $\frac{1}{z}$ dans D.

Démonstration

Utiliser 3.12 (2) $\Longleftrightarrow$ (4). La deuxième assertion est claire si on remarque que pour $k \in \mathbb{Z}$ on a $e^{F+2k\pi i} = e^F$. Finalement $1 \equiv (e^F)' = F'\, e^F = F'\, z \Rightarrow F' = \frac{1}{z}$.
- <u>*Exemple*</u> $D = \mathbb{C} \setminus]-\infty\,,\,0]$

$L(z)$ est une (la) détermination principale du log de z sur D si $L \in \mathcal{H}(D)$ satisfait: $\exp L(z) = z$, et $L(1) = 0$. Notons que si $z = x > 0$ alors $L(x) = \log x\ (= \ln x)$ est une extension du logarithme népérien réel.
On a: $L(z) = \log|z| + i \arg z$ pour $-\pi < \arg z < \pi$.

Remarque • On peut ainsi définir pour chaque domaine de Cauchy D tel que $0 \notin D$ une fonction z^α $(\alpha \in \mathbb{C})$ par la formule suivante :

$z^\alpha = e^{\alpha L(z)}$ où L est une détermination holomorphe du log de z dans D.

• Il n'existe pas de détermination holomorphe du log de z dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.
En effet si on avait $L \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ tel que $e^{L(z)} = z$, alors $L'(z) = \frac{1}{z}$; d'où $\int_\Gamma \frac{1}{z}\, dz = 0$ pour tout cycle fermé Γ dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Mais ceci n'est pas vrai si Γ est, p.ex. le cercle unité.

3.12 Représentations de Poisson-Herglotz

1 - Représentation de Poisson d'une fonction holomorphe

Proposition A Soit $f : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}$ continue, holomorphe dans $\mathbb{D}$. Alors $\forall\, z \in \mathbb{D}$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P\,(z,t)\, f\,(e^{it})\, dt$$

où $P(z,t) = \operatorname{Re}\left(\dfrac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\right) = \dfrac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2} = \dfrac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta - t)}$, avec $z = re^{i\theta}$.

Démonstration

- <u>1er cas</u> : f est holomorphe dans un voisinage de $\overline{\mathbb{D}}$.
Par Cauchy, $\forall\, z \in \mathbb{D}$, on a :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \mathbb{D}} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi$$

$$\xi = e^{it}\ ,\ d\xi = ie^{it}\, dt = i\,\xi\, dt$$

D'où :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, \frac{\overline{\xi}}{\overline{\xi}}\, i\,\xi\, dt \tag{3.1}$$

$$\underset{|\xi|=1}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(\xi)}{1-\overline{\xi}\, z}\, dt. \tag{3.2}$$

Posons $g(w) = \frac{f(w)}{1-\bar{z}\,w} \Longrightarrow g$ est holomorphe dans un voisinage de $\overline{\mathbb{D}}$.

$$\overset{(1)}{\Longrightarrow} g(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{g(\xi)}{1-\overline{\xi}\, z}\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\frac{f(\xi)}{1-\overline{z}\,\xi}}{1-\overline{\xi}\, z}\, dt \tag{3.3}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(\xi)}{|1-\overline{\xi}\, z|^2}\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(e^{it})}{|1-e^{-it}\, z|^2}\, dt. \tag{3.4}$$

Donc $f(z) = (1-|z|^2)g(z) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2}\, f(e^{it})\, dt$.

\- <u>2ème cas</u> : Considérons $f_r(z) = f\,(r\,z)$, $z \in \overline{\mathbb{D}}$, $0 < r < 1$ (dilatation de f). f_r est holomorphe dans un voisinage de $\overline{\mathbb{D}}$. Notons aussi que f_r tend uniformément sur $\overline{\mathbb{D}}$ vers f. D'après le cas (1) :

$$f_r(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(z,t)\, f_r\,(e^{it})\, dt \tag{3.5}$$

$$\downarrow {\scriptstyle r\to 1} \tag{3.6}$$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(z,t)\, f\,(e^{it})\, dt. \tag{3.7}$$

2 - Représentation de Schwarz

Proposition B Soit $f : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}$ continue, holomorphe dans $\mathbb{D}$. Alors

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\, \mathrm{Re}\, f\,(e^{it})\, dt + i\mathrm{Im}\, f(0).$$

Démonstration

Soit $h(z) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\, Re\, f\,(e^{it})\, dt \quad (z \in \mathbb{D})$.

$\Rightarrow$ R est holomorphe dans $\mathbb{D}$ et :

$$\mathrm{Re}\, h(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{Re}\, \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\, \mathrm{Re}\, f(e^{it})\, dt$$

$$= \mathrm{Re}\, \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(z\,,\,t)\;\, f(e^{it})\, dt \mathrm{Re}\, f(z).$$

$\Rightarrow$ $\mathrm{Re}\,(h-f) \equiv 0$ dans $\mathbb{D}$.

Par le théorème de l'image ouverte (ou exo) : $f - h = \text{const} = i\,C$, où $C \in \mathbb{R}$.

Calculons C :

$$f(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 1 \cdot \mathrm{Re}\, f(e^{it})\, dt + i\,C = \mathrm{Re}\int_0^{2\pi} f(e^{it})\frac{1}{2\pi}\, dt + i\,C \tag{3.8}$$

$$\overset{\text{Prop. B}}{=} \mathrm{Re}\, f(0) + i\,C \tag{3.9}$$

$\Rightarrow$ $C = \mathrm{Im}\, f(0)$.

Chapter 4

Propriétés géométriques

4.1 Etude de l'image d'une fonction holomorphe

Théorème 4.1 *Soit $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un domaine, $z_0 \in \Omega$ et $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.*
Si w_0 est une image d'ordre m de z_0 $\quad (m \in \{1, 2, \cdots\})$,

$\Big($*c'est à dire* $f(z_0) = w_0\,,\ 0 = f'(z_0) = \cdots = f^{(m-1)}(z_0)\,,\ f^{(m)}(z_0) \neq 0\Big)$,

alors il existe des voisinages $\mathcal{U}$ de z_0 et V de w_0, $f(U) = V$, tels que chaque élément w de $V \setminus \{w_0\}$ possède exactement m antécédents différents dans $\mathcal{U}$, i.e.

$$\mathcal{U} \cap f^{-1}(\{w\}) = \{z_1, \cdots, z_m\} \qquad z_j \neq z_k \quad \forall\, j \neq k.$$

Démonstration
On choisit $\varepsilon > 0$ tel que $f \neq w_0$ sur $D = \overline{D(z_0\,,\,\varepsilon)} \setminus \{z_0\} \subseteq \Omega$ et tel que $f' \neq 0$ sur D.
Soit $g = f - w_0 \Rightarrow \min\limits_{|z-z_0|=\varepsilon} |g(z)| = d > 0$.
Soit $|w - w_0| < d$. Sur $\partial D\,(z_0\,,\,\varepsilon)$ on a :

$$|w - f(z) + g(z)| = |w - w_0| < d \leq |g| + |w - f|$$

D'après le théorème de Rouché :

$$m = N\,(g) = N\,(f - w),$$

où N désigne le nombre de zéros dans $D(z_0, \varepsilon)$. Comme $f' \neq 0$ sur D, on voit que pour $w \neq w_0$ l'ordre de chaque racine de $f - w$ dans $D(z_0\,,\,\varepsilon)$ est 1.
On prend $V = D(w_0, d)$ et $\mathcal{U} = D(z_0, \varepsilon) \cap f^{-1}(V)$.
Corollaire 4.2 *Soit f injective dans l'ouvert $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, $f \in \mathcal{H}\,(\Omega)$. Alors $f' \neq 0$.*

Démonstration
Raisonnons par l'absurde en appliquant le théorème 4.1 .
Supposons qu'il existe $z_0 \in \Omega$ tel que $f'(z_0) = 0$.

$\Longrightarrow$ $w_0 = f(z_0)$ est une image d'ordre au moins 2. Donc chaque élément d'un certain voisinage pointé V de w_0 a au moins deux antécédents. Contradiction à l'injectivité.

Remarque. La réciproque n'est pas vraie.

exemple : e^z est $2\pi i$-périodique, donc pas injective.
Mais $(e^z)' = e^z \neq 0 \quad \forall\, z \in \mathbb{C}$.

Théorème 4.3 : Théorème de l'image ouverte
Soit $D \subseteq \mathbb{C}$ un domaine, $f \in \mathcal{H}(D)$ et $f \neq$ const.. Alors $f(D)$ est un domaine.

Démonstration
D connexe $\Rightarrow$ $f(D)$ connexe, car f continue. Soit $w_0 \in f(D)$. Alors w_0 est un point image d'ordre au moins 1.

Choisissons, comme dans 4.1, un ouvert V de w_0, tel que $f\big(f^{-1}(V)\big) = V$. Alors w_0 est un point intérieur de $f(D)$. Donc $f(D)$ est un ouvert.
Remarque Ce résultat n'est pas vrai pour des fonctions dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

exemple : $f(x) = x^2$

$f(\mathbb{R}) = [0, \infty[$ n'est pas ouvert.

Théorème 4.4 *Soit $D \subseteq \mathbb{C}$ un domaine, $z_0 \in D$, $f \in \mathcal{H}(D)$. Supposons que $f'(z_0) \neq 0$. Alors il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de z_0 telle que f soit injective sur $\mathcal{U}$.*
En particulier, si $f' \neq 0$ dans D, alors f est localement injective.

Démonstration
Soient z, $w \in D$.
Posons $g(z,w) = \frac{f(z)-f(w)}{z-w}$ si $z \neq w$ et $g(z,w) = f'(z)$ si $z = w$. Alors $g \in \mathcal{C}(D \times D)$.
Comme $f'(z_0) \neq 0$, on a $g(z_0, z_0) \neq 0$. Parce que g est continue, il existe un disque $D(z_0, \varepsilon) \subseteq D$ tel que :

$$|g(z,w)| \geq \frac{1}{2}|g(z_0,z_0)| \quad \forall\,(z,w) \in D(z_0,\varepsilon) \times D(z_0,\varepsilon) \subseteq D \times D;$$

d'où

$$|f(z) - f(w)| \geq \frac{1}{2}\,|f'(z_0)|\;|z-w| \quad \forall\, z, w \in D(z_0,\varepsilon)$$

$\Longrightarrow$ f est injective dans $D(z_0, \varepsilon)$.
Théorème 4.5 : Réciproque d'une fonction holomorphe injective
Soit $D \subseteq \mathbb{C}$ domaine, $f \in \mathcal{H}(D)$ et f injective. Alors la fonction réciproque f^{-1} : $f(D) \to \mathbb{C}$ est holomorphe sur $V = f(D)$.

Démonstration
Soit f injective $\Rightarrow$ $f \neq$ const.

$\underset{4.3}{\Longrightarrow}$ $V = f(D)$ est un domaine. En plus, 4.2 implique que $f' \neq 0$ dans D.

Soient $w_0, w \in V$. Posons $z = f^{-1}(w)$ et $z_0 = f^{-1}(w_0)$. Notons que f^{-1} est continue, car f est une application ouverte, i.e. $f(U)$ ouvert pour tout ouvert $U \subseteq D$. Ainsi: $w \to w_0 \Longleftrightarrow z \to z_0$. Donc

$$\frac{f^{-1}(w) - f^{-1}(w_0)}{w - w_0} = \frac{z - z_0}{f(z) - f(z_0)} = \frac{1}{\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}} \underset{z \to z_0}{\longrightarrow} \frac{1}{f'(z_0)}.$$

Donc $\left(f^{-1}\right)'(w_0) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(w_0))}$.

Proposition *Soit $f \in H(\Omega)$ et f injective dans $D := D(z_0, r)$, où $\overline{D} \subseteq \Omega$. Soit $V = f(D)$. Alors $\forall w \in V$ on a:*

$$f^{-1}(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} z \frac{f'(z)}{f(z) - w} \, dz.$$

Dém. Soit $g(z) = z\frac{f'(z)}{f(z)-w} \underset{3.1}{\Longrightarrow} I := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} g(z) \, dz = \sum_{p \in D} Res(g, p)$. Notons que, dû à l'injectivité de f dans D, il existe pour $w \in V$ une seule racine a de $f - w$ dans D. En plus $\operatorname{ord}(f - w, a) = 1$. Comme $g = z\frac{(f-w)'}{f-w}$ on obtient avec 3.5 que $I = Res(g, a) = a \cdot 1 = f^{-1}(w)$.

Proposition 4.6 <u>*Critère d'injectivité*</u>

Soit $C \subseteq \mathbb{C}$ un domaine <u>convexe</u> dans $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{H}(C)$. Supposons que $\operatorname{Re} f' > 0$. Alors f est injective.

Démonstration Soit $z, z_0 \in C$, $z \neq z_0$. C convexe $\underset{2.3}{\Rightarrow}$ $f(z) - f(z_0) = \int_{[z_0,z]} f'(w) \, dw$. Ainsi $|f(z) - f(z_0)| = |z - z_0| \left| \int_0^1 f'\big((1-t)z_0 + tz\big) \, dt \right| \geq |z - z_0| \operatorname{Re} \int_0^1 f'\big((1-t)z_0 + tz\big) \, dt = |z - z_0| \int_0^1 \underbrace{\operatorname{Re} f'\big((1-t)z_0 + tz\big)}_{>0} \, dt > 0$.

Donc f est injective.

Remarque Il existe des domaines D non convexes tels que f n'est pas injective, quoique f satisfait $Re\, f' > 0$, $f \in \mathcal{H}(D)$

Définition Soit $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ le compactifié d'Alexandrov de $\mathbb{C}$. Un ensemble $\mathcal{U} \subset \widehat{\mathbb{C}}$ est un voisinage de ∞ si $\mathcal{U}$ contient l'exterieur $\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\} \cup \{\infty\}$ d'un disque $D(0, R)$.

On peut identifier $\widehat{\mathbb{C}}$ avec la sphère de Riemann $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + (z - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}\}$ en utilisant la projection stéréographique: $P : S \longrightarrow \hat{\mathbb{C}}$, $(x, y, z) \mapsto \frac{x+iy}{1-z}$. Notons que la réciproque est donnée par:

$$w \in \mathbb{C} \mapsto \left(\frac{\operatorname{Re} w}{1 + |w|^2}, \frac{\operatorname{Im} w}{1 + |w|^2}, \frac{|w|^2}{1 + |w|^2} \right).$$

Définition (1) Soit $D \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert. Alors la frontière de D dans $\widehat{\mathbb{C}}$ est notée par $\partial_\infty D$.

(2) Soit (z_n) une suite dans D. Alors $z_n \to \partial_\infty D$ signifie que tous les points d'accumulations dans $\widehat{\mathbb{C}}$ de la suite (z_n) se trouvent sur la frontière $\partial_\infty D$.

Théorème 4.9 <u>critère de surjectivité</u>

Soient D et G deux domaines dans $\mathbb{C}$ et $f : D \to G$ une application holomorphe. Supposons que pour toute suite (z_n) dans D telle que $z_n \to \partial_\infty D$ on ait $f(z_n) \to \partial_\infty G$. (not.: $f(\partial_\infty D) \subseteq \partial_\infty G$). Alors f est surjective, c'est à dire $f(D) = G$. En plus, il *existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que chaque élément w de G a N antécédants dans D (multiplicité incluse).*

Démonstration (1) Montrons d'abord que chaque $w \in G$ a au plus un nombre fini d'antécédants dans D.

Supposons le contraire. Alors il existe $w_0 \in G$ et $z_n \in D$, $z_n \neq z_k$ pour $n \neq k$ tel que $f(z_n) = w_0$. Parce que f n'est pas constante, on a d'après 2.11 que $\{z_n : n \in \mathbb{N})$ est discret. Donc $z_n \to \partial_\infty D \Longrightarrow\ w_0 = f(z_n) \to \partial_\infty G \Longrightarrow w_0 \in \partial_\infty G$. Contradiction.

(2) Soit $G_k = \{w \in G : w$ a exactement k antécédants, multiplicités incluses $\}$, $\quad k \in \mathbb{N}$.
Notons que les G_k sont disjoints deux à deux et que $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} G_k = G$. Montrons que les G_k sont ouverts.

i) $\underline{k \geq 1}$. Soit $w_0 \in G_k$ et $f^{-1}(w_0) \overset{(1)}{=} \{z_1, \cdots, z_n\}$. Alors

$$\sum_{j=1}^{n} \underbrace{m(f - w_0, z_j)}_{n_j} = k.$$

D'après le théorème 4.1 il existe un voisinage V de w_0 et des voisinages U_j de z_j, disjoints deux à deux, tel que chaque $w \in V \setminus \{w_0\}$ a exactement n_j antécédants dans U_j; donc en tout, w a k antécédants dans $\bigcup_{j=1}^n U_j$.
A ce moment il est toujours possible que w possède des antécédants en dehors de $\bigcup_{j=1}^n U_j$. Supposons qu'il existe $w_m \to w_0$, $w_m \in V$, tel que w_m a plus que k antécédants dans D. Dans ce cas il existe $z_m \in D \setminus \bigcup_{j=1}^n U_j$ tel que $f(z_m) = w_m$. En passant à une sous-suite, on peut supposer que z_m converge vers $z_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$. Notons que $z_0 \notin \bigcup_{j=1}^n U_j$.

- $z_0 \in D$: Alors $f(z_0) = \lim f(z_m) = \lim w_m = w_0$. Ainsi $z_0 \in \{z_1, \cdots, z_n\}$, Contradiction.
- $z_0 \in \partial_\infty D$: Alors l'hypothèse $f(\partial_\infty D) \subseteq \partial_\infty G$ implique que $w_m = f(z_m) \to \partial_\infty G$. Ainsi, $w_0 = \lim w_m \in \partial_\infty G$. Contradiction à $w_0 \in G$.

On conclut qu'il existe un voisinage $V^* \subseteq V$ de w_0 tel que $V^* \subseteq G_k$. Donc G_k est ouvert.

ii) $\underline{k = 0}$ Soit $w_0 \in G_0$. Supposons que w_0 n'est pas un point intérieur de G_0. Alors il existe une suite $w_m \in G$, $w_m \to w_0$, tel que w_m a au moins un antécédant z_m dans D. De nouveau, en passant à une sous suite, on peut supposer que z_m converge vers $z_0 \in \widehat{\mathbb{C}}$.

- $z_0 \in D$: Alors $f(z_0) = \lim f(z_m) = \lim w_m = w_0$, donc $w_0 \notin G_0$. Contradiction.
- $z_0 \in \partial_\infty D$: voir ci dessus.

(3) On conclut que $G = \bigcup_{k=0}^\infty G_k$ est un réunion disjointe d'ouverts. Comme G est connexe, il exsite un et un seul des G_k, disons G_N, qui n'est pas vide. Evidemment $N \neq 0$. Donc $G_N = G$, c'est à dire chaque élément de G a exactement N antécédants.
Théorème 4.8 : Lemme de Schwarz
Soit $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ telle que $f(0) = 0$ et $|f(z)| \leq 1$ (c'est à dire $f(\mathbb{D}) \subseteq \overline{\mathbb{D}}$).

Alors

- *(1)* $|f(z)| \leq |z| \qquad \forall\, z \in \mathbb{D}$
- *(2)* $|f'(0)| \leq 1$

Si on a égalité dans (1) pour un $z_0 \in \mathbb{D}$, $z_0 \neq 0$, alors $f(z) = e^{i\theta}\, z$ (rotation).
Si on a égalité dans (2), alors $f(z) = e^{i\theta}\, z$.

Démonstration
Considérons $h(z) = \frac{f(z)}{z}$ si $z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ et $h(z) = f'(0)$ si $z = 0$.
$\overset{\text{Riemann}}{\Longrightarrow}$ $h \in \mathcal{H}(D)$ et $z\, h(z) = f(z) \quad \forall\, z \in \mathbb{D}$.

Soit $|z| \leq r < 1 \underset{\text{max}}{\overset{\text{th. du}}{\Longrightarrow}} |h(z)| \leq \max\limits_{|\xi|=r} |h(\xi)| = \max\limits_{|\xi|=r} \left|\frac{f(\xi)}{\xi}\right| \leq \frac{1}{r} \max\limits_{|\xi|=r} |f(\xi)| \underset{\text{hyp.}}{\leq} \frac{1}{r}$.

Fixons z et faisant tendre $r \to 1$. Alors $|h(z)| \leq 1 \Rightarrow |h| \leq 1$ dans $\mathbb{D}$

$\Longrightarrow |f(z)| \leq |z| \quad \forall\, z \in \mathbb{D} \Rightarrow (1)$

· $\frac{f(z)-f(0)}{z-0} = h(z) \underset{z \to 0}{\longrightarrow} f'(0) = a_1$

$\overset{|h|\leq 1}{\Longrightarrow} |a_1| \leq 1 \Rightarrow (2)$

· Soit $z_0 \neq 0$ et $|f(z_0)| = |z_0| \Rightarrow |h(z_0)| = 1$

$\underset{\|h\|_\infty = 1}{\overset{\text{th. du max}}{\Longrightarrow}} h = \text{const.} = e^{i\theta} \Rightarrow f(z) = e^{i\theta}\, z$.

· Si $|f'(0)| = 1 \Rightarrow |h(0)| = 1 \underset{\|h\|_\infty \leq 1}{\overset{\text{th. du max}}{\Longrightarrow}} h = \text{const.} = e^{i\theta}$

$\Longrightarrow f(z) = e^{i\theta} z$.

Théorème 4.18 Lemme de Schwarz-Pick
Soit $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ telle que $f(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$. Alors :

- *a)* $\left|\dfrac{f(z) - f(v)}{1 - \overline{f(z)}\, f(v)}\right| \leq \left|\dfrac{z - v}{1 - \overline{z}\, v}\right| \qquad \forall\, z\,,\, v \in \mathbb{D}$
- *b)* $\dfrac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leq \dfrac{1}{1 - |z|^2} \qquad \forall\, z \in \mathbb{D}$.

On a égalité en un point z_0 (resp. dans tous les points) de $\mathbb{D}$ si seulement et si f est de la forme :

$$f = e^{i\alpha}\, S_a \quad \text{où} \quad S_a(z) = \frac{a - z}{1 - \overline{a}\, z}.$$

Démonstration
Notons que $S_a = S_a^{-1}$.

(a) Fixons $v \in \mathbb{D}$ et posons $F = S_{f(v)} \circ f \circ S_v$. Alors $F(0) = 0$, $F : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, $F \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$. En vertu du lemme de Schwarz : $|F(z)| \leq |z| \quad \forall\, z \in \mathbb{D}$. D'où

$$|F \circ S_v^{-1}(z)| = |S_{f(v)} \circ f(z)| \leq |S_v^{-1}(z)| = \left|\frac{v-z}{1-\overline{v}\,z}\right|$$

$$\iff \left|\frac{f(v)-f(z)}{1-\overline{f(v)}\,f(z)}\right| \leq \left|\frac{v-z}{1-\overline{v}\,z}\right|$$

(b) $\quad a) \Longrightarrow \quad \left|\frac{f(z)-f(v)}{z-v}\right| \leq \left|\frac{1-f(z)\,\overline{f(v)}}{1-z\,\overline{v}}\right|$. En faisant tendre v vers z, on obtient

$$|f'(z)| \leq \left|\frac{1-|f(z)|^2}{1-|z|^2}\right| = \frac{1-|f(z)|^2}{1-|z|^2};$$

d'où b).

- cas de l'égalité

- Supposons que l'on ait égalité dans (a) pour un point $(z_0, v_0) \in \mathbb{D}^2$, $z_0 \neq v_0$. Alors $|F(\xi_0)| = |\xi_0|$ pour $\xi_0 = S_{v_0}^{-1}(z_0)$. Le théorème 4.8 implique que $F(z) = e^{i\theta}\,z$; d'où $f = S_{f(v)}^{-1} \circ F \circ S_v^{-1} \in \mathcal{M}$, $f(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$

$\underset{1.18}{\Longrightarrow}$ $f = e^{i\theta}\,S_a$ pour $a \in \mathbb{D}$, $\theta \in \mathbb{R}$.

- Soit $f = e^{i\alpha} S_a \Rightarrow F = S_{f(v)} \circ f \circ S_v \in \mathcal{M}$, $F(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$, $F(0) = 0$

$\underset{1.18}{\Longrightarrow}$ $F(z) = e^{i\theta}\,z \Longrightarrow |F(\xi)| = |\xi| \;\; \forall \xi \in \mathbb{D}$

$\Longrightarrow \left|\frac{v-z}{1-\overline{v}z}\right| = |S_v^{-1}(z)| = |F \circ S_v^{-1}(z)| =$

$= |S_{f(v)} \circ f(z)| = \left|\frac{f(z)-f(v)}{1-\overline{f(v)}\,f(z)}\right|$.

- Supposons que l'on ait égalité dans (b) pour un point $v \in \mathbb{D}$. Soit $F = S_{f(v)} \circ f \circ S_v$. Alors

$|F'(0)| = |S'_{f(v)}(f(v)) \cdot f'(v) \cdot S'_v(0)| = \frac{1}{1-|f(v)|^2}|f'(v)|(1-|v|^2) = 1.$

D'après le lemme de Schwarz, $F(z) = e^{i\theta}\,z$. Donc $f = e^{i\alpha} S_a$.

- Si $f = e^{i\theta}\,S_a$, alors $|f'(z)| = \frac{1-|a|^2}{|1-\overline{a}z|^2} = \frac{1-|f(z)|^2}{1-|z|^2}$.

Interprétation géométrique : on peut montrer que $\rho(z, v) = \left|\frac{z-v}{1-\overline{v}\,z}\right|$ est une distance dans $\mathbb{D}$ (distance pseudo-hyperbolique). Alors chaque $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ avec $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ est une contraction par rapport à ρ; c'est à dire $\rho(f(z), f(v)) \leq \rho(z, v)$. Notons que les boules dans cette distance ρ sont des disques euclidiens.

4.2 Applications conformes I

Définition Soient $D_1, D_2 \subseteq \mathbb{C}$ deux domaines. Une application $f : D_1 \to D_2$ est une application conforme si f est une bijection holomorphe de D_1 sur D_2.

Théorème 4.19 *L'ensemble des applications conformes de $\mathbb{D}$ sur $\mathbb{D}$ coincide avec l'ensemble des transformations de Möbius de la forme* $f(z) = e^{i\theta}\,\dfrac{a-z}{1-\bar{a}\,z}$, $(\theta \in \mathbb{R}\,,\ a \in \mathbb{D})$.

Démonstration
Soit $f\ :\ \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ une application conforme et $a = f^{-1}(0)$. Alors $F = f \circ S_a \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$, $F(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$ et $F(0) = 0$. Par le lemme de Schwarz $|F(z)| \leq |z| \quad \forall z \in \mathbb{D}$.

D'autre part, f^{-1} est une application conforme de $\mathbb{D}$ sur $\mathbb{D}$. En plus, $F^{-1} = S_a^{-1} \circ f^{-1} \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$, $F^{-1}(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$ et $F^{-1}(0) = 0$. De nouveau, par le lemme de Schwarz, $|F^{-1}(v)| \leq |v|$ pour tout $v \in \mathbb{D}$.

Soit maintenant $v = F(z)$. Alors $F^{-1}(v) = z$ et $|z| \leq |v| = |F(z)| \leq |z|$. Donc $|F(z)| = |z|$ pour tout $z \in \mathbb{D}$.
$\overset{\text{Schwarz}}{\Longrightarrow} \quad F(z) = e^{i\theta} z \quad \Longrightarrow \quad f = e^{i\theta}\, S_a$.

Autre démonstration: Utilisons Schwarz-Pick: Soit $z_j \in \mathbb{D}$ et $v_j = f(z_j)$. Alors

$$\rho(f(z_1), f(z_2)) \leq \rho(z_1, z_2) = \rho(f^{-1}(v_1), f^{-1}(v_2)) \leq \rho(v_1, v_2) =$$

$$= \rho((f(z_1), f(z_2)).$$

Donc, d'après 4.18 $f = e^{i\theta}\, S_a$.

Chapter 5

Familles normales

Définition Soit $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ouvert et $f_n \in \mathcal{C}(\Omega)$. La suite (f_n) converge localement uniformément vers f, si $\forall\, z_0 \in \Omega$, il existe un voisinage $D = D(z_0)$ de z_0, $D \subseteq \Omega$, tel que :

$$f_n \underset{D}{\overset{\text{unif}}{\longrightarrow}} f\,, \quad \text{c'est à dire} \quad \sup_{z\in D} |f_n(z) - f(z)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Définition $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}(\Omega)$ s'appelle localement uniformément bornée si :

$\forall\, z_0 \in \Omega$, $\exists$ voisinage $D\,(z_0) = D \subseteq \Omega$ et $M > 0$ tel que

$\forall\, z \in D$, $\forall\, f \in \mathcal{F}$: $|f\,(z)| \leq M$

Définition $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}(\Omega)$ s'appelle localement équicontinue si :

$\forall\, z_0 \in \Omega$, $\exists$ voisinage $D\,(z_0) = D \subseteq \Omega$ tel que $\mathcal{F}$soit uniformément équicontinue sur D, i.e.

$$\forall \varepsilon > 0\ ,\ \exists \delta > 0\ ,\ \forall x, y \in D\,, \forall\, f \in \mathcal{F}\ ,\ |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Lemme 5.1

(1) $(f_n) \in \mathcal{C}(\Omega)$, $f_n \underset{\text{unif.}}{\overset{\text{loc.}}{\longrightarrow}} f \Longleftrightarrow f_n \to f$ unif. sur chaque partie compacte $K \subseteq \Omega$

(2) $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}(\Omega)$ localement uniformément bornée $\Longleftrightarrow \forall\, K \subset \Omega, K$ compact, $\exists M > 0$ tel que

$$\forall\, f \in \mathcal{F}\,, \forall\, x \in K\ ,\ |f(x)| < M.$$

(3) $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}(\Omega)$, localement équicontinue $\Longleftrightarrow \forall\, K \subseteq \Omega\,,\ K$ compact $\mathcal{F}|_K$ uniformément équicontinue.

Démonstration - en exercice -

Soit $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert. Une suite de compacts $K_n \subseteq \Omega$ s'appelle suite d'exhaustion de Ω si

- (1) $K_0^\circ \neq \emptyset$
- (2) $K_n \subseteq K_{n+1}^\circ$

- (3) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n = \Omega$

Remarques (1) Chaque ouvert $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ possède une suite d'exhaustion.
(2) Si (K_n) est une suite d'exhaustion de Ω, alors $\forall\, K \subseteq \Omega$, K compact, $\exists\, n_0$ tel que $K \subseteq K_{n_0}$.

Considérons $\mathcal{C}(\Omega)$ et une suite d'exhaustion (K_n) de Ω, $\Omega \subseteq \mathbb{C}$. Pour $f \in \mathcal{C}(\Omega)$, soit $\|f\|_n = \sup\limits_{z\in K_n} |f(z)|$. Alors :

$$d(f,g) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\|f-g\|_n}{1+\|f-g\|_n} \quad \text{est une distance sur} \quad \mathcal{C}(\Omega)\,.$$

Proposition 5.2 Soit $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert et f_n, $f \in \mathcal{C}(\Omega)$. Alors :

$$f_n \xrightarrow[\text{unif.}]{\text{loc.}} f \Longleftrightarrow d(f_n, f) \to 0.$$

En particulier, la topologie induite par d est indépendant de la suite d'exhaustion choisie.

Démonstration (exercice)

Définition : <u>Famille normale</u>
$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}\,(\Omega)$ est une famille normale si chaque suite (f_n) de $\mathcal{F}$ admet une sous suite (f_{n_k}) qui converge localement uniformément sur Ω.

Proposition 5.3
$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}(\Omega)$ normale $\Leftrightarrow$ $\mathcal{F}$ est précompact $\Leftrightarrow$ $\overline{\mathcal{F}}$ compact (dans l'espace métrique $(\mathcal{C}(\Omega), d)$).

Démonstration

voir cours AR

5.4 Théorème d'Arzela-Ascoli

- 1) Soit $K \subseteq \mathbb{C}$ un compact. Alors $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}(K)$ est précompact si et seulement si $\mathcal{F}$ est équicontinue sur K et uniformément bornée.
- 2) Soit $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert. Alors $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{C}(\Omega)$ est précompact (normal) si et seulement si $\mathcal{F}$ est localement équicontinue et localement uniformément bornée sur K.

Démonstration

(1) voir cours AR.
2) Appliquons (1) à $\mathcal{C}(K_n)$ où (K_n) est une suite d'exhaustion de Ω et utilisons pour " $\Leftarrow$ " la méthode Cantor. Plus précisément:

Supposons que $\mathcal{F}$ soit localement équicontinue et localement uniformément bornée sur Ω. Alors $\forall n$, d'après le lemme 5.1, $\mathcal{F}$ est (uniformément) équicontinue sur K_n et uniformément bornée sur K_n. Soit (f_n) une suite dans $\mathcal{F}$.

Gràce à (1) il existe pour K_1 une sous-suite $(f_{n,1})$ qui converge uniformément sur K_1 vers une fonction $f_1 \in \mathcal{C}(K_1)$.
Pour K_2 il existe alors une sous-suite $(f_{n,2})$ de $(f_{n,1})$, qui converge uniformément sur K_2 vers une fonction $f_2 \in \mathcal{C}(K_2)$.

$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$

En général, pour K_p il existe une sous-suite $(f_{n,p})$ de $(f_{n,p-1})$ qui converge uniformément sur K_p vers une fonction $f_p \in \mathcal{C}(K_p)$.

Soit $(f_{n,n})$ la suite diagonale. Notons que $f_p = f_{p-1}$ sur K_{p-1}. Soit $f(z) = f_j(z)$ si $z \in K_j$. Alors f est bien définie et on a:

$(f_{n,n})_{n\geq j} \to f$ uniformément sur chaque K_j. Ainsi $f_{n,n} \to f$ localement uniformément sur Ω.

5.5 Théorème de Weierstrass

Soit $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert, $f_n \in \mathcal{H}(\Omega)$. On suppose que $f_n \xrightarrow[\text{unif.}]{\text{loc.}} f$ sur Ω.
Alors $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ et $f_n^{(k)} \xrightarrow[\text{unif.}]{\text{loc.}} f^{(k)}$ sur $\Omega \quad \forall\, k \in \mathbb{N}$.

Démonstration

- 1 - $f_n \xrightarrow[\text{unif.}]{\text{loc.}} f$; donc $f \in \mathcal{C}(\Omega)$.

- Soit $\Delta \subseteq \Omega$ un triangle fermé. Par Cauchy-Goursat on a que : $\int_{\partial\Delta} f_n = 0$.

Comme $\partial\Delta$ est un compact, on sait que $f_n \to f$ uniformément sur $\partial\Delta$; donc: $\underbrace{\lim \int_{\partial\Delta} f_n}_{=0} = \int_{\partial\Delta} \underbrace{\lim f_n}_{=f} \Rightarrow \int_{\partial\Delta} f = 0 \underset{\text{Morera}}{\Longrightarrow} f \in \mathcal{H}(\Omega)$.

2)
Soit $z_0 \in \Omega$ et $R > 0$ tel que $D(z_0, R) \subseteq \overline{D(z_0\, R)} \subseteq \Omega$.
Parce que f_n converge uniformément sur $\partial D(z_0, R)$, on a par Cauchy:

$$f_n^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{|\xi - z_0| = R} \frac{f_n(\xi)}{(\xi - z)^{k+1}}\, d\xi \quad \forall z \in D(z_0\,,\, R)$$

$$\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad \frac{k!}{2\pi i} \int_{|\xi - z_0| = R} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{k+1}}\, d\xi \overset{(1)}{=} f^{(k)}(z)$$

car $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Donc on a la convergence simple des dérivées d'ordre k.

- Montrons qu'il y a convergence uniforme sur $\overline{D(z_0, r)}$, $0 < r < R$.
Pour $z \in D(z_0, r)$, on obtient : $|f_n^{(k)}(z) - f^{(k)}(z)| \leq \frac{k!}{2\pi} \int_{|\xi - z_0| = R} \frac{|f_n(\xi) - f(\xi)|}{|\xi - z|^{k+1}}\, |d\xi| \leq \frac{k!}{2\pi} \int_{|\xi - z_0| = R} \frac{\|f_n - f\|_{|\xi - z_0| = R}}{|\xi - z|^{k+1}}\, |d\xi| \underset{(n\geq n_0)}{\leq} \frac{k!}{2\pi} \int_{|\xi - z_0| = R} \frac{\varepsilon |d\xi|}{(|\xi - z_0| - |z_0 - z|)^{k+1}} \leq \frac{k!}{2\pi} \int_{|\xi - z_0| = R} \frac{\varepsilon |d\xi|}{(R - r)^{k+1}} = k!\, \frac{R}{(R-r)^{k+1}} \varepsilon$.
Finalement

$$\|f_n^{(k)} - f^{(k)}(z)\|_{\overline{D(z_0\,,\, r)}} \leq C\varepsilon \quad \forall\, n \geq n_0$$

Corollaire 5.6 *$\mathcal{H}(\Omega)$ est fermé dans $(\mathcal{C}(\Omega), d)$.*

Lemme 5.7 *Soit $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{H}(\Omega)$. Alors :*

$\mathcal{F}$ localement uniformément bornée $\Rightarrow$ $\mathcal{F}$ localement équicontinue.

Démonstration

Soit $z, v \in K = \overline{D(z_0, r)} \subseteq \Omega$. On a

$$|f(z) - f(v)| = |\int_{[z,v]} f'(\xi)\, d\xi| \tag{5.1}$$

$$\leq |z - v| \max_{\xi \in [z,v]} |f'(\xi)| \leq |z - v|\, \|f'\|_K. \tag{5.2}$$

Par Cauchy :

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2}\, d\xi\ ,\ z \in D(z_0\,, r).$$

Soit $S = \overline{D(z_0, \frac{r}{2})}$. $\mathcal{F}$ est uniformément bornée sur K, d'où $\forall z \in S$:

$$|f'(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\partial K} \frac{M}{|\xi - z|^2}\, |d\xi| \tag{5.3}$$

$$\leq \frac{M}{2\pi} \int_{\partial K} \frac{|d\xi|}{\left(r - \frac{r}{2}\right)^2} = \frac{M}{\left(\frac{r}{2}\right)^2}\, r = \frac{4M}{r}. \tag{5.4}$$

Ainsi

$$\sup_{|z - z_0| \leq r/2} |f'(z)| \leq \frac{4M}{r}$$

$\Rightarrow\ |f(z) - f(v)| \leq |z - v|\, \frac{4M}{r} \quad \forall\, z, v \in \overline{D(z_0, \frac{r}{2})}\,, \forall\, f \in \mathcal{F}$;

c' est à dire $\mathcal{F}|_S$ est uniformément équicontinue. Le lemme 5.1 implique alors que $\mathcal{F}$ est localement équicontinue.

Théorème de Montel 5.8

Soit $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ouvert, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{H}(\Omega)$. Alors :

$\mathcal{F}$ est normale $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{F}$ est localement uniformément bornée.

Démonstration

($\Leftarrow$) $\mathcal{F}$ est localement uniformément bornée $\overset{5.7}{\Longrightarrow}$ $\mathcal{F}$ est localement équicontinue. Ainsi, par Arzela-Ascoli, $\mathcal{F}$ est précompact, c'est à dire normale (5.3).

($\Rightarrow$) par l'absurde:

Soit $\mathcal{F}$ normale. Supposons que $\mathcal{F}$ ne soit pas localement uniformément bornée, c'est à dire :

$\exists\, K \subseteq \Omega$, K compact, $\exists\, (f_n) \in \mathcal{F}$ telle que $\sup_{z \in K} |f_n(z)| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$

$\Rightarrow$ (f_n) n'admet pas de sous suite uniformément convergente sur K
(car $\|f_{n_\ell} - f\|_K \to 0 \Rightarrow \|f_{n_\ell}\|_K$ bornée).

Contradiction.

Théorème de Vitali 5.9
Soit $D \subseteq \mathbb{C}$ un domaine, $f_n \in \mathcal{H}(D)$ et $M \subseteq D$ un ensemble non discret. Supposons que :

- *1) (f_n) soit localement uniformément bornée*
- *2) $(f_n(z))$ converge $\forall\, z \in M$.*

Alors (f_n) converge localement uniformément vers une fonction $f \in \mathcal{H}(D)$.

Démonstration
(1) $\overset{\text{Montel}}{\Longrightarrow}$ $\exists$ une sous suite (f_{m_k}) qui converge localement uniformément sur D vers une fonction f. Par le théorème 5.5 de Weierstrass, $f \in \mathcal{H}(D)$. (2) $\Longrightarrow$ $f_n(z) \to f(z)\ \forall z \in M$.
On veut montrer que (f_n) converge localement uniformément vers f. Soit $K \subseteq D$ un compact. Il s'agit de montrer que

$$\forall\, \varepsilon > 0\ ,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ ;\ \forall\, n \geq n_0\ ,\ \forall\, z \in K : |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon \qquad (*)$$

Supposons que $(*)$ ne soit pas vrai, c'est à dire :

$$\exists\, \varepsilon_0 > 0\,,\, \forall\, n_0\ ,\ \exists\, m \geq n_0\,,\, \exists\, z_{n_0} \in K\ \ tq\ \ |f_m(z_{n_0}) - f(z_{n_0})| \geq \varepsilon_0$$

$$\text{i.e. } \exists\, \varepsilon_0 > 0\,,\, \forall\, l\ ,\ \exists\, n_l\ \exists\, z_l \in K\ \ tq\ \ |f_{n_l}(z_l) - f(z_l)| \geq \varepsilon_0.$$

Soit $\mathcal{F} = \{f_n\ :\ n \in \mathbb{N}\}$. Par Montel :
$\exists\, (f_{n_{l_j}})_j$ une sous-suite de (f_{n_l}) qui converge localement uniformément sur D vers $g \in \mathcal{H}(D)$.
Notons que $z_{l_j} \in K$. On obtient

$$|f_{n_{l_j}}(z_{l_j}) - f(z_{l_j})| > \varepsilon_0 \qquad (**).$$

Comme K est compact, (z_{l_j}) admet une sous-suite convergente. On peut supposer que (z_{l_j}) converge elle même vers $z_0 \in K$.
Dans $(**)$, faisons tendre j vers $+\infty$. Grâce à la convergence uniforme sur K, ceci nous donne

$$|g(z_0) - f(z_0)| \geq \varepsilon_0. \qquad (***)$$

Soit $a \in M$. Alors $g(a) - f(a) = \lim\limits_{j \to +\infty}\ f_{n_{l_j}}(a) - \underbrace{f_{n_{l_j}}(a)}_{\substack{(f_n)\, cv \\ \text{sur } M}} = 0.$

D'où $g|_M = f|_M$. Par le théorème d'unicité 2.11, $f \equiv g$ sur D; contradiction avec $(***)$.

Remarque 5.9 n'est plus vrai si (f_n) n'est pas localement uniformément bornée.
- <u>exemple</u> :

$$D = \{z \in \mathbb{C}\ :\ |z| < 2\}\,,\, f_n(z) = z^n,\ M = \mathbb{D}$$

$f_n(z) \xrightarrow[\text{unif.}]{\text{loc.}} 0 \quad \forall\, z \in M$, mais n'importe quelle sous-suite de (f_n) diverge pour $z = 3/2$, par exemple.

On rappelle que pour tout $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, $f \not\equiv 0$, $Z(f) = \{z \in \Omega \ : \ f(z) = 0\}$ est un ensemble discret dans Ω.

Lemme de Hurwitz 5.10
Soit $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un domaine, $f_n \in \mathcal{H}(\Omega)$, $f_n \xrightarrow[\text{unif.}]{\text{loc.}} f$ sur Ω. Si $\forall\, n$: $Z(f_n) = \emptyset$, alors ou bien $Z(f) = \emptyset$, ou bien $f \equiv 0$.

Démonstration
Supposons que $f \not\equiv 0$ mais que $Z(f) \neq \emptyset$. Alors $\exists\, z_0 \in \Omega$ et $\varepsilon > 0$ tel que $f(z_0) = 0$ et $f(z) \neq 0$ si $0 < |z - z_0| \leq \varepsilon$.
Soit $\delta_0 = \min\limits_{|z-z_0|=\varepsilon} |f(z)|$. Alors $\delta_0 > 0$. Grâce à la convergence uniforme sur $|z - z_0| = \varepsilon$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$|f_n(z)| \geq \frac{\delta_0}{2} \quad \forall\, n \geq n_0 \quad \text{et} \quad \forall\, z \text{ avec } |z - z_0| = \varepsilon.$$

Notons que $Z(f_n) = \emptyset$ dans $\overline{D(z_0, \varepsilon)}$. Donc, d'après le principe du minimum (2.17):

$$|f_n(z)| \geq \frac{\delta_0}{2} \quad \forall n \geq n_0 \quad \text{et} \quad \forall\, z \in \overline{D(z_0, \varepsilon)}.$$

En particulier pour $z = z_0$: $|f(z_0)| = \lim_{n\to\infty} |f_n(z_0)| \geq \frac{\delta_0}{2}$;
contradiction. Donc $Z(f) = \emptyset$.

Théorème de Hurwitz 5.11
Soient $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un domaine, $f_n \in \mathcal{H}(\Omega)$ et f_n injective. Supposons que $f_n \xrightarrow[\text{unif.}]{\text{loc.}} f$ sur Ω. Alors f est soit injective soit constante.

Démonstration

Soient z_1 et $z_2 \in \Omega$ tel que $z_1 \neq z_2$.
Soit $D = \Omega \setminus \{z_1\}$. f_n injective $\Rightarrow$ $f_n(z) - f_n(z_1) \neq 0$ dans D.
Par le lemme 5.10, appliqué à D, on voit que :

$$f(z) - f(z_1) \equiv 0 \text{ dans } D \text{ ou bien } f(z) - f(z_1) \neq 0 \text{ dans } D\,.$$

Ainsi $f(z) \equiv f(z_1) = \text{const.}$ dans Ω ou bien $f(z_2) \neq f(z_1)$, c'est à dire f injective.

Théorème d'Osgood 5.12
Soit $f_n \in \mathcal{H}(\Omega)$, Ω ouvert, $f_n(z) \to f(z) \quad \forall\, z \in \Omega$ (convergence simple).
Alors il existe un ouvert $\mathcal{U}$ dense dans Ω tel que f_n converge localement uniformément sur U. En plus, f est holomorphe sur $\mathcal{U}$.

Démonstration

1) $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ouvert $\Rightarrow$ Ω est un espace de Baire, i.e. $\forall \mathcal{O}_j$, ouvert et dense dans Ω, on a $\bigcap_{j\in\mathbb{N}} \mathcal{O}_j$ dense dans Ω. Notons que ceci est équivalent à:

$\forall F_j$, F_j fermé dans Ω, $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} F_j = \Omega$ implique qu'il existe j_0 tel que $F_{j_0}^\circ \neq \emptyset$.
Soit $E_n = \{z \in \Omega \;;\; |f_k(z)| \leq n \quad \forall\, k \in \mathbb{N}\}$. On a : $E_n \subseteq E_{n+1}$ et f_k holomorphe, donc continue. D'où E_n est fermé dans Ω (pas nécessairement dans $\mathbb{C}$).
Comme $(f_k(z))_k$ converge $\forall\, z \in \Omega$ on a : $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n = \Omega$.
Parce que Ω est un espace de Baire, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N} \;:\; E_{n_0}^\circ \neq \emptyset$.
Posons $\mathcal{U} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n^\circ$. Alors $\mathcal{U}$ est ouvert et $\mathcal{U} \neq \emptyset$.

2) <u>Montrons que $f_n \to f$ loc. uniformément sur $\mathcal{U}$</u>
Soit $K \subseteq \mathcal{U}$ compact. Alors $\exists\, N$ tel que $K \subseteq \bigcup_{n=0}^{N} E_n^\circ = E_N^\circ$.
Par définition de E_N on a: $|f_k(z)| \leq N$ $(\forall\, k \in \mathbb{N}\,, \forall\, z \in K)$. Donc (f_k) est uniformément bornée sur K. Comme K est arbitraire, (f_k) est localement uniformément bornée sur $\mathcal{U}$.
Notons que (f_n) converge simplement vers f sur $\mathcal{U}$. Par Vitali 5.9, (f_k) converge localement uniformément sur $\mathcal{U}$ vers f. D'après Weierstrass 5.5, on conclut que $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.

3) <u>$\mathcal{U}$ dense</u>

<u>Par l'absurde</u>
Supposons que $\mathcal{U}$ n'est pas dense dans Ω, c'est à dire $\exists\, \mathcal{O}$ ouvert dans Ω tel que $\mathcal{O} \cap \mathcal{U} = \emptyset$.
Comme dans la 1ère étape (en remplaçant Ω par $\mathcal{O}$) on obtient :

$$\exists\, n_1 \geq n_0 \;\text{ tel que }\; \{z \in \mathcal{O} \;:\; |f_k(z)| \leq n_1\,, \forall\, k \in \mathbb{N}\}^0 \neq \emptyset$$

Notons que ^{0} est pris par rapport à $\mathcal{O}$ et $^\circ$ par rapport à Ω. Mais comme $\mathcal{O}$ est ouvert, ces deux opérations topologiques coincident. Donc

$$\begin{aligned} \emptyset &\neq \{z \in \mathcal{O} \;:\; |f_k(z)| \leq n_1\,, \forall\, k \in \mathbb{N}\}^0 && (5.5)\\ &\subseteq \{z \in \Omega \;:\; |f_k(z)| \leq n_1 \;\forall\, k \in \mathbb{N}\}^\circ \subseteq \mathcal{U}. && (5.6) \end{aligned}$$

Contradiction.

Chapter 6

Domaines simplement connexes et applications conformes II

Définition Un domaine $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ est dit simplement connexe si $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ est connexe.

Exemple - chaque disque ou plus généralement chaque ouvert convexe est simplement connexe.
- La bande $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \alpha < \mathrm{Im}\, z < \beta\}$ est simplement connexe ($\alpha < \beta$).
Notons cependant que $\mathbb{C} \setminus \Omega$ n'est pas connexe.
- c-exemple La couronne $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \ : \ \rho_1 < |z - z_0| < \rho_2\}$ n'est pas simplement connexe.

Définition Un domaine $D \subseteq \mathbb{C}$ est dit n-connexe, si $\widehat{\mathbb{C}} \setminus D$ a n composantes connexes.

Exemple - La couronne Ω ci-dessus est 2-connexe.
- Il existe des domaines qui ne sont pas n-connexes, pour tout n. Par exemple le complémentaire de l'ensemble de Cantor sur $\mathbb{R}$ est un domaine D tel que $\widehat{\mathbb{C}} \setminus D$ a un nombre non dénombrable de composantes connexes.

Lemme 6.1 Soit $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ouvert, et $K \subseteq \Omega$ un ensemble compact non vide. Alors il existe dans $\Omega \setminus K$ un cycle Γ tel que :

- 1) $n\,(\Gamma, z) \in \{0, 1\} \quad \forall\, z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$
- 2) $n\,(\Gamma, z) = 0 \quad \forall\, z \in \mathbb{C} \setminus \Omega \quad (\Gamma \underset{\Omega}{\sim} 0)$
- 3) $n\,(\Gamma, z) = 1 \quad \forall\, z \in K$.

Démonstration
On peut supposer que $\Omega \neq \mathbb{C}$ (sinon on prend pour Γ un cercle $\partial D(0, R)$ tel que $K \subseteq D(0, R)$.
Ainsi $2\varepsilon := d(K, \partial\Omega) = \inf\{|z - w| \ : \ z \in K\,,\, w \in \partial\Omega\} > 0$.

Formons le quadrillage du plan $\mathbb{C}$ avec des carrés parallèles aux axes réel et imaginaire, de cô tés ε.
Soit $\mathcal{Q} = \{Q_1, \cdots, Q_n\}$ l'ensemble des carrés fermés qui coupent K.

La frontière ∂Q_j de Q_j est considérée comme courbe fermée parcourue dans le sens positif.
Soit $M = \{\gamma_{jk} : j = 1, \cdots, n \; ; \; k = 1, \cdots, 4\}$ l'ensemble des arêtes des éléments de $\mathcal{Q}$.
Si γ_{jk} est une arrête commune à 2 carrés Q_ℓ, on l'enlève.
A la fin du processus, il ne reste que des arrêtes qui ne coupent pas K (bien qu'au moins un des carrés correspondants coupe K). Soit $\mathcal{C}$ l'ens. de ces arrêtes. On obtient un cycle $\Gamma = \sum\limits_{\gamma_{jk} \in \mathcal{C}} \gamma_{j_k}$ tel que $\Gamma \subseteq \Omega \setminus K$

On en déduit que $n(\Gamma, a) = 1$ si$a \in Q_j^0$ pour un $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$ et 0 si $a \notin \bigcup\limits_1^n Q_j$

Notons que $K \subseteq \left(\bigcup_{j=1}^n Q_j\right) \setminus \Gamma$. Donc $n(\Gamma, a) = 1$ pour $a \in K$ et $n(\Gamma, a) = 0$ si $a \in \mathbb{C} \setminus \Omega$.

Théorème 6.2 *Soit $D \subseteq \mathbb{C}$ un domaine. Alors D est simplement connexe si et seulement si chaque cycle Γ dans D est homologue à zéro par rapport à D. En particulier la classe des domaines de Cauchy coincide avec la classe des domaines simplement connexes.*

Démonstration

$\Rightarrow$) Soit D un domaine simplement connexe $\Rightarrow \widehat{\mathbb{C}} \setminus D$ connexe, d'où , pour tout cycle $\Gamma \subseteq D$:

$$\widehat{\mathbb{C}} \setminus D \text{ est contenu dans exactement une composante connexe de } \widehat{\mathbb{C}} \setminus \Gamma$$

Notons que $\infty \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus D$. Parce que $n(\Gamma, a) = 0$ pour tout a dans la composante connexe non bornée de $\mathbb{C} \setminus \Gamma$, on a $n(\Gamma, a) = 0$ pour tout $a \in \mathbb{C} \setminus D$. Donc $\Gamma \underset{D}{\sim} 0$.

$\Leftarrow$) On suppose que D n'est pas simplement connexe.

On va construire un cycle qui n'est pas homologue à zéro par rapport à D.

Comme $\widehat{\mathbb{C}} \setminus D$ est fermé, $\exists \, K_1$ et $K_2 \subseteq \widehat{\mathbb{C}}$ tq :

$$K_1 \cap K_2 = \emptyset \;\text{ et }\; \widehat{\mathbb{C}} \setminus D = K_1 \cup K_2 \;,\; K_j \text{ fermé non vide.}$$

Comme $\infty \notin D$, on peut supposer que $\infty \in K_1$.
Soit $\Omega = \mathbb{C} \setminus K_1$. Alors Ω est ouvert et on a :

$$\Omega = D \cup K_2 \;,\; D = \Omega \setminus K_2 \,.$$

D'après le lemme 6.1, on peut construire un cycle Γ dans Ω tel que :

$$n(\Gamma, a) = 1 \quad \forall \, a \in K_2 \,,\, \Gamma \underset{\Omega}{\sim} 0. \text{ D'autre part, comme } K_2 \cap D = \emptyset, \text{ on a } K_2 \subseteq \mathbb{C} \setminus D.$$

Ainsi, il existe $a \in \mathbb{C} \setminus D$, tel que $n(\Gamma, a) \neq 0$. Donc $\Gamma \underset{D}{\not\sim} 0$.

Théorème 6.3

Soit $D_1 \subseteq \mathbb{C}$ un domaine et soit $f : D_1 \to D_2$ une application conforme de D_1 sur $D_2 = f(D_1)$. Alors D_1 simplement connexe implique que D_2 est simplement connexe.

Démonstration
Soit Γ une courbe fermée dans D_2 paramétrée par $w(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$. Pour $a \notin D_2$, on pose :

$I = 2\pi i \; n(\Gamma, a) = \int_\Gamma \frac{1}{w-a}\, dw$.

- <u>Montrons que $I = 0$</u>

Notons que $\gamma = f^{-1} \circ \Gamma$ est paramétrée par $z(t) = f^{-1}(w\,(t)) \Longleftrightarrow w\,(t) = f\,(z(t))$. D'où

$$I = \int_\alpha^\beta \frac{f'(z(t))\, z(t)}{f(z(t)) - a}\, dt = \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z) - a}\, dz.$$

Comme $\frac{f'}{f-a} \in \mathcal{H}\,(D)$ et que D est, d'après 6.2, un domaine de Cauchy, on conclut que $I = 0$. Donc, d'après 6.2, D_2 est simplement connexe.

Proposition 6.4 :Principe de Carathéodory
Soit $D \subseteq \mathbb{C}$ un domaine et $\mathcal{F}$ une famille normale, non vide, et fermée de $\mathcal{H}\,(D)$. Supposons que $L\,:\,\mathcal{F} \to \mathbb{C}$ soit une application continue. Alors il existe une fonction $f_0 \in \mathcal{F}$ telle que $|L\,(f_0)| = \sup\limits_{f \in \mathcal{F}} \; |L(f)|$.

Démonstration
Soit $S = \sup\limits_{f \in \mathcal{F}} |L\,(f)| \Rightarrow \exists\, f_n \in \mathcal{F}\;;\; |L(f_n)| \to S$.
Parce que $\mathcal{F}$ est normale, le théorème 5.8 de Montel implique l'existence de $f_0 \in \mathcal{H}(D)$ et d'une sous-suite $f_{n_k} \underset{\text{unif.}}{\overset{\text{loc.}}{\longrightarrow}} f_0$. On a: $f_0 \in \overline{\mathcal{F}} = \mathcal{F}$. Comme L est continue : $|L(f_{n_k})| \to |L(f_0)| \Longrightarrow S = |L(f_0)|$.

Remarque Bien sûr cette proposition est une conséquence du fait qu'une famille normale et fermée de $\mathcal{H}(D)$ est compacte et que chaque fonction continue sur un ensemble compact prend son maximum. f_0 s'appelle une fonction extrémale de ce problème de variation.

Théorème de Riemann 6.5
Soit D un domaine simplement connexe de $\mathbb{C}$, $D \neq \mathbb{C}$. Alors :

- 1) il existe une application conforme f de D sur $\mathbb{D} = \{|z| < 1\}$.
- 2) On peut normaliser f telle que $f(z_0) = 0$ et $f'(z_0) > 0 \quad (z_0 \in D)$. Dans ce cas, f est déterminée de façon unique. Elle s'apelle la fonction de Riemann de D sur $\mathbb{D}$.

Remarque On doit exclure $\mathbb{C}$, car sinon, $\exists\, f\,:\,\mathbb{C} \to \mathbb{D}$ surjective. Evidemment f est bornée. Donc, d'après Liouville, f est constante. Contradiction.

Démonstration

2) <u>unicité</u> :

Soient f, g deux applications conformes de D sur $\mathbb{D}$ tel que:

$$f(z_0) = g(z_0) = 0\;,\; f'(z_0) > 0\;,\; g'(z_0) > 0.$$

Posons $h = g \circ f^{-1}$. Alors h est une application conforme de $\mathbb{D}$ sur $\mathbb{D}$ avec $h(0) = 0$. D'où , d'après (4.19),

$$h(z) = e^{i\theta}\, \frac{z-a}{1-\overline{a}\,z} \quad \text{avec} \quad a = 0.$$

c'est à dire :

$$h\,(z) = e^{i\theta} z \Rightarrow h'(0) = e^{i\theta} = g'(f^{-1}(0))\,(f^{-1})'(0) \tag{6.1}$$

$$= \underbrace{g'(z_0)}_{>0}\ \underbrace{\frac{1}{f'(z_0)}}_{>0} > 0 \;\Rightarrow\; \theta = 0 \quad [2\pi]; \tag{6.2}$$

ainsi $h(z) = z$ pour tout $z \in \mathbb{D}$, donc $f = g$. Ce qui prouve l'unicité.

1) existence

I) $D \neq \mathbb{C}$, donc $\exists\, a \in \mathbb{C} \setminus D$. Ainsi, la fonction $f(z) = z - a$ est holomorphe dans D et $Z(f) = \emptyset$ dans D. Comme D est simplement connexe $\underset{6.2}{\Longrightarrow}$ D est un domaine de Cauchy. Par conséquent (3.12):

$\exists\, g \in \mathcal{H}\,(D)$ telle que $g^2 = f$ et $Z(g) = \emptyset$.

- Montrons que g est injective

$$g(z_1) = g(z_2) \Rightarrow g^2(z_1) = g^2(z_2) \Rightarrow z_1 - a = z_2 - a \Rightarrow z_1 = z_2.$$

Posons $D_1 = g(D)$.
- Montrons que g est antisymétrique, c'est à dire pour $w_0 \in D_1 \Rightarrow -w_0 \notin D_1$.

Par l'absurde
Supposons qu'il existe $z_1 \in D$ et $z_2 \in D$ tel que $g(z_1) = -w_0$ et $g(z_2) = w_0$. Alors $(-w_0)^2 = g^2(z_1) = g^2(z_2)$; d'où $z_2 - a = z_1 - a \Rightarrow z_1 = z_2 \Rightarrow w_0 = -w_0 \Rightarrow w_0 = 0$; contradiction à ce que $Z(g) = \emptyset$.

· Comme D_1 est un ouvert, il existe donc $\forall\, w_0 \in D_1$, un disque $D\,(w_0\,,\,r) \subseteq D_1$ tel que :

$$D\,(-w_0\,,\,r) \cap D_1 = \emptyset;$$

c'est à dire, D_1 a des points extérieurs.

· D est simplement connexe, g est conforme de D sur D_1; d'où par le théorème d'invariance 6.3 D_1 est simplement connexe.

· La transformation de Möbius $S(z) = \frac{r}{z+w_0}$ a la propriété que l'image de l'extérieur de $D\,(-w_0\,,\,r)$ est $\mathbb{D}$, c'est à dire

$S\left(\widehat{\mathbb{C}} \setminus D(-w_0, r)\right) = \mathbb{D} \quad \text{avec} \quad S(\infty) = 0.$

Posons $D_2 = S(D_1)$. Notons que $D_1 \subseteq \widehat{\mathbb{C}} \setminus D(-w_0, r)$. Donc $D_2 \subseteq \mathbb{D}$.

· En choisissant une transformation $T(z) = e^{i\theta}\,\frac{z-a}{1-\overline{a}z}$ de $\mathbb{D}$ sur $\mathbb{D}$ tel que $T \circ S \circ g\,(z_0) = 0$, on obtient finalement une application conforme $F = T \circ S \circ g$ de D sur $D_3 = F(D) \subseteq \mathbb{D}$ telle que $F(z_0) = 0$. Notons aussi que D_3 est simplement connexe (6.3).

II) D'après I) on peut supposer que D est simplement connexe, $D \subseteq \mathbb{D}$, $0 \in D$. Considérons

$$\mathcal{F} = \{f \in \mathcal{H}(D) \ : \ f(D) \subseteq \mathbb{D},\ f(0) = 0,\ f \text{ injective}\} \cup \{0\}.$$

Evidemment, $\mathcal{F} \neq \emptyset$. En plus, $\mathcal{F}$ est uniformément bornée, (car $|f| < 1 \quad \forall f \in \mathcal{F}$); donc, d'après Montel (5.8), $\mathcal{F}$ est normale.
De plus $\mathcal{F}$ est fermé. En effet, soit (f_n) une suite dans $\mathcal{F}$ qui converge localement uniformément vers f. Evidemment $f(0) = 0$. Supposons que $f_n \not\equiv 0$. Notons que f_n est injective. D'après le théorème d'Hurwitz, ou bien $f \equiv 0$ ou bien f injective. Donc $f \in \mathcal{F}$.

Posons $L : \mathcal{H}(D) \to \mathbb{C}$, $f \mapsto f'(0)$.

Par le théorème 5.5 de Weierstrass , L est une application linéaire continue.
Par Carathéodory 6.4, $\exists f_0 \in \mathcal{F}$ tel que $|f_0'(0)| = \max\limits_{f \in \mathcal{F}} |f'(0)|$.

On a $|f_0'(0)| \geq 1$, car $f(z) = z \in \mathcal{F}$ et $f'(0) = 1$. Ainsi $f_0 \not\equiv 0$.

- Démonstration de la surjectivité de f_0:
Supposons que $f_0(D) \neq \mathbb{D}$. Alors $\exists\, a \in \mathbb{D}$ tel que $a \notin f_0(D)$.
Soit $S_a(z) = \frac{a-z}{1-\bar{a}\,z}$. Donc $S_a \circ f_0 \ : \ D \to \mathbb{D}$ ne possède pas de zéros dans D.
D est simplement connexe $\underset{3.12}{\overset{5.2}{\Rightarrow}}$ $\exists\, g \in \mathcal{H}(D)$ tel que $g^2 = S_a \circ f_0$.
De même que dans **I**, on montre que g est injective. Notons que $g\,(D) \subset \mathbb{D}$. Posons $b = g(0)$ et $F = S_b \circ g$. D'où $F \ : \ D \to \mathbb{D}$ est injective et satisfait $F(0) = 0$. Donc $F \in \mathcal{F}$.

Montrons que $|F'(0)| > |f_0'(0)|$.
Soit $\psi\,(w) = w^2 \Rightarrow f_0 = \underbrace{S_a^{-1} \circ \psi \circ S_b^{-1}}_{\phi} \circ F \Rightarrow \phi = f_0 \circ F^{-1}$. D'où :

$$(*) \quad |f_0'(0)| = |\varphi'(0)| \cdot |F'(0)|.$$

Comme $\varphi \ : \ \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, $\varphi(0) = 0$, on a par le lemme 4.8 de Schwarz que $|\varphi'(0)| \leq 1$. En plus, comme φ n'est pas une rotation (c'est à dire $\varphi \neq e^{i\theta}\,z$) on a : $|\varphi'(0)| < 1$.
D'autre part, on conclut de $(*)$ que $\varphi'(0) \underset{4.2}{\neq} 0$, car f_0 est injective.

Ainsi $|f_0'(0)| < |F'(0)|$; contradiction à ce que f_0 est extrémale.
Par conséquent f_0 est surjective.

Il reste à normaliser f_0.
Posons $f = \dfrac{|f_0'(0)|}{f_0'(0)}\, f_0$. Alors f est la fonction de Riemann de D sur $\mathbb{D}$.
Corollaire 6.6 Soient D_1 et D_2 deux domaines simplement connexes, $D_j \neq \mathbb{C}$, Alors il existe une application conforme de D_1 sur D_2.

Démonstration Soient $f_j : D_j \to \mathbb{D}$ les fonctions de Riemann associées à D_j. Alors $f_2^{-1} \circ f_1$ est une application conforme de D_1 sur D_2.

Remarque On dit que D_1 et D_2 sont conformément équivalentes.

On termine avec la citation de deux théorèmes fondamenteaux, dont les démonstrations sont trop difficiles et longues pour être données ici.

Théorème 6.7 Soit Ω un domaine simplement connexe, $\Omega \neq \mathbb{C}$, et soit $f : \mathbb{D} \to \Omega$ une application conforme. Alors f possède un prolongement continue sur $\overline{\mathbb{D}} \iff \partial\Omega$ est localement connexe.

Théorème de Carathédory 6.8 Soit Ω un domaine simplement connexe, $\Omega \neq \mathbb{C}$, et $f : \mathbb{D} \to \Omega$ une application conforme.

Alors f possède un prolongement homéomorphique de $\overline{\mathbb{D}}$ sur $\overline{\Omega}$ si et seulement si $\partial\Omega$ est une courbe de Jordan, c'est à dire une image homéomorphe du cercle unité.

Chapter 7

Produits infinis

Déf. $\prod_{n=1}^{\infty} b_n$ est dit convergent si
(1) $\quad b_n \neq 0 \quad \forall n \geq n_0$
(2) $\quad p := \lim_{N\to\infty} \prod_{n=n_0}^{N} b_n$ existe (dans $\mathbb{C}$)
(3) $\quad p \neq 0$.

On note alors $\prod_{n=1}^{\infty} b_n = \left(\prod_{n=1}^{n_0-1} b_n\right) p$

Exemples • $\quad b_n = \frac{1}{n} \Longrightarrow \prod_{n=1}^{N} b_n = \frac{1}{N!} \longrightarrow 0$ (divergente)
• $\quad b_n = \frac{1}{2} \Longrightarrow \prod_{n=1}^{N} b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^N \longrightarrow 0$ (divergente)

Prop. 7.1 *Soit* $b_n \neq 0 \quad \forall n$.
i) Si $\prod_{n=1}^{\infty} b_n$ *converge, alors* $b_n \to 1$.
ii) $\prod_{n=1}^{\infty} b_n$ *converge* $\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0\, \exists n_1 \in \mathbb{N}$ *tq* $\forall N \geq M \geq n_1 : \left|\prod_{n=M}^{N} b_n - 1\right| \leq \varepsilon$.
Dém. Utiliser $\frac{p_{n+1}}{p_n} = b_{n+1}$ ainsi que le critère de Cauchy.

Par convention on écrit $1 + a_n$ au lieu de b_n. Donc, si $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n)$ converge, alors $a_n \to 0$ si $n \to \infty$.
Déf. Un produit infini $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n)$ est dit absolument convergent si $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + |a_n|)$ est convergent.

Théorème 7.2 *Soit* $b_n \neq 0$, *i.e.* $a_n \neq -1 \quad \forall n$. *Prenons la détermination principale de* $\log(1 + a_n)$. *Alors on a les équivalences suivantes:*
(1) $\quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *converge*
(2) $\quad \prod_{n=1}^{\infty}(1 + |a_n|)$ *converge*
(3) $\quad \sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + |a_n|)$ *converge*
(4) $\quad \sum_{n=1}^{\infty} |\log(1 + a_n)|$ *converge.*
Dém. *Préliminaires*: On a pour $|a| \leq \frac{1}{4}$ $(a \in \mathbb{C})$

$$\frac{1}{2}|a| \leq |\log(1 + a)| \leq \frac{4}{3}|a|$$

En effet:
•$|\log(1 + a)| = \left|a - \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{3}a^3 + \cdots\right| \leq$

$\leq |a|\left(1+|a|+|a|^2+\cdots\right)=\frac{|a|}{1-|a|}\leq\frac{4}{3}|a|$.

$\bullet |\log(1+a)|\geq |a|-|a|^2\left(1+|a|+|a|^2+\cdots\right)=|a|-\frac{|a|^2}{1-|a|}\geq\frac{1}{2}|a|$.

(1)$\Longrightarrow$ (2)
$1+x\leq e^x\ \forall x\in\mathbb{R}$
$\Longrightarrow p_N=\prod_{n=1}^N(1+|a_n|)\leq\prod_{n=1}^N e^{|a_n|}=\exp\left(\sum_{n=1}^N|a_n|\right)$
$\Longrightarrow (p_N)_N$ bornée et croissante $\Longrightarrow (p_N)_N$ convergente.

(2)$\Longrightarrow$ (3)
$\log\prod_{n=1}^N(1+|a_n|)=\sum_{n=1}^N\log(1+|a_n|)$.

(3)$\Longrightarrow$ (4)
Comme $|a_n|\to 0$, on a $|a_n|\leq\frac{1}{4}\ \forall n\geq n_0$. Donc
$|\log(1+a_n)|\leq\frac{4}{3}|a_n|\leq\frac{8}{3}\log(1+|a_n|)$.

(4)$\Longrightarrow$ (1)
Comme $|a_n|\to 0$, on a $|a_n|\leq\frac{1}{4}\ \forall n\geq n_0$. Donc
$|a_n|\leq 2|\log(1+a_n)|$.

Corollaire 7.3 *La convergence absolue d'un produit infini entraîne la convergence simple. En plus on peut permuter les termes d'un produit infini absolument convergent, sans por cela changer la convergence et la valeur du produit*

Dém. $\prod_{n=1}^\infty(1+|a_n|)$ converge $\Longrightarrow\sum_{n=1}^\infty|\log(1+a_n)|$ converge $\Longrightarrow\sum_{n=1}^\infty\log(1+a_n)$ converge $\Longrightarrow\prod_{n=1}^\infty(1+a_n)$ converge (utiliser $\log(\prod_{n_0}^N b_n)=\sum_{n_0}^N\log b_n$ si b_n proche de 1). La deuxième assertion est une conséquence de 7.2 et de sa validité pour les séries entières.

Prop. 7.4 *Pour $a_n\in\mathbb{R}$ tq $0\leq a_n<1$ on a:*
$\prod_{n=1}^\infty(1-a_n)$ *converge* $\Longleftrightarrow\sum_{n=1}^\infty a_n$ *converge.*

Dém. " $\Longleftarrow$ " Utiliser (7.2) et (7.3).
" $\Longrightarrow$ " $1-x\leq e^{-x}\ \forall x\in\mathbb{R}\Longrightarrow$

$$\underbrace{\prod_{n=1}^N(1-a_n)}_{\to p\neq 0}\leq\prod_{n=1}^N\exp(-a_n)=\exp\left(-\sum_{n=1}^N a_n\right)$$

$\Longrightarrow\sum_{n=1}^N a_n$ bornée et croissante, donc convergeante.

Lemme 7.5 *Soit $a_n\in\mathbb{C}$. Alors*

$$\left|\prod_{n=1}^N(1+a_n)\ -1\right|\leq\left(\prod_{n=1}^N(1+|a_n|)\right)-1.$$

Dém. Par récurrence:
$*\quad n=1$ ok.
$*\quad n\to n+1$

$\left|\prod_{n=1}^{N+1}(1+a_n)\ -1\right|=\left|(1+a_{N+1})\prod_{n=1}^N(1+a_n)\ -1\right|\leq$

$\leq\left|\prod_{n=1}^N(1+a_n)\ -1\right|+|a_{N+1}|\prod_{n=1}^N(1+|a_n|)\leq$

$\leq \left(\prod_{n=1}^{N}(1+|a_n|)\right) - 1 + |a_{N+1}| \prod_{n=1}^{N}(1+|a_n|) =$
$= \left(\prod_{n=1}^{N+1}(1+|a_n|)\right) - 1.$

Déf. $f_n \in H(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ouvert.
$\prod_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ converge localement uniformément dans Ω si:
$\forall K \subseteq \Omega$, K compact, $\exists n_0 = n_0(K)$ tq $\prod_{n=n_0}^{\infty} f_n(z)$ converge uniformément sur K vers une fonction non nulle.

7.6 Théorème de Weierstrass *Soit $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ouvert, $f_n \in H(\Omega)$. Si $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(z)|$ est localement uniformément convergeante dans Ω, alors $\prod_{n=1}^{\infty}(1+f_n(z))$ est localement uniformément convergeante dans Ω vers une fonction f holomorphe , tq $m(f, z_0) = \sum_n m(1+f_n, z_0)\, \forall z_0 \in \Omega$.*
Remarque $\sum_n m(1+f_n, z_0)$ est une somme finie $\forall z_0 \in \Omega$; le nombre de termes dépend de z_0

Dém. Soit $K \subseteq \Omega$ compact et $\varepsilon > 0$. Hypothèse $\Longrightarrow \exists n_0(K)$ tq $\sum_{n=n_0}^{m} |f_n(z)| \leq \varepsilon\ \forall z \in K, \forall m \geq n_0$.
Soit $p_n = \prod_{\ell=1}^{n}(1+f_\ell(z))$. Alors
$\Longrightarrow |p_n - p_m| = |\prod_{\ell=1}^{n}(1+f_\ell) = \prod_{\ell=1}^{m}(1+f_\ell)| =$
$\underset{n>m}{=} |\prod_{\ell=1}^{m}(1+f_\ell)|\ \left|\prod_{\ell=m+1}^{n}(1+f_\ell)\ -1\right| \underset{7.5}{\leq}$
$\leq \prod_{\ell=1}^{m}(1+|f_\ell|)\left(\prod_{\ell=m+1}^{n}(1+|f_\ell|)\ -1\right) \leq$
$\underset{1+x\leq e^x}{\leq} \exp\left(\sum_{\ell=1}^{m}|f_\ell|\right)\left(\exp\left(\sum_{\ell=m+1}^{n}|f_\ell|\right)-1\right) \leq$
$\leq e^C(e^\varepsilon - 1) \leq e^C \varepsilon e^\varepsilon \leq \tilde{C}\varepsilon \quad \forall z \in K,\ \forall\, n > m \geq n_0.$
$\Longrightarrow (p_n)_n$ unif. conv. sur K vers une fonction f.

Il reste à montrer que $\forall K \subseteq \Omega$, K compact, $\exists n_0$ tq $\left(\prod_{\ell=n_0}^{N}(1+f_\ell)\right)_N$ converge pour $N \to \infty$ vers une fonction non nulle!

En effet, posons $\widetilde{p}_n := \prod_{\ell=n_0}^{n}(1+f_\ell)$. Alors
$|\widetilde{p}_n - 1| \leq e^{\sum_{\ell=n_0}^{n}|f_\ell|} - 1 \leq e^\varepsilon - 1 \leq \frac{1}{2}\ \forall n \geq n_0, \forall z \in K.$
$\Longrightarrow |\lim_{n\to\infty} \widetilde{p}_n(z) - 1| \leq \frac{1}{2}\ \forall z \in K$
$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \widetilde{p}_n(z) \neq 0\ \forall z \in K.$

Comme les zéros d'une fonction holomorphe sont isolés, l'assertion sur l'ordre de ceux-ci est claire.

Corollaire 7.7 *Sous les conditions du théorème précédent, on a* $\dfrac{f'}{f} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n'}{1+f_n}$*;*
la convergence étant localement uniforme sur $\Omega \setminus Z(f)$.

Dém. $p_n = \prod_{\ell=1}^{n}(1+f_\ell)$ converge loc. unif. vers $f \underset{7.6}{\Longrightarrow} f \in H(\Omega)$ et $p_n' \to f'$ loc. unif.
Notons que $\frac{p_n'}{p_n}$ holomorphe sur $\Omega \setminus Z(f) \Longrightarrow \frac{p_n'}{p_n} \to \frac{f'}{f}$ loc. unif. sur $\Omega \setminus Z(f)$. Mais
$\dfrac{p_n'}{p_n} = \displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} \frac{f_\ell'}{1+f_\ell} \Longrightarrow$ assertion.

P polynôme de degré $N \Longrightarrow P(z) = C\prod_{j=1}^{N}(z-a_j)$. On voudrait: $f \in H(\mathbb{C}) \Longrightarrow f(z) = e^{g(z)}\prod_{j=1}^{\infty}(z-a_j)$ où $f(z) = e^{g(z)}\prod_{j=1}^{\infty}(1-\frac{z}{a_j})$. Notons cependant que ce premier produit diverge toujours si f a un nombre infini de zéros, tandis que le deuxième produit diverge dans la plupart des cas. Solution: introduire des facteurs de convergence:

$$f(z) = e^{g(z)}\prod_{j=1}^{\infty}\left[(1-\frac{z}{a_j})e^{h_j(z)}\right].$$

Déf. *Facteurs de Weierstrass*
$E_0(z) = 1 - z$
$E_p(z) = (1-z)\exp\left(z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \cdots + \frac{z^p}{p}\right),\ p \in \mathbb{N}^*$

Remarque: $-\log(1-z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}z^n,\ |z| < 1$; donc $E_p \approx 1$.

Proposition 7.8 *$z = 0$ est une racine d'ordre $p+1$ de $1 - E_p(z)$ ($p \in \mathbb{N}$) et*

$$|1 - E_p(z)| \leq |z|^{p+1} \quad (|z| \leq 1).$$

Dém. $\underline{p=0}$ ok.
$\underline{p>0}$: $(1-E_p)'(z) = z^p\exp\left(z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \cdots + \frac{z^p}{p}\right) \Longrightarrow m(0, 1-E_p) = p+1$.
Considérons $f(z) = \dfrac{1-E_p(z)}{z^{p+1}}$. 2.18 $\Longrightarrow f \in H(\mathbb{C}) \Longrightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ converge $\forall z \in \mathbb{C}$. Notons que $a_n \geq 0$. Ainsi $|f(z)| \leq \sum_{n=0}^{\infty}a_n|z|^n \underset{|z|\leq 1}{\leq} \sum_{n=0}^{\infty}a_n = f(1) = 1$.
$\Longrightarrow |1 - E_p(z)| \leq |z|^{p+1}$.

7.9 Théorème de Weierstrass sur les produits infinis
Soit $(a_n)_n$ une suite dans $\mathbb{C}$, $a_n \neq 0$ tq $|a_n| \to \infty$. Soit $p_n \in \mathbb{N}$ tq

$$(W) \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{|a_n|}\right)^{1+p_n} < \infty \quad \forall r > 0$$

Alors le produit infini $\prod_{n=1}^{\infty}E_{p_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)$ *converge localement uniformément sur $\mathbb{C}$ vers une fonction entière p telle que*
$p(z) = 0 \Longleftrightarrow z \in \{a_1, a_2, \cdots\}$ et tq
$m(p, z) = \underbrace{\#}_{\text{card.}}\{n \in \mathbb{N} : a_n = z\}$.

Dém. i) Montrons que $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1 - E_{p_n}(\frac{z}{a_n})\right)$ converge loc. unif. dans $\mathbb{C}$.
Soient $K \subseteq \mathbb{C}$ compact, $r > 0$ tq $K \subseteq D(0,r)$ et $z \in K$. Alors $\left|\frac{z}{a_n}\right| \leq 1 \quad \forall n \geq n_0(r)\ \forall |z| \leq r$.
$$\underset{7.8}{\Longrightarrow} \left|1 - E_{p_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)\right| \leq \left|\frac{z}{a_n}\right|^{p_n+1} \leq \left(\frac{r}{|a_n|}\right)^{p_n+1} \quad \forall |z| \leq r, \quad \forall n \geq n_0(r).$$

$\underset{(W)}{\overset{7.6}{\Longrightarrow}}$ l'assertion.

Remarques i) Les produits $\prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}(\frac{z}{a_n}) =$

$$= \prod_{n=1}^{\infty}(1-\frac{z}{a_n})\exp\left(\frac{z}{a_n}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{p_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{p_n}\right)$$

s'appellent les produits de Weierstass.

ii) (W) est satisfait si $p_n = n-1$. En effet $|a_n| \to \infty \Longrightarrow \exists k_0(r) \in \mathbb{N} : \frac{r}{|a_n|} \leq \frac{1}{2}\ \forall k \geq k_0$.

$$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{|a_n|}\right)^{1+(n-1)} \leq \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n := M < \infty.$$

Est-ce qu'on peut choisir p_n plus petit que $n-1$?

Déf $\quad \tau := \inf\{\alpha > 0 : \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{|a_n|}\right)^{\alpha} < \infty\}$ s'appelle l'indice de convergence.

Exemples: $a_n = n \Longrightarrow \tau = 1$, $a_n = n^2 \Longrightarrow \tau = \frac{1}{2}$ $a_n = \log n \Longrightarrow \tau = \infty$.

Proposition 7.10 *Suppsons que* $|a_n| \nearrow \infty$. *Alors* $\tau = \limsup_{n\to\infty} \dfrac{\log n}{\log |a_n|}$.

Dém. Posons $L = \limsup_{n\to\infty} \frac{\log n}{\log|a_n|}$.
Supposons s.p.g. que $|a_n| > 1\ \ \forall n$.
i) $\underline{\tau \leq L}$.
Si $L = \infty$, ok. Supposons $0 \leq L < \infty$. Soit $\varepsilon > 0$. $\exists n_0$ tq $L+\varepsilon \geq \frac{\log n}{\log|a_n|}\ \forall n \geq n_0$.
$\underset{n\geq n_0}{\Longrightarrow} (\log|a_n|)(L+\varepsilon) \geq \log n \Longrightarrow (1+\varepsilon)(\log|a_n|)(L+\varepsilon) \geq (\log n)(1+\varepsilon) \Longrightarrow$
$\Longrightarrow |a_n|^{(L+\varepsilon)(1+\varepsilon)} \geq n^{1+\varepsilon}$.

Mais $\displaystyle\sum_n \frac{1}{|a_n|^{(L+\varepsilon)(1+\varepsilon)}} \leq \sum_n \frac{1}{n^{1+\varepsilon}} < \infty$
$\Longrightarrow \tau \leq (L+\varepsilon)(1+\varepsilon);\ \ \varepsilon \to 0 \Longrightarrow \tau \leq L$.

ii) $\underline{L \leq \tau}$
S.p.g. $\tau < \infty$. Hypothèse $\Longrightarrow \displaystyle\sum \frac{1}{|a_n|^{\tau+\varepsilon}}$ converge $\forall \varepsilon > 0$
$\underset{Olivier}{\overset{|a_n|\nearrow\infty}{\Longrightarrow}} n\dfrac{1}{|a_n|^{\tau+\varepsilon}} \to 0$
$\Longrightarrow n \leq |a_n|^{\tau+\varepsilon}\ \forall n \geq n_0$
$\Longrightarrow \log n \leq (\tau+\varepsilon)\log|a_n| \Longrightarrow \frac{\log n}{\log|a_n|} \leq \tau+\varepsilon\ \forall n \geq n_0$
$\Longrightarrow \limsup_n \frac{\log n}{\log|a_n|} \leq \tau+\varepsilon\ \ (\forall \varepsilon > 0) \Longrightarrow L \leq \tau$.

Proposition 7.11 *Supposons que* $a_n \to \infty$ *et que* $0 \leq \tau < \infty$. *Alors on peut choisir dans (W)* $p_n = [\tau]$ *(partie entière de* τ*).*

Dém. claire.

Remarques Le plus simple des produits de Weierstrass a la forme $\prod_n(1-\frac{z}{a_n})$, produit qui est convergent si $\tau = 0$, i.e. si $\sum \frac{1}{|a_n|^{\varepsilon}}$ est convergent $\forall \varepsilon > 0$ ou encore si $\sum \frac{1}{|a_n|}$

converge. Ce qui correspond dans (W) à poser $p_n = 0$ ($\Longrightarrow E_0(z) = 1 - z$).

7.12 Théorème de factorisation de Weierstrass
Soit $f \in H(\mathbb{C}), f \not\equiv 0$ et $0 \neq a_1, a_2, \cdots$ (multiplicité incluse) les zéros de f. Supposons que $|a_n| \nearrow \infty$. Alors $\exists m \in \mathbb{N}$, $\exists g \in H(\mathbb{C}), l; \exists\ (p_n)_n \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ tq

$$f(z) = e^{g(z)} z^m \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}(\frac{z}{a_n}).$$

Dém. On choisit d'abord les p_n tq (W) soit satisfaite, i.e.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{|a_n|}\right)^{1+p_n} < \infty\ \forall r > 0$$
[$p_n = n - 1$ p. ex.]. 7.9$\Longrightarrow p(z) = z^m \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}(\frac{z}{z_n}) \in H(\mathbb{C})$, où $m = \mathrm{ord}(f, 0)$.

Posons $h(z) = \frac{f(z)}{p(z)}$. Alors $h \in H(\mathbb{C})$, car les a_n sont des singularités artificielles. En plus $h \neq 0$ dans $\mathbb{C} \Longrightarrow h(z) = e^{g(z)}$ pour un $g \in H(\mathbb{C})$.

Ainsi $f(z) = e^{g(z)} p(z)$.
Exemple: $f(z) = \sin(\pi z)$.
$Z(f) = \mathbb{Z}$ et chaque zéro est simple. Posons donc $a_n = n$.
Indice de convergence de $(a_n)_n$: $\tau \underset{7.10}{=} 1$.
$$7.12 \Longrightarrow f(z) = e^{g(z)}\ z \prod_{n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}} (1 - \frac{z}{n}) exp(\frac{z}{n}),$$
où $g \in H(\mathbb{C})$.
Ce produit est absolument convergent (voir démo de 7.9), donc on peut permuter les indices et les regrouper en couples de n et $-n$.
$$\Longrightarrow f(z) = e^{g(z)}\ z \prod_{n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}} (1 - \frac{z}{n})(1 + \frac{z}{n}) \exp(\frac{z}{n}) \exp(-\frac{z}{n}) =$$
$$= e^{g(z)}\ z \prod_{n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}} (1 - \frac{z^2}{n^2}).$$
On peut montrer que $g(z) = \log \pi$, donc

$$\frac{\sin(\pi z)}{\pi z} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right).$$

Pour $z = \frac{1}{2}$ on obtient:

$$\frac{2}{\pi} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{4n^2}\right),$$

donc

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdots}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdots}$$

(produit de Wallis)