UNIVERSITE DE LORRAINE *Année Universitaire 2014/2015*
Département de Mathématiques

Prof. Raymond Mortini

AC 1 nombres complexes

Exercice 1

i) Déterminer les coordonnées polaires des nombres complexes suivants:

$$z_1 = \left(\frac{1+3i}{1-2i}\right)^{15}, \qquad z_2 = (1-i\sqrt{3})^{51},$$
$$z_3 = 1 - e^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

ii) Calculer les racines carrées de $112 - 66i$ et déterminer les zéros du polynôme

$$(1+i)z^2 - (7+13i)z + 2 + 60i.$$

iii) Résoudre les équations, respectivement inégalités, suivantes:

a) $z^2 - 2\overline{z} + 1 = 0$ b) $z^3 + \overline{z} = 0$,

c) $\left|\frac{z-i}{z+2}\right| < 2$, d) $\operatorname{Im}\left(\frac{z+i}{z-1}\right) > 1$.

Exercice 2

Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}, |z_1| < 1, |z_2| < 1$ et

$$\triangle = \{t_1 z_1 + t_2 z_2 + t_3 : t_1, t_2, t_3 > 0, t_1 + t_2 + t_3 = 1\}.$$

Esquisser $\triangle$ et montrer qu'il existe une constante $K \geq 1$ telle que

$$|1 - z| \leq K(1 - |z|) \text{ pour tout } z \in \triangle.$$

Exercice 3

Soit $a \in \mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Montrer que

a) L'application L_a définie par $L_a(z) = \frac{a-z}{1-\overline{a}z}$ est une bijection holomorphe de $\mathbb{C} \setminus \{1/\overline{a}\}$ sur son image D. Déterminer D ainsi que l'inverse de L .

b) $\left|\frac{a-z}{1-\overline{a}z}\right| < 1 \iff |z| < 1$ et $\left|\frac{a-z}{1-\overline{a}z}\right| = 1 \iff |z| = 1$

c) L_a est une involution holomorphe de $\mathbb{D}$ sur $\mathbb{D}$.

d) Soit $f(z) = -z\frac{1-\bar{z}}{1-z}$. Montrer que f est une involution bijective non-holomorphe de $\mathbb{D}$ sur $\mathbb{D}$.

Exercice 4

Soient $(a_j, b_j) \in \mathbb{D} \times \mathbb{D}$. Montrer que

$$\left|\prod_{j=1}^{n} a_j - \prod_{j=1}^{n} b_j\right| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_j - b_j|.$$

Exercice 5

i) Soit (a_n), $a_n \neq 0$, une suite de nombres complexes. Alors

$$\liminf \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \liminf \sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup \sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.$$

ii) Déterminer $\lim \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

AC 2 Holomorphie

Exercice 5

Déterminer tous les points pour lesquels les fonctions suivantes sont $\mathbb{C}$-différentiables:

(1) $f(x,y) = x^4y^5 + ixy^3$
(2) $g(x,y) = y^2 \sin x + iy$
(3) $h(x,y) = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$

Exercice 6

Chercher tous les points pour lesquels les fonctions suivantes

$f(z) = \exp(-z^{-4})$ si $z \neq 0$ et $f(0) = 0$,
$g(z) = \big(|z|^2 - 1\big) \exp(\overline{z})$,
$h(z) = \overline{z}\ ^4\big(1 - |z|^5\big)$,
$k^*(z) = \overline{k(\overline{z})}$, où k est holomorphe dans $\mathbb{C}$

(a) sont $\mathbb{R}$-différentiables,
(b) sont $\mathbb{C}$-différentiables,
(c) satisfaient les équations de Cauchy-Riemann,
(d) sont holomorphes

et déterminer les dérivées de Wirtinger.

Exercice 7

Montrer que pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ les fonctions suivantes sont les parties réelles de fonctions holomorphes :

(1) $u(x,y) = 2x^3 - 6xy^2 + x^2 - y^2 - y$,
(2) $u(x,y) = x^2 - y^2 + e^{-y}\sin x - e^{-y}\cos x$.

Déterminer explicitement v tel que $f = u+iv$ soit holomorphe et exprimer f en fonction de z, $z = x + iy$.

On suppose maintenant que $(x,y) \in \mathbb{C}^2$ et que $z \in \mathbb{C}$. Calculer

$$2u\left(\frac{z}{2}, -i\frac{z}{2}\right) - \overline{f(0)}.$$

Exercice 8

Soit D un domaine dans $\mathbb{C}$ et soit f holomorphe dans D. Montrer que sous chacune des conditions suivantes, f est constante:

(a) $\operatorname{Im} f(z) = \text{const.}$ (b) $|f(z)| = \text{const.}$
(c) $\operatorname{Arg} f(z) = \text{const.}$ ($f(z) \neq 0$ dans D)
(d) $\big(\operatorname{Im} f(z)\big)^2 - \operatorname{Re} f(z) = \text{const.}$

AC 3 transformations de Möbius

Exercice 9

Pour $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq b$ soit S le segment $[a, b] = \{z \in \mathbb{C} : z = (1-t)a + tb,\ 0 \leq t \leq 1\}$ et soit C le demi-cercle $|z| = 1, \operatorname{Im} z \leq 0$. Trouver une transformation de Möbius T telle que $T(S) = C$.

Exercice 10

Déterminer l'image du cercle unité, de l'axe réelle et de l'axe imaginaire par rapport la transformation de Möbius $w = \dfrac{i-z}{1+z}$.

Exercice 11

Est-ce-qu'il existe des transformations de Möbius T telles que, dans l'ordre donnée, les images des points $0, 2, i, \infty$ soient $-2, 0, \infty, -i$? Même question pour les quadruplets $z = (1, i, 0, 3i)$ et $w = (i, 1, \infty, 0)$.

Exercice 12

Déterminer toutes les transformations de Möbius T satisfaisant $T(0) = 0$ telle que l'image du demi-plan $\operatorname{Im} z > -2$ est le disque unité $\mathbb{D}$

Exercice 13

Soit $D = \{z \in \mathbb{C} : |z-8| < 16,\ |z-3| > 9\}$ et $R = \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < 1\}$. Pour quelles valeurs de r existe-t-il une transformation de Möbius T telle que $T(D) = R$?
Est-ce-qu'on peut choisir T telle que $T(0) = 0$ et $T'(0) > 0$? Déterminer T dans le cas d'une réponse affirmative. Est-ce-que T est unique?

Exercice 14

Montrer que chaque transformations de Möbius dont l'image du demi-plan Re $(z) < 0$ est le disque unité a la forme

$$T(z) = \mathrm{e}^{i\theta}\frac{z-a}{z+\overline{a}},$$

où Re $a < 0$. Est-ce-que la réciproque est-elle vraie?

AC 4 séries entières

Exercice 15

Soit $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$ la fonction exponentielle, $\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$, $\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$, $\cosh z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})$ et $\sinh z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z})$. Montrer que

a) $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^z$.
b) $e^{z+w} = e^z e^w$; $e^z \neq 0$; $(e^z)^n = e^{nz}, n \in \mathbb{N}$, $|e^z| = e^{\mathrm{Re}\, z}$; $e^{iz} = \cos z + i \sin z$, $\sin^2 z + \cos z^2 = 1$.
c) $\sin(z + w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w$ et que $\cos(z + w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w$.
d) Représenter sous forme de séries entières $\sum a_n z^n$ les fonctions $\sin z$, $\cos z$, $\sinh z$ et $\cosh z$, et calculer les dérivées de ces fonctions.
e) En utilisant (d), montrer que $\cos x$ est strictement décroissante sur l'intervalle $[0, 2]$, et que $\cos 2 < 0$. En déduire que $\cos x$ possède une racine unique sur $[0, 2]$. Cette racine est notée par $\pi/2$.
f) Déduire de (e) et (c) que $\sin(z + \pi/2) = \cos z$, $\cos(z + \pi/2) = -\sin z$, $\sin(\pi + z) = -\sin z$, $\cos(\pi + z) = -\cos z$.
g) Déduire de (f) que $\sin z$ et $\cos z$ sont des fonctions périodiques.
h) Est-ce que les fonctions e^z, $\sinh z$ et $\cosh z$ sont périodiques?
i) Calculer les parties réelles et imaginaires des fonctions $\sin z$, $\cos z$, $\sinh z$ et $\cosh z$ et déterminer leur module en fonction de x et y où $z = x + iy$.
j) Déterminer les racines des fonctions $\sin z$, $\cos z$, $\sinh z$ et $\cosh z$.
k) Déterminer toutres les périodes de e^z, $\sin z$, $\cos z$, $\sinh z$ et $\cosh z$.
l) Est-ce qu'il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que $\sin z = 2$? Résoudre l'equation $\cos z = i$.

Exercice 16

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes et étudier la convergence sur la frontière de leur disque de convergence.

(a) (1) $$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n z^{3n},$$ (2) $$\sum_{n=1}^{\infty} \left(e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right) z^n,$$

(3) $$\sum_{n=1}^{\infty} 5^n \frac{n!}{n^n} z^n,$$ (4) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{n!}.$$

Exercice 17

a) Soient $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ et $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence $R(f)$, resp. $R(g)$. Montrer que la série $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n$ converge vers $f(z) + g(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| < \min\{R(f), R(g)\}$. En déduire que $R(f + g) \geq \min\{R(f), R(g)\}$.

b) Trouver des séries entières $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ dont le rayon de convergence est égale à 0 resp. 3/2.
c) Trouver des séries entières f et g tel que le rayon de convergence est égale à 0, mais que celui de $f + g$ est égale à 1 respectivement ∞.

Exercice 18

Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une série de MacLaurin qui converge pour $|z| < 1$ et soit $\mathcal{M}(r) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n \quad (0 \leq r < 1)$. Démontrer les assertions suivantes:

(a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 \, dt = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}$ pour $0 \leq r < 1$.

(b) Si en plus f est borné dans $|z| < 1$, alors:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty \text{ et}$$
$$\mathcal{M}(r) = o\left(\frac{1}{\sqrt{1-r}}\right) \quad (r \to 1^-).$$

Exercice 19

Soit $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n z^n$.
a) Donner une formule explicite pour $f(z)$, $|z| < 1$.
b) Montrer que f est injective sur $\mathbb{D}$.
c) Soit $g(z) = (1 + z)/(1 - z)$. Quelles relations y a-t-il entre f et g?
d) Déterminer $g(\mathbb{D})$ et $f(\mathbb{D})$.

Exercice 20

a) Soit $p(z) = \sum_{n=0}^{N} c_n z^n$. Supposons que $c_0 \geq c_1 \geq \cdots \geq c_N > 0$. Montrer que si z_0 est une racine de p, alors $|z_0| \geq 1$.

b) Montrer que le module de toutes les racines de $f_n(z) = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} z^j$ est plus grand ou égal à 1.

Exercice 21

Existe-t-il une fonction analytique f définie sur un disque D centrée en 0 telle que
(1) $\forall n$ tel que $1/n \in D : f(1/2n) = f(1/(2n + 1)) = 1/n$,
(2) $\forall n$ tel que $1/n \in D : f(1/n) = f(-1/n) = 1/n^3$,
(3) $\forall n$ tel que $1/n \in D : f(1/n) = f(-1/n) = 1/n^2$,
(4) $\forall n$ tel que $1/n \in D : f(1/n) = n/(1 + n)$.

AC 4 Intégrales complexes, théorème du maximum

Exercice 22

Soit Γ le chemin déterminé par la frontière du domaine $G = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2, \text{ Im } z > 0\}$, parcouru dans le sens positive. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_\Gamma \frac{\overline{z}}{z}\, dz$.

Exercice 23

(a) Soit $S = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \arg z \leq \alpha\}$, où $0 < \alpha \leq 2\pi$. Soit $f : S \to \mathbb{C}$ une fonction continue avec $\lim zf(z) = A$ pour $z \in S, z \to \infty$. Montrer que

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R} f(z)\, dz = i\alpha A,$$

où Γ_R est l'arc du cercle $|z| = R$ contenu dans S.

(b) Soit f une fonction continue dans $H = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im} z \geq 0\}$. Supposons que $\displaystyle\lim_{\substack{z\to\infty \\ z\in H}} f(z) = 0$. Soit $\Gamma_r = \{z \in H : |z| = r\}$ et $m > 0$. Montrer que

$$\lim_{r\to\infty} \int_{\Gamma_r} e^{imz} f(z)\, dz = 0.$$

Exercice 24

En intégrant la fonction e^{iz^2} lelong du chemin déterminé par la frontière du secteur $0 \leq |z| \leq R,\ 0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{4}$, on montrera que

$$\int_0^\infty \cos(x^2)\, dx = \int_0^\infty \sin(x^2)\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Exercice 25

Calculer, sans utiliser le théorème des résidus, les intégrales suivantes ($a \notin \Gamma_1$):

$$\int_{\Gamma_1} \frac{e^{z^2}}{(z-a)^3}\, dz \quad \text{et} \quad \int_{\Gamma_2} \frac{\sin z}{z^2+4}\, dz, \tag{1}$$

où Γ_1 est le cercle de centre 1 et de rayon 2 et Γ_2 est le cercle de centre 0 et de rayon 3.

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=2} z^2 \exp\frac{z+1}{z-1}\, dz \quad \text{et} \quad \int_{|z-a|=a} \frac{z\, dz}{z^4-1}, \quad (a > 1). \tag{2}$$

Exercice 26

Notons par $\mathcal{C}$ le cercle de centre 0 et de rayon r parcouru dans le sens positif ($r > 0$). Soit f holomorphe dans $\mathbb{C}$. Déterminer les valeurs des intégrales

$$\int_{\mathcal{C}} f(z)dz, \quad \int_{\mathcal{C}} \overline{f(z)}dz, \quad \int_{\mathcal{C}} f(\overline{z})dz.$$

Exercice 27

Soit f une fonction entière et $m(r) = \sup_{|z|=r} |f(z)|$. Montrer que f est un polynôme si et seulement si

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\log m(r)}{\log r} < \infty.$$

Calculer dans ce cas le degré du polynôme.

Exercice 28

Soit S le segment $S = \{z \in \mathbb{C} : |\text{Im } z| < \frac{\pi}{2}\}$ et $f(z) = \exp(\exp z)$. Montrer que $|f(z)| = 1$ pour tout $z \in \partial S$. Est-ce que $|f(z)| \leq 1$ pour tout $z \in S$? Comparer avec le théorème du maximum.

AC 5 Théorème du résidu

Exercice 29

(2) En intégrant lelong de la frontière du secteur $0 < |z| < R,\ 0 < \arg z < \frac{2\pi}{n}$, $(n = 2, 3, \cdots)$, on démontrera que

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^n}\,dx = \frac{\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}}.$$

(3) Déterminer la valeur de l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{(1+x^2)^2}\,dx.$$

Exercice 30

Calculer avec le théorème du résidu les intégrales suivantes:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos x}{5+\cos x}\,dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2+x+1}\,dx.$$

Exercice 28

Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{|z-1|=2} \frac{e^z + e^{1/z}}{z(z-1)}\,dz$.

AC 6 Théorèmes de Laurent et de Rouché

Exercice 31

(a) Développer la fonction $f(z) = \dfrac{z^2 - 2z + 5}{(z-2)(z+i)(z-i)}$ en série de Laurent au point $z_0 = 2$ et dans la couronne $1 < |z| < 2$.

(b) Déterminer les séries de Laurent de la fonction $f(z) = \dfrac{z^2 - 1}{(z+2)(z+3)}$ dans les domaines $\Omega_1 = \{z \in \mathbb{C} : 2 < |z| < 3\}$ et $\Omega_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 3\}$.

(c) Déterminer les trois premiers coefficients non nuls des séries entières pour la fonction $f(z) = \tan z$, en $z_0 = 0$, $z_1 = \frac{\pi}{4}$ et $z_2 = i\pi$. Quels sont les rayons de convergences?

(c) Déterminer, pour $j = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$, les coefficients a_j de la série de Laurent en $z_0 = \frac{\pi}{2}$ pour la fonction $f(z) = \tan z$. Quel est son domaine de convergence?

(d) Mêmes questions pour f dans le domaine $D = \{z \in \mathbb{C} : 2 < |z| < 3,5\}$.

Exercice 32

Calculer en chaque singularité isolée les résidus des fonctions suivantes:

$$\frac{1}{\sin(1/z)}, \quad \frac{z^{2n}}{(1+z)^n}, \quad \exp(-1/z^4).$$

Exercice 33

Soit $n \in \{1, 2, \cdots\}$ et $a \in \mathbb{R}$. Supposons que $a > e$. Prouver que l'équation $az^n - e^z = 0$ possède dans $\mathbb{D}$ n racines simples.

Exercice 34

Soit $P(z) = z^7 - 5z + 2$. Déterminer le nombre de zéros de P dans

(1) le disque $\mathbb{D}$ (2) la couronne $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$.

Exercice 35

Soit $Q(z) = z^4 + iz^3 + 1$. Démontrer que le polynôme Q a exactement une racine au premier quadrant $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re} z \geq 0, \mathrm{Im} z \geq 0\}$, mais quatre racines dans le disque $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 3/2\}$.

AC 6 applications conformes

Exercice 36

Montrer que les fonctions suivantes sont holomorphes et injectives dans les domaines données:

a) $f(z) = a + nz + z^n, |z| < 1, a \in \mathbb{C}$.
b) $f(z) = z + e^z, \mathrm{Re}\, z < 0$.
c) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ où $\sum_{n=2}^{\infty} n\,|a_n| < |a_1|, |z| < 1$.
d) Soit $\sqrt{z}$ la détermination principale de la racine carée dans $\Omega = \mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$. Montrer que $f(z) = z\sqrt{z}$ n'est pas injective dans Ω, quoique $\mathrm{Re}\, f'(z) > 0$.

Exercice 37

Déterminer une application conforme
(a) du demi-disque $\{z \in \mathbb{D} : \mathrm{Im}\, z > 0\}$ sur le demi-plan droite $H = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z > 0\}$.
(b) du domaine $G = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z > 0, |\mathrm{Im}\, z| < \frac{\pi}{4}\}$ sur le domaine $S = \mathbb{D} \setminus\,]-1, 0]$.
(c) du secteur $\{z \in \mathbb{C} : 0 < \arg z < \dfrac{\pi}{3}, 0 < |z| < 1\}$ sur $\mathbb{D}$.

Exercice 38

Soit $G = \{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Re}\, z| < \pi\}$. Déterminer

$$\sup\{|f'(0)| : f \in H(G), |f(z)| \leq 1\},$$

ainsi qu'une fonction extrémale.

Exercice 39

Soit $\mathcal{F} = \{f \in H(\mathbb{D}) : |f(z)| \leq 1, f \neq 0\}$. Montrer que $|f'(0)| \leq \frac{2}{e}$ pour tout $f \in \mathcal{F}$. Est-ce-que la constante $\frac{2}{e}$ est-elle la meilleure possible?

Exercice 40

Soit $D = \mathbb{C} \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{x \in \mathbb{R} : k\pi \leq x \leq (k + \dfrac{1}{2})\pi\}$. Montrer qu'on peut définir sur D une fonction holomorphe $\log \tan z$.

Exercice 41

Soit (f_n) une famille localement uniformément bornée de fonctions holomorphes sur un domaine Ω. Supposons que les f_n ne possèdent pas de zéros et qu'il existe $z_0 \in \Omega$ tel que $\lim_{n\to\infty} f_n(z_0) = 0$. Montrer que $\lim_{n\to\infty} f_n(z)$ existe pour tout $z \in \Omega$ et que cette limite est localement uniforme.

Exercice 42

Lesquelles des familles suivantes sont normales?

(1) $\mathcal{F}_1 = \{\sin(nz) : n \in \mathbb{N}\}$,
(2) $\mathcal{F}_2 = \{\sin \frac{z}{n} : n \in \mathbb{N}^*\}$,
(3) $\mathcal{F}_3 = \{f^{(n)} : n \in \mathbb{N}\}$, où f est une fonction entière.
(4) $\mathcal{F}_4 = \{f \in H(\mathbb{D}) : \sup_{0 \le r < 1} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 \, dt \le 2\pi\}$,
(5) $\mathcal{F}_5 = \{f \in H(\mathbb{D}) : \sup_{z \in \mathbb{D}} |f'(z)| \le 1\}$,
(6) $\mathcal{F}_6 = \mathcal{F}_5 \cap \{f \in H(\mathbb{D}) : f(0) = 1\}$,
(7) $\mathcal{F}_7 = \{f \in H(\mathbb{D}) : f(0) = f'(0) = 0\}$.