Raymond Mortini

COURS SM2

Rappel (suites)

• Une suite de nombre réels est une application de $N = \{0, 1, 2, \cdots\}$ dans $\mathbf{R}$. On la note par $(a_n)_{(n\in\mathbf{N})}$

$$\underline{ex}\ :\ a_n = \frac{2}{n+3}$$

• On dit que (a_n) converge vers $a \in \mathbf{R}$ si pour tout intervalle I centré en a, presque tous les a_n se trouvent dans I *ie* partir d'un certain indice $n_0 \in \mathbf{N}$, on a $a_n \in I (\forall\, n \geq n_0)$. On dit alors que a est la limite de (a_n) si n tend vers ∞, soit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$

$$\underline{ex}\ :\ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0\ ;\ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1\ ;$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (\text{Euler } e = 2,7182818\cdots)$$

• une série est une somme infinie": $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$;
$S_p = \sum_{n=0}^{p} a_n$ *sont les sommes partielles*. On dit que la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge si la suite des sommes partielles $(S_p)_{p\in\mathbf{N}}$ converge et on note:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{p\to\infty} S_p \quad (\text{valeur ou somme })$$

$$\underline{ex}\ :\ \textit{serie geometrique}\ :\ \sum_{n=n_0}^{\infty} q^n = \frac{q^{n_0}}{1-q}$$

$$\text{si } |q| < 1 \quad (n_0 \in \mathbf{N})$$

$$\textit{serie exponentielle}\ :\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, x^n = e^x\ (x \in \mathbf{R})$$

• Une série de la forme $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ est appelée *série entière* (série de MacLaurin-Taylor).
Elle converge dans l'intervalle $]x_0 - r\,,\, x_0 + r[$ si le rayon de convergence $r > 0$.
Notons que r est le plus petit point d'accumulation de la suite $\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$.
Si $r > 0$ on a : $a_n = \frac{1}{n!}\, f^{(n)}(x_0) \quad \forall\, n \in \mathbf{N}$

1 Séries de Fourier

Déf : Une fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est dite T-périodique ($T > 0$) si $\forall x \in \mathbf{R} : f(x+T) = f(x)$

Rq : Chaque multiple entier kT d'une période T de f est de nouveau une période ($k \in \mathbf{N}^* = \mathbf{N} - \{0\}$)

$$\cos t \,,\, \sin t \;:\; 2\pi \quad \text{(plus petite période)}$$

$n \in \mathbb{N}^*$ $\quad \cos nt \,,\, \sin\, nt \;:\; \frac{2\pi}{n}$ (plus petite période)

Notation $R_{2\pi}$ est l'ensemble des fonctions bornées, 2π-périodiques et continues par morceaux sur $\mathbf{R}$.

ex : $\cos nt \,,\, \sin nt \in R_{2\pi}$
$\cos 2t + \cos t \in R_{2\pi}$
$\cos t + 2\cos 2t + \cdots + 3\cos 3t + \sin 5t \in R_{2\pi}$

Le prolongement 2π-périodique F de

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x < \pi \\ 0 & \text{si } \pi < x < 2\pi \\ 0 & \text{si } x = 0, \pi, 2\pi \end{cases}$$

est dans $R_{2\pi}$.

Rq : Toutes les fonctions dans $R_{2\pi}$ sont intégrables sur chaque intervalle I borné

Déf. : Une série de la forme

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

est appelée une série trigonométrique ($a_n, b_n \in \mathbf{R}$); si ∞ est remplacé par $p" \in \mathbf{N}$, on parle d'un *polynme trigonométrique*

- FORME COMPLEXE DES SéRIES TRIGONOMéTRIQUES

$e^{it} = \cos t + i \sin t$ où $i^2 = -1$
$\cos t = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2} \qquad \sin t = \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}$

$$n \neq 0 : \quad a_n \cos nt + b_n \sin nt =$$

$$a_n \frac{1}{2}\left(e^{itn} + e^{-itn}\right) + b_n \frac{1}{2i}\left(e^{itn} - e^{-itn}\right) =$$

$$= e^{itn} \underbrace{\left[\frac{a_n - ib_n}{2}\right]}_{C_n} + e^{-itn} \underbrace{\left[\frac{a_n + ib_n}{2}\right]}_{C_{-n}}$$

Si on pose encore $C_0 = \frac{a_0}{2}$, on obtient

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{p} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) =$$

$$= C_0 + \sum_{n=1}^{p} \left(C_n\, e^{itn} + C_{-n}\, e^{-itn}\right) =$$

$$= C_0 + \sum_{n=1}^{p} C_n e^{itn} + \sum_{n=1}^{p} C_{-n}\, e^{-itn} =$$

$$= C_0 + \sum_{n=1}^{p} C_n e^{itn} + \sum_{m=-p}^{-1} C_m e^{itm} =$$

$$= \sum_{j=-p}^{p} C_j e^{itj} \qquad p \in \mathbf{N}.$$

Formules : $\underline{a_n, b_n \in \mathbf{R}}$

$C_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$; $C_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}$; $C_0 = \frac{a_0}{2}$ $\quad (n \in \mathbf{N}^*)$

$\underline{C_n \in \mathbf{C}}$

$a_n = C_n + C_{-n}$; $b_n = i(C_n - C_{-n})$,

$a_0 = 2C_0 \quad (n \in \mathbf{N}^*)$

Supposons que $\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|) < \infty$, alors la série trigonométrique

$$S(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

est convergente $\forall\, t \in \mathbf{R}$. Rapellons que d'après le critère de Weierstrass on a:

$$\left[\sum_0^{\infty} f_n(t)\ ,\ |f_n\,(t)| \le \varepsilon_n \qquad \sum_0^{\infty} \varepsilon_n < \infty\right]$$

$$\Longrightarrow \sum f_n(t) \quad \text{converge uniformément sur } \mathbf{R}.$$

Quelles relations y-a-t-il entre les coefficients a_n, b_n et la série trigonométrique S?

→ Pour voir cela, utilisons les

formules d'orthogonalités suivantes

$$* \int_0^{2\pi} \sin pt \cos qt \, dt = 0 \quad \forall\, p, q \in \mathbf{N}$$

$$* \int_0^{2\pi} \sin pt \sin qt \, dt = \begin{cases} 0 \text{ si } p \neq q \in \mathbf{N} \\ \pi \text{ si } p = q \in \mathbf{N}^* \\ 0 \text{ si } p = q = 0 \end{cases}$$

$$* \int_0^{2\pi} \cos pt \cos qt \, dt = \begin{cases} 0 \text{ si } p \neq q \in \mathbf{N} \\ \pi \text{ si } p = q \in \mathbf{N}^* \\ 2\pi \text{ si } p = q = 0 \end{cases}$$

$$* \int_0^{2\pi} e^{int} \, e^{-imt} \, dt = \begin{cases} 0 \text{ si } n \neq m \in \mathbf{Z} \\ 2\pi \text{ si } n = m \in \mathbf{Z} \end{cases}$$

Démonstration

$n \neq m :\quad \int_0^{2\pi} e^{int} \, e^{-imt} dt = \int_0^{2\pi} \, e^{i(n-m)t} \, dt =$

$$= \left[\frac{1}{i(n-m)} \, e^{i(n-m)\,t} \right]_0^{2\pi} = 0$$

(car $\forall\, k \in \mathbf{Z} :\qquad e^{2k\pi i} = 1$). On dit que e^{imt} est orthogonale e^{int} pour $m \neq n$. ○

Comme ici $\sum \int = \int \sum$, on a:

$$\int_0^{2\pi} S(t) \, dt =$$

$= \int_0^{2\pi} \frac{a_0}{2} \, dt + \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) \right) dt =$

$= \frac{a_0}{2} \cdot 2\pi + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos nt \, dt}_{=0} + b_n \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin nt \, dt}_{=0} \right] =$

$$= a_0 \cdot \pi + 0,$$

d'o $a_0 = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} S(t) \, dt$. Si $m \in \mathbb{N}^*$, on obtient:

$$\int_0^{2\pi} S(t) \cos mt \, dt = \int_0^{2\pi} \frac{a_0}{2} \, \cos mt \, dt +$$

$$+ \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt \, \cos mt + b_n \sin nt \, \cos mt) \right) dt =$$

$= 0 + \sum_{n=1}^{\infty} \Big[a_n \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos nt \, \cos mt \, dt +}_{0 \ (n \neq m)}$

$+ b_n \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin nt \cos mt \, dt}_{0} \Big] = a_m \cdot \pi,$

d'o

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} S(t) \cos mt \, dt \qquad (m \in \mathbb{N}^*).$$

De la mme faon, on obtient

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} S(t) \sin mt \, dt$$

Déf. : Soit $(*)$ $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$ une série trigonométrique. Si les coefficients a_n et b_n ont la forme

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \, dt,$$

$a_n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(t) \cos nt \, dt \, , \; b_n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(t) \sin nt \, dt$
$(n \in \mathbf{N}^*)$
pour une fonction $f \in R_{2\pi}$, alors on dit que $(*)$ est *une série de Fourier* et les coefficients a_n, b_n sont appelés *les coefficients de Fourier de f*.
On écrit
$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt).$

Exercice

Calculer les coefficients de Fourier de f donnée par $f(t) = 0$ si $0 < t < \pi$, $f(t) = 1$ si $\pi < t < 2\pi$, $f(0) = f(\pi) = f(2\pi) = 0$, $f(t + 2k\pi) = f(t)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et $0 \leq t \leq 2\pi$.

$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \, dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 1 \, dt = 1$
$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos nt \, dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos nt \, dt$
$= \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{n} \sin nt \right]_0^{\pi} = 0 \quad n \in \mathbb{N}^*$

$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin nt \, dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nt \, dt = \frac{-1}{\pi n} [\cos nt]_0^{\pi} = \frac{-1}{\pi n} ((-1)^n - 1) =$
$= \begin{cases} 0 \text{ si } n \text{ paire} \\ \dfrac{2}{\pi n} \text{ si } n \text{ impaire} \end{cases};$
donc $f \sim \frac{1}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi(2k-1)} \sin(2k-1) \, t$

Remarque:

1 - Les valeurs de f en $0, \pi, 2\pi \cdots$ ne jouent pas de rle lors du calcul des coefficients de Fourier.
2 - Considérons la fonction $g(t) = f(t) - 1/2$.
Alors g est une fonction impaire, c'est à dire $g(-t) = -g(t)$. On obtient
$g \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi(2k-1)} \sin(2k-1)t$.

Proposition 1

$*$ Soit $f \in R_{2\pi}$ une fonction impaire, c'est à dire $f(-t) = -f(t)$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}$ on a: $a_n = 0$, donc

$$f \sim \sum_{1}^{\infty} b_n \underbrace{\sin nt}_{\text{impaire}}$$

$*$ Soit $f \in R_{2\pi}$ une fonction paire, c'est à dire $f(-t) = f(t)$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $b_n = 0$, donc

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{1}^{\infty} a_n \cos nt$$

Définition

Soit $f = u + iv$ une fonction valeurs complexes : $u \in R_{2\pi}$, $v \in R_{2\pi}$ (notons $f \in R_{2\pi}$)
Alors $f \sim \sum_{-\infty}^{\infty} C_n e^{int}$ est la série de Fourier associée à f où
$C_n = \hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-int}\, dt \quad (n \in \mathbf{Z})$.
Ce sont les coefficients de Fourier de f (forme complexe)

Remarque

$$C_n = \frac{a_n - ib_n}{2} =$$

$= \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} f(t) \cos nt\, dt - i \int_0^{2\pi} f(t) \sin nt\, dt \right) =$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \, [\underbrace{\cos nt - i \sin nt}_{e^{-int}}]\, dt$$

ex : Déterminer la série de Fourier (forme complexe) du prolongement 2π-périodique de la fonction f donnée par

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } 0 < x < \pi \\ 0 \text{ si } x = 0\,,\, \pi \\ -1 \text{ si } \pi < x < 2\pi \end{cases}$$

Solution. Notons que $f \sim \sum_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)\, e^{int}$ où $\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int}\, dt$.

Donc

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)e^{-int}\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}(+1)e^{-int}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{in}e^{-int}\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{-in}e^{-int}\Big|_{0}^{\pi}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi in}(2-2(-1)^n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ pair} \\ \dfrac{2}{i\pi n} & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$$

donc

$$f \sim \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{\pi\, i(2n+1)}\, e^{i(2n+1)t}.$$

En déduisons la forme réelle:
$a_n = C_n + C_{-n} = 0$ si n est pair et $a_n = \frac{2}{i\pi n} + \frac{2}{i\pi(-n)} = 0$ si n est impair.
$b_n = i(C_n - C_{-n}) = 0$ si n est pair et $b_n = \frac{4}{\pi n}$ si n est impair.
Notons que f est impair. Donc:

$$f \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k-1)\pi}\sin(2k-1)t.$$

Propriétés

(1) $f, g \in R_{2\pi}$ • $\widehat{f+g}(n) = \widehat{f}(n) + \widehat{g}(n)$

• $\widehat{\alpha f}(n) = \alpha\,\widehat{f}(n) \quad (\alpha \in \mathbf{C})$

(2) si f, g sont 2π-périodiques et continues sur $\mathbf{R}$. On a

$$\widehat{f}(n) = \widehat{g}(n) \quad \forall\, n \Rightarrow f(t) = g(t) \quad \forall\, t \in \mathbf{R}. \qquad \text{(unicité)}$$

Propriété de convergence

Soit $f \in R_{2\pi}$. Est ce que la série de Fourier de f converge pour tout $t \in \mathbf{R}$? Si oui, converge-t-elle vers $f(t)$? En général, les réponses sont non.

Soit $f \in R_{2\pi}$, $f \sim \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$

$$f \sim \sum_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)\, e^{int}$$

$$a_n = \widehat{f}(n) + \widehat{f}(-n) \qquad b_n = i(\widehat{f}(n) - \widehat{f}(-n))$$
$$a_0 = 2\widehat{f}(0) \qquad n \in \mathbb{N}^*$$

Somme partielle $S_p\,[f]\,(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{p} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) = \sum_{n=-p}^{p} \widehat{f}(n)\, e^{int}$

Etudions $S[f] = \lim\limits_{p\to\infty} S_p[f]$

Si $\lim_{p\to\infty} S_p[f]\,(t)$ existe pour tout $t \in \mathbf{R}$, on écrit
$S[f](t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)\, e^{int} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nt + b_n \sin nt)$

Théorème de Dirichlet : *(critère)*

1 - *Soit $f \in R_{2\pi}$ et soit $t_0 \in \mathbf{R}$. Supposons que $f(t_0^+) = \lim\limits_{t\to t_0^+} f(t)$ et $f(t_0^-) = \lim\limits_{t\to t_0^-} f(t)$ existe*

2 - *$f'_+(t_0) = \lim\limits_{t\to t_0^+} \frac{f(t)-f(t_0^+)}{t-t_0}$ et $f'_-(t_0) = \lim\limits_{t\to t_0^-} \frac{f(t)-f(t_0^-)}{t-t_0}$ existent. Alors la série de Fourier $S[f]$ associée f converge au point t_0 et on a: $S[f]\,(t_0) = \frac{f(t_0^+)+(f(t_0^-)}{2}$*

3 - En particulier, si $f \in R_{2\pi}$ est dérivable, alors on a : $f(t) = S[f](t) \quad \forall\, t \in \mathbf{R}$

Démonstration de (3)

Soit f dérivable, donc continue. Alors
$f(t_0) = \lim_{t\to t_0} f(t) = f(t_0^+) = f(t_0^-)$, $f'(t_0) = \lim\limits_{t\to t_0} \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} = f'_+(t_0) = f'_-(t_0)$ et $\frac{f(t_0^+)+f(t_0^-)}{2} = \frac{2f(t_0)}{2} = f(t_0)$

$\underline{ex}$: $f \sim \dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{0}^{\infty} \dfrac{\sin(2n+1)t}{2n+1} \quad t \in \mathbf{R}.$

Déterminons tous les points pour lesquels cette série de Fourier converge. Pour cela, voyons si les hypothèses du théorème de Dirichlet sont vérifiées:

- <u>1er cas</u> : soit $t_0 \neq 0\,,\, \pi$ (mod. 2π). Alors en obtient que f est continûment dérivable dans un voisinage de t_0. Donc (3) implique que la série converge en t_0 et qu'on a:

$f(t_0) = \frac{4}{\pi} \sum\limits_{0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)t_0}{2n+1} = \begin{cases} 1 \text{ si } 0 < t_0 < \pi \\ -1 \text{ si } \pi < t_0 < 0 \end{cases}$

- <u>2ème cas</u> : si $t_0 = 0 \quad f(0^+) = 1$, $f(0^-) = -1$

$$\forall\, t \in]0, \pi[\quad \frac{f(t) - f(0^+)}{t - 0} = \frac{1-1}{t} = 0$$

$$\forall t \;\in]-\pi, 0[\quad \frac{f(t) - f(0^-)}{t - 0} = \frac{-1-(-1)}{t} = 0.$$

De la même façon pour $t_0 = \pi$. Le critère de Dirichlet est donc applicable et on obtient

$$\frac{4}{\pi} \sum_{0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)t_0}{2n+1} = \frac{1+(-1)}{2} = 0 \qquad \forall\, t_0 = k\pi\, (k \in \mathbf{Z}).$$

Cas spécial: Soit $t_0 = \frac{\pi}{2}$. Alors

$1 = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4}{\pi}\sum_0^\infty \frac{\sin(2n+1)\pi/2}{2n+1} = \frac{4}{\pi}\sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{2n+1}$
$\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$. Rappellons que

$$\arctan\ x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$$

Propriétés Soit f 2π-périodique et deux fois continûment dérivable. Alors la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-n\, a_n \sin nt + n\, b_n \cos nt),$$

obtenue en dérivant la série de Fourier $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^\infty (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$ de f termes par termes, converge $\forall\, t \in \mathbf{R}$ vers $f'(t)$ et coïncide avec la série de Fourier associée f'.

Théorème : Egalité de Bessel-Parseval
Soit $f \in R_{2\pi}$ alors
(1) $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(n)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\, dt.$
De mme, si f est réelle
(2) $\frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\, dt.$

Démonstration de (2) :

$$\widehat{f}(n) = \frac{a_n - ib_n}{2}\ \ n > 0\ ;\ \widehat{f}(-n) = \frac{a_n + ib_n}{2} \quad n > 0$$

$$\widehat{f}(0) = \frac{a_0}{2} \quad (a_n\ ,\ b_n \in \mathbf{R})$$

$$|\widehat{f}(\pm n)|^2 = \frac{1}{4}(a_n^2 + b_n^2) \quad \forall\, n \in \mathbf{Z}\setminus\{0\} \quad |\widehat{f}(0)|^2 = \frac{a_0^2}{4}$$

$$\underline{\text{ex}}\ : f(t + 2k\pi) = \begin{cases} t & |t| < \pi \quad k \in \mathbb{Z} \\ 0 & t = k\pi \end{cases}$$

f impaire $\Rightarrow a_n = 0 \quad \forall\, n$ et $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t \sin nt\, dt = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}$;

$$\text{donc } f \sim 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nt$$
$$= -i\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (e^{int} - e^{-int})$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{1} \frac{(-1)^{n+1}}{-n} i\, e^{int} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (-i)\, e^{int}$$
$$\Longrightarrow \sum_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(n)|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \frac{1}{n^2} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2\, dt = \left[\frac{1}{2\pi}\, \frac{1}{3} t^3\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi^2}{3}$$
$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

ex :$f(t+2k\pi) = |t-\pi|$ si $0 \le t < 2\pi$ et $k \in \mathbb{Z}$.
Alors f est une fonction paire, donc :
$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt$.
En plus, d'après le critère de Dirichlet on a $f(t) = S[f](t)$ pour tout t. Calculons les coefficients de Fourier:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\, dt = \frac{\pi^2}{\pi} = \pi$$
$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (\pi - t) \cos nt\, dt \quad t \in \mathbf{R}$$
$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n^2} - (-1)^n \frac{1}{n^2}\right)$$
$$S[f](t) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos(2n-1)t$$

Posons $t = 0$. Alors $\pi = f(0) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$.
Donc $\sum_1^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

Critère de Riemann - Lebesgue

Soit $f \in R_{2\pi}$; alors $\widehat{f}(n) \to 0 \quad$ si $n \to \pm\infty$

En particulier, si f est réelle, on a
$a_n \to 0$, $b_n \to 0$, où $f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_1^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$.

Démonstration : Soit $f \in R_{2\pi}$. D'après l'égalité de Bessel-Parseval on a:

$$\infty > \int_0^{2\pi} |f|^2 \frac{dt}{2\pi} = \sum_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(n)|^2$$

Cette série converge, donc le terme général $\widehat{f}(n)$ tend vers 0 (si $n \to \pm\infty$). La deuxième assertion est alors une conséquence des formules de transformations. ○

ex : • $\sum_1^\infty n \sin nt$, $\sum_1^\infty \cos nt$ ne sont pas des séries de Fourier car $a_n = 1 \not\to 0$, $b_n = n \not\to 0$.
• $\sum_1^\infty \frac{1}{\sqrt{n}} \sin nt$ n'est pas une série de Fourier d'une fonction $f \in R_{2\pi}$ car $\sum_1^\infty \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 = \Sigma \frac{1}{n} = \infty$.

Théorème de la convergence en moyenne quadratique

Soit $f \in R_{2\pi}$ et $S_p[f](t) = \sum_{n=-p}^{p} \widehat{f}(n)\, e^{int}$; alors

$$\sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left| f(t) - \sum_{n=-p}^{p} \widehat{f}(n)\, e^{int} \right|^2 dt} \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

c'est à dire $\|f - S_p\|_2 \to 0$ si $p \to \infty$.

Espaces euclidiens et hermitiens

Soient V, W des espaces vectoriels sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Une application $f : V \to W$ est *dite linéaire si* :

$$\begin{aligned} &- \ f(x+y) = f(x) + f(y) \\ &- \ f(\alpha x) = \alpha f(x) \quad \alpha \in \mathbb{K} \quad x, y \in V \end{aligned}$$

Une application $f : V \to \mathbb{K}$ qui est linéaire, est dite une *forme linéaire*

$V \times W = \{(v, w) : v \in V, w \in W\}$ est le produit cartésien de V avec W.

Définition : *produit scalaire*

Soit V un espace vectoriel sur $\mathbf{C}$. On appelle *produit scalaire* toute application

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \begin{cases} V \times V \to \mathbf{C} \\ (x, y) \to \langle x, y \rangle \end{cases}$$

telle que $\forall\, x, x', y \in V \quad \forall\, \lambda, \lambda' \in \mathbf{C}$ on ait :

$\mathbf{H_1}$: $\quad \langle \lambda\, x + \lambda'\, x', y \rangle = \lambda\, \langle x, y \rangle + \lambda'\, \langle x', y \rangle$
c'est à dire,$\forall\, y \in V$, l'application

$$\langle \cdot\,,\, y \rangle \ : \begin{cases} V \to \mathbf{C} \\ x \to \langle x, y \rangle \end{cases}$$

est linéaire (dans le premier argument).

$\mathbf{H_2}$: $\quad \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$
(on dit que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est hermitienne.)

Rappelons que $\overline{a + ib} = a - ib \quad a, b \in \mathbb{R}$.

$\mathbf{H_3}$: $\quad \langle x, x \rangle \ \geq 0$ et $[\langle x, x \rangle = 0 \Longleftrightarrow x = 0]$

Pour le cas réel, on a une définition analogue. Dans ce cas ci $\mathbf{H_2}$ devient $\mathbf{H_2'}$: $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ et on dit que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est symétrique.

ex : Soit $V = \mathbb{R}^n$ et $x, y \in V, \quad x = (x_1, \cdots, x_n) \quad ; \quad y = (y_1, \cdots, y_n)$. Alors $\langle x, y \rangle_{\mathbf{R}} = \sum_{j=1}^{n} x_j\, y_j$ est un produit scalaire réel sur $\mathbf{R}^n$, car:

H_3 : $\langle x, x \rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j^2 \geq 0$ et $\langle x, x \rangle = 0 \Longleftrightarrow x_j = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.
H_2: clair

$H_1\ :\ \langle x+x', y\rangle = \sum_{j=1}^n (x_j + x_j')\, y_j = \sum_{j=1}^n (x_j\, y_j + x_j'\, y_j) = \sum_{j=1}^n x_j\, y_j + \sum_{j=1}^n x_j'\, y_j = \langle x, y\rangle + \langle x', y\rangle$ et $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\, \langle x, y\rangle$.

Soit $V = \mathbb{C}^n$ et $z, w \in \mathbf{C}^n$ $\quad z = (z_1, \cdots, z_n)\ ,\quad w = (w_1, \cdots, w_n)$

$\langle z, w\rangle_{\mathbf{C}} := \sum\limits_{j=1}^{n} z_j\, \overline{w}_j \qquad (z_j \in \mathbf{C}\ ,\ w_j \in \mathbf{C})$

$(\mathbf{R}^n\ , \langle \cdot\, , \cdot\rangle_{\mathbf{R}})$ espace euclidien

$(\mathbb{C}^n\ , \langle \cdot\, , \cdot\rangle_{\mathbf{C}})$ espace hermitien

Définition

Soit $(E\, , \langle \cdot\, , \cdot\rangle)$ un espace vectoriel muni du produit scalaire $\langle \cdot\, , \cdot\rangle$ (evps). Alors $\forall\, x \in E$ on définit la longueur ou norme du vecteur x par $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

ex : Si $E = \mathbf{R}^n$ est l'espace euclidien alors $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$.
Si $E = \mathbf{C}^n$ est l'espace hermitien alors $\|z\| = \sqrt{|z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2}$.

$$(z = (z_1, \cdots, z_n)\ ,\ x = (x_1, \cdots, x_n)\ ,\ x_j \in \mathbf{R}\ ;\ z_j \in \mathbf{C})$$

Autre exemple d'un produit scalaire sur $\mathbf{R}^2$:

$F\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = 2x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2y_1x_2 + 3y_2x_2$

$(x_j\ , y_j \in \mathbf{R})$

Vérifions :

$* \ F\left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}\ ,\ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right] = 2(x_1 + x_1')y_1 + 2(x_1 + x_1')y_2 + 2y_1(x_2 + x_2') + 3(x_2 + x_2')\, y_2 = (2x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2y_1x_2 + 3x_2y_2) + (2x_1'y_1 + 2x_1'y_2 + 2y_1x_2' + 3x_2'y_2) = F\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) + F\left(\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right)$

$* \ F\left(\alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = \alpha F\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right)$

$* \ F(x, y) = F(y, x)$

$* \ F(x, x) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 = 2x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2 = 2(x_1 + x_2)^2 + x_2^2 \geq 0$

$F(x, x) = 0 \Longleftrightarrow x_1 + x_2 = 0$ et $x_2 = 0$

$\Longleftrightarrow x_1 = x_2 = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.

Autre représentation de F: on a

$F(x, y) = (x_1\ , x_2)\, A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ o $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ ou bien

$F(x,y) = \langle Ax, y\rangle_{\mathbf{R}}$.

$*$ **Propriétés de** $\langle x, y\rangle$

En vue de H_1 et H_2 on a:
$\langle x, \alpha y + \beta y'\rangle = \overline{\alpha}\,\langle x, y\rangle + \overline{\beta}\,\langle x, y'\rangle$.

Théorme : *(l'inégalité de Cauchy-Schwarz)*

Soit $(E\,,\,\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle)$ evps. Alors $\forall\, x, y \in E$ on a : $|\,\langle x, y\rangle\,| \le \|x\|\;\|y\|$

Démonstration
$0 \le \langle x + \lambda y, x + \lambda y\rangle =$
$= \langle x, x + \lambda y\rangle + \lambda\,\langle y, x + \lambda y\rangle =$
$= \langle x, x\rangle + \overline{\lambda}\,\langle x, y\rangle + \lambda\,\langle y, x\rangle + \lambda\overline{\lambda}\,\langle y, y\rangle =$
$= \|x\|^2 + \overline{\lambda}\,\langle x, y\rangle + \lambda\,\overline{\langle x, y\rangle} + |\lambda|^2\,\|y\|^2 =$
$= \|x\|^2 + 2\,Re\,(\overline{\lambda}\,\langle x, y\rangle) + |\lambda|^2\,\|y\|^2$ car
$V + \overline{V} = 2\,Re\,V \qquad V \in \mathbf{C}$.
Posons $\lambda = -\frac{\langle x,y\rangle}{\langle y,y\rangle}$ $(\in \mathbf{C})$ Alors :
$0 \le \|x\|^2 - 2\,Re\,\left(\frac{\overline{\langle x,y\rangle}}{\langle y,y\rangle}\;\langle x, y\rangle\right) + \frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\langle y,y\rangle^2}\,\|y\|^2 =$
$= \|x\|^2 - 2\,Re\,\left(\frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\|y\|^2}\right) + \frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\|y\|^2} =$
$\|x\|^2 - \frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\|y\|^2}$.
Donc $\|x\|^2 \ge \frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\|y\|^2} \Rightarrow \|x\|\;\|y\| \ge\;|\,\langle x, y\rangle\,|$. ○

<u>ex</u> :Soit $E = C([0,1], \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions à valeurs complexes et continues sur $[0,1]$. Soient f et $g \in E$.
Alors $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\,dt$ est un produit scalaire sur E, car
$\left\langle \alpha f + \beta \widetilde{f}\,,\,g\right\rangle = \int_0^1 (\alpha f + \beta \widetilde{f})\,(t)\,\overline{g(t)}\,dt =$
$= \alpha \int_0^1\, f\overline{g}\,dt + \beta \int_0^1\,\widetilde{f}\,\overline{g}\,dt =$
$= \alpha\,\langle f, g\rangle + \beta\left\langle \widetilde{f}\,,\,g\right\rangle$

$\langle f, f\rangle = \int_0^1 f(t)\,\overline{f(t)}\,dt = \int_0^1 |f(t)|^2\,dt \ge 0$
$\langle f, f\rangle = 0 \iff f(t) = 0 \qquad \forall\, t \in [0,1]$ parce que f est continue.

Cauchy Schwarz $\quad |\int_0^1\, f\overline{g}\,dt| \le \sqrt{\int_0^1 |f|^2\,dt}\;\sqrt{\int_0^1 |g|^2\,dt}$

Théorme : Soit $(E\,,\,\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle)$ evps et soit $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. Alors

$N_1 \quad \|\lambda\, x\| = |\lambda|\;\|x\| \quad (\lambda \in \mathbf{C})$

$N_2 \quad \|x\| \ge 0 \quad$ et $\quad \|x\| = 0 \iff x = 0$

$N_3 \quad \|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$ l'inégalité triangulaire

Démonstration :

N_1 $\quad \|\lambda x\|^2 = \langle \lambda x, \lambda x \rangle = \lambda \langle x, \lambda x \rangle = \lambda \cdot \overline{\lambda} \langle x, x \rangle =$
$= |\lambda|^2 \|x\|^2.$

N_2 $\quad$ clair

N_3 $\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x+y\rangle + \langle y, x+y\rangle =$
$= \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle =$
$= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,Re\,\langle x,y\rangle \ \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2|\,\langle x,y\rangle\,| \ \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\ \|y\| =$
$(\|x\| + \|y\|)^2$

Remarque. Une application $\|\cdot\| : \begin{cases} E \to \mathbf{R}^+ \\ x \mapsto \|x\| \end{cases}$ d'un espace vectoriel E dans $\mathbb{R}^+$ est appelée norme si elle satisfait les axiomes N_1, N_2 et N_3.

Théorme *(l'égalité du parallélogrammme)*

Soit $(E\,,\,\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle)$ evps. Alors, on a
$\forall\, x,y \in E\ :\ \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\,(\|x\|^2 + \|y\|^2)$

Démonstration :
$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\ Re\,\langle x,y\rangle + \Big[\|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\ Re\,\langle x,-y\rangle\Big] =$
$\|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,Re\,\langle x,y\rangle + \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\ Re\,\langle x,y\rangle = 2\Big(\|x\|^2 + \|y\|^2\Big)$

Remarques 1. On dit qu'une norme provient d'un produit scalaire si l'égalité du parallélogramme est vérifié.
2. Il existe des normes qui ne proviennent pas d'un produit scalaire:
ex : $\|(x,y)\| = |x| + |y| \quad (x, y \in \mathbf{R})$

3. Dans $\mathbb{R}^2$ on a pour $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$: $\langle x,y\rangle_{\mathbb{R}} = \|x\|\ \|y\|\cos\alpha$, où α est l'angle formé par les vecteurs x et y et $\langle x,y\rangle_{\mathbb{R}} = x_1y_1 + x_2y_2$.

Définition *(boules)*

Soit $(E\,,\,\|\cdot\|)$ un espace vectoriel muni d'une norme. Alors un ensemble de la forme $B(x_0;r) = \{x \in E\ :\ \|x - x_0\| < r\}$ est appelé boule ouverte (de centre $x_0 \in E$ et de rayon r)

ex :

1) Pour $x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$ on a avec $\|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2$ que
$B\Big((0,0);1\Big) = \{(x_1,x_2) : x_1^2 + x_2^2 < 1\}.$

Si $\|(x_1,x_2)\| = |x_1| + |x_2|$, on a:
$B_1\Big((0,0);1\Big) = \{(x_1,x_2) : |x_1| + |x_2| < 1\}.$

(3) Soit $F\left(\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{x}, \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}}_{y}\right) =: \langle x,y\rangle_F =$

$= 2x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2y_1x_2 + 3x_2\,y_2,$
donc
$\|(x_1, x_2)\|^2 = 2x_1^2 + 4x_1\,x_2 + 3x_2^2$. Alors
$B_F\Big((0,0);1\Big) = \big\{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : 2x_1^2 + 4x_1\,x_2 + 3x_2^2 \leq 1\big\}$
C'est une ellipse d'équation $2(x_1 + x_2)^2 + x_2^2 \leq 1$, ou, après changement de variable: $2x^2 + y^2 \leq 1$

Définition

(1) Soit $(E\,,\,\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle)$ evps et $x, y \in E$. Alors on dit que x est orthogonale y si $\langle x, y\rangle = 0$ et on note $x \perp y$.

(2) Une famille $\mathcal{F} = \{x_1, \cdots, x_n\}$ de vecteurs de E est dite orthonormée (orthonormale), si :

$$\langle x_j\,, x_k\rangle = \delta_{jk} \quad (j, k = 1, \cdots, n)$$

o $\delta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k \\ 0 & \text{si } j \neq k \end{cases}$ symbole de Kronecker

$*$ <u>ex</u> : $\mathcal{F} = \{e_1, \cdots, e_n\} \subseteq \mathbf{R}^n$ o
$e_j = (0, \cdots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{j-me}}}{1}, 0, \cdots, 0).$

$*$ *Contre ex* :
$\mathbf{R}^2$: $x = (-1, 2)$, $y = (4, 2)$; $\mathcal{F} = \{x, y\}$, $x \perp y$ (parce que $\langle x, y\rangle_{\mathbb{R}} = (-1)\,4 + 2\cdot 2 = 0$), mais
$\|x\| = \sqrt{5} \neq 1$, $\|y\| = \sqrt{20} \neq 1.$

$*$ $E = (C_{\mathbf{R}}\,[0, 1]\,, \int_0^1 f g\, dt)$
Soit $f(t) = t$ et $g(t) = 1$. Est ce-que $f \perp g$?
Non, car $\int_0^1 f g\, dt = \int_0^1 t\, dt = 1/2 \neq 0.$

Rappel • Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$ et $S \subseteq E$. Alors le sous-espace vectoriel engendré par S dans E est égal l'ensemble
vect $S = \left\{\sum\limits_{j=0}^{n} \alpha_j\, x_j \;:\; n \in \mathbf{N}\,,\, \alpha_j \in \mathbb{K}, x_j \in S\right\},$
c'est à dire à l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de S.

• $\mathcal{F} \subseteq E$ est dite *libre* si les vecteurs de $\mathcal{F}$ sont linéairement indépendants, c'est à dire
$\sum_1^n \lambda_j\, v_j = 0 \Rightarrow \lambda_j = 0 \quad (\lambda_j \in \mathbf{K}, v_j \in \mathcal{F}).$

Théorme : *(Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt)*

Soit $(E\,,\,\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle)$ evps, $I=\{1,\cdots,N\}$ respectivement $I=\mathbf{N}^*$ et soit $S=\{x_n\ :\ n\in I\}\subseteq E$ une famille libre de E. Alors il existe une suite orthonormée $\{u_n\ :\ n\in I\}$ de E telle que $\mathrm{vect}(x_1,\cdots,x_n)=\mathrm{vect}\,(u_1,\cdots,u_n)\qquad\forall n\in I$.

On pose :
$\widetilde{u}_p=x_p-\langle x_p,u_1\rangle\,u_1-\langle x_p,u_2\rangle\,u_2-\cdots-$
$\quad-\langle x_p,u_{p-1}\rangle\,u_{p-1}$
et
$u_p=\frac{\widetilde{u}_p}{\|\widetilde{u}_p\|}\quad(p=1,2,\cdots)$.
Alors $\{u_n:n\in I\}$ a la propriété désirée.

Démonstration. Supposons que pour tout n on a: $x_n\neq 0$. On cherche une famille orthonormale $\{u_1,u_2\cdots\}$ tq:
$\mathrm{vect}\,\{x_1\}=\mathrm{vect}\,\{u_1\}$,
$\mathrm{vect}\,\{x_1,x_2\}=\mathrm{vect}\,\{u_1\,,\,u_2\}$,
$\vdots$

$\mathrm{vect}\,\{x_1\,,\,x_2\,,\cdots,\,x_n\}=\mathrm{vect}\,\{u_1\,,\,u_2\,,\,\cdots,\,u_n\},n\in I$.

- $u_1=\frac{x_1}{\|x_1\|}\Rightarrow\|u_1\|=1$

- $\widetilde{u}_2=x_2-\lambda_1\,u_1\in\ \mathrm{vect}(x_1,x_2)$ et $\widetilde{u}_2\perp u_1$,

c'est à dire
$0=\langle\widetilde{u}_2,u_1\rangle=\langle x_2-\lambda_1u_1,u_1\rangle=$
$=\langle x_2,u_1\rangle-\lambda_1\underbrace{\langle u_1,u_1\rangle}_{=1}$
$\quad\Longleftrightarrow\lambda_1=\langle x_2,u_1\rangle$.

Ceci nous donne
$\mathrm{vect}\,\{x_1,x_2\}=\ \mathrm{vect}\,\{u_1,\widetilde{u}_2\}$. Posons $u_2=\frac{\widetilde{u}_2}{\|\widetilde{u}_2\|}$. Alors

$\{u_1\,,\,u_2\}$ satisfait $\mathrm{vect}\,\{x_1,x_2\}=\mathrm{vect}\,\{u_1,u_2\}$ et $\|u_1\|=\|u_2\|=1$. En plus, $u_1\perp u_2$.

Supposons qu'on a construit $\{u_1,\cdots,u_{p-1}\}$.
On pose
$$\widetilde{u}_p=x_p-\sum_{j=1}^{p-1}\lambda_j\,u_j$$

Alors $\widetilde{u}_p\in\ \mathrm{vect}\,\{x_1,\cdots,x_{p-1},x_p\}$

Déterminer les $\lambda_j\ \ tq\ \ \widetilde{u}_p\perp u_k\quad(\forall\,k=1,\cdots,p-1)$, c'est à dire
$0=\langle\widetilde{u}_p,u_k\rangle=\left\langle x_p-\sum_{j=1}^{p-1}\lambda_j\,u_j\ ,\ u_k\right\rangle=$

$= \langle x_p, u_k \rangle - \sum_{j=1}^{p-1} \lambda_j \underbrace{\langle u_j, u_k \rangle}_{=\delta_{jk}} =$

$= \langle x_p, u_k \rangle - \lambda_k \Longleftrightarrow \lambda_k = \langle x_p, u_k \rangle.$

Posons $u_p = \frac{\widetilde{u_p}}{\|\widetilde{u_p}\|} \Rightarrow \{u_1, \cdots, u_p\}$ satisfait les assertions. ○

Une base orthonormée (orthonormale) B d'un evps $(E\,,\,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ est une famille libre, orthornormée telle que vect $B = E$

<u>ex</u> : $e_j = (0,\cdots,0,\underbrace{1}_{j},0,\cdots,0) \in \mathbf{R}^n \quad (j = 1,\cdots,n)$

Le procédé de Gram-Schmidt nous permet de construire des bases orthonormées

<u>*ex 1*</u> : $E = \mathbf{R}^3\ ,\ M = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \dim M = 2\,.$

On obtient:
$u_1 = \frac{(1,0,-1)}{\sqrt{2}} \quad \widetilde{u}_2 = (2,1,0) - \lambda\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,,\,0\,,\,\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$
o $\lambda = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$
d'o $\widetilde{u}_2 = (2,1,0) - (1,0,-1) = (1,1,1)$.

Ceci nous donne la base orthonormée de M:
$\left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \right\}$.

<u>*ex 2*</u> : $E = C_{\mathbf{R}}\,[-1,1]\,,\ \langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)\,g(t)\,dt$
Le procédé de Gram Schmidt appliqué aux monômes $1, t, t^2, t^3 \cdots$ nous donne le systme orthonormal $u_0, u_1, u_2, \cdots$ avec $u_n = \sqrt{\frac{2n+1}{2}}\,p_n$ o les p_n sont les polynmes de Legendre déterminés par

$$(1 - 2tx + x^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(t)\,x^n$$

Par ex : $p_0 = 1\,,\ p_1 = t\,,\ p_2(t) = \frac{1}{2}\,(3t^2 - 1)\,,\ p_3(t) = \frac{1}{2}\,(5t^3 - 3t)$. Vérifions certaines de ces assertions:

$$\begin{cases} \|u_0\| = \sqrt{\displaystyle\int_{-1}^{1} \left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2 1^2\,dt} = \dfrac{1}{2} \cdot 2 = 1 \\ \|u_1\| = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{3}{2}\,t^2\,dt = \left(2 \times \frac{3}{2} \times \frac{1}{3}\,t^3\right)_0^1 = 1 \\ u_1 \perp u_0\ :\ \displaystyle\int_{-1}^{1} t\,dt = 0 \end{cases}$$

Comment obtenir u_2 :

$\widetilde{u}_2(t) = t^2 - \left\langle t^2, u_1\right\rangle u_1 - \left\langle t^2, u_0\right\rangle u_0 =$
$= t^2 - \left(\int_{-1}^{1} t^2 t\sqrt{3/2}\,dt\right) t\sqrt{3/2} - \left(\int_{-1}^{1} t^2\sqrt{1/2}\,dt\right)\sqrt{1/2} =$

$= t^2 - 1/3.$
En plus, $\|\widetilde{u}_2\|^2 = \int_{-1}^{1}(t^2 - 1/3)^2\, dt = 8/45$. Donc $u_2(t) = \sqrt{45/8}(t^2 - 1/3) = \sqrt{\frac{5}{2}}p_2(t)$.

Remarque On a $(n+1)\, p_{n+1}\,(t) - (2n+1)\, t\; p_n(t) + n\, p_{n-1}(t) \equiv 0 \qquad (n \in \mathbf{N}^*)$
et $p_n(t) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dt^n}\Big((t^2-1)^n\Big)$.

Proposition Soit E un evps de dimension n et soit $B = \{u_1, \cdots, u_n\}$ une base orthonormée de E. Alors les composantes d'un vecteur $x \in E$ dans la base B sont données par:
$x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j u_j$, avec $\lambda_j = \langle x, u_j \rangle$.

Démonstration $\langle x, u_k \rangle = \Big\langle \sum_{j=1}^{n} \lambda_j u_j, u_k \Big\rangle =$
$= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \underbrace{\langle u_j, u_k \rangle}_{\delta_{jk}} = \lambda_k.$

Proposition Sous les conditions précédentes, on a
$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^{n} \langle x, u_j \rangle\ \langle y, u_j \rangle$ et $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum\limits_{j=1}^{n} |\, \langle x, u_j \rangle\, |^2}$

Proposition *Théorme de Pythagore*

Soit $(E\,,\,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ evps et soit $\{u_1,\cdots,u_n\}$ une famille orthogonale (i.e. $u_j\perp u_k\,(j\neq k)$. Alors

$$\Big\|\sum_{j=1}^{n}u_j\Big\|^2=\sum_{j=1}^{n}\|u_j\|^2$$

Démonstration

• $n=2\quad \|u_1+u_2\|^2=\langle u_1+u_2,u_1+u_2\rangle=\langle u_1,u_1\rangle+\langle u_2,u_1\rangle+\langle u_1\,,\,u_2\rangle+\langle u_2,u_2\rangle=$
$=\|u_1\|^2+\|u_2\|^2.$

• $n=3:$ Notons que $u_1+u_2\perp u_3$. Alors
$\|(u_1+u_2)+u_3\|^2=\|u_1+u_2\|^2+\|u_3\|^2=\|u_1\|^2+\|u_2\|^2+\|u_3\|^2.$

2.II - APPLICATIONS ORTHOGONALES

Définition

* Soit E,F deux ev réels munis des produits scalaires $\langle\cdot,\cdot\rangle_E\,,\,\langle\cdot,\cdot\rangle_F$. Une application linéaire $T:E\to F$ est dite <u>*orthogonale*</u> si elle conserve le produit scalaire, i.e. $\langle Tx,Ty\rangle_F=\langle x,y\rangle_E$
* Si $E=F=\mathbf{R}^n$ est l'espace euclidien alors une matrice $A\in\mathcal{M}\,(n\times n\,,\,\mathbf{R})$ est dite <u>*orthogonale*</u> si l'application linéaire $\begin{cases}\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n\\ x\mapsto Ax\end{cases}$ est une application orthogonale.

Proposition Soient E,F des evps sur $\mathbf{R}$ et soit $\{v_1,\cdots,v_n\}$ une base orthonormée de E. Alors $T\in L(E,F)$ est orthogonale $\Longleftrightarrow$ $\{Tv_1,\cdots,Tv_n\}$ est une famille orthonormale de F.

Démonstration $\Longrightarrow$" T orthog $\Rightarrow\langle Tv_j,Tv_k\rangle_F=$
$=\langle v_j,v_k\rangle_E=\delta_{jk}$

$\Longleftarrow$" $x,y\in E, x=\sum\limits_1^n\alpha_j\,v_j\;,y=\sum\limits_1^n\beta_j\,v_j$
$(\alpha_j\,,\,\beta_j\in\mathbf{R})$
$\Rightarrow\;\langle Tx,Ty\rangle_F=\langle\sum_1^n\alpha_j\,Tv_j,\sum_1^n\beta_j\,Tv_j\rangle_F=\cdots=\sum_{k=1}^n\sum_{j=1}^n\alpha_j\,\beta_k\underbrace{\langle Tv_j,Tv_k\rangle}_{=\delta_{jk}}=$
$\sum_{j=1}^n\alpha_j\beta_j\underset{(\text{prop.})}{\overset{\uparrow}{=}}$
$=\langle x,y\rangle_E.$ ○

Soit $A=(a_{ij})$ une matrice d'ordre n sur $\mathbb{R}$, $A^t=(a_{ji})$ la transposée de A et $I_n=$

$\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$ la matrice identité d'ordre n. Alors on a:

Théorème *(Critres d'orthogonalité des matrices)*
Soit $A \in \mathcal{M}(n \times n\,, \mathbf{R})$. Les assertions suivantes sont equivalentes

(1) A est orthogonale ($A \in O(n)$)

(2) $A^t \cdot A = I_n$

(3) $A \cdot A^t = I_n$

(4) A est inversible et $A^{-1} = A^t$

(5) Les colonnes de A forment une base orthonormée de $\mathbf{R}^n$

(6) Les lignes de A forment une base orthonormée de $\mathbf{R}^n$

(7) $\|A\,x\| = \|x\| \qquad \forall\, x \in \mathbf{R}^n$ (i.e. A est une *isométrie*)

ex

Soit $A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$. Alors $A \in O(2)$. Notons que $A^t = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Soit $A = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 6 & -4\sqrt{3} & 4 \\ 4\sqrt{3} & 7 & \sqrt{3} \\ -4 & \sqrt{3} & 9 \end{pmatrix}$. Alors $A \in O(3)$, car p.ex. les lignes de A forment une base orthonormale:

$(6, -4\sqrt{3}, 4) \perp (4\sqrt{3}, 7, \sqrt{3})$
$(4\sqrt{3}, 7, \sqrt{3}) \perp (-4, \sqrt{3}, 9)$
$(6, -4\sqrt{3}, 4) \perp (-4, \sqrt{3}, 9)$
$\|\frac{1}{10}(6, -4\sqrt{3}, 4)\| = \frac{1}{10}\sqrt{36+48+16} = 1$
$\|\frac{1}{10}(4\sqrt{3}, 7, \sqrt{3})\| = \frac{1}{10}\sqrt{48+49+3} = 1$
$\|\frac{1}{10}(-4, \sqrt{3}, 9)\| = \frac{1}{10}\sqrt{16+3+81} = 1.$

Démontrons que (1) est équivalente à (7):

(1) $\Longrightarrow$ (7): Par hypothèse $\langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$. En particulier, ceci est vrai pour $x = y$. Donc: $\|Ax\|^2 = \langle Ax, Ax\rangle = \langle x, x\rangle = \|x\|^2$; i.e. $\|Ax\| = \|x\|$.

(7) $\Longrightarrow$ (1): On peut vérifier que pour des evps réels on a $\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$. Donc la linéarité de A et $\|Ax\| = \|x\|$ pour tout x impliquent que $4\langle Ax, Ay\rangle = \|Ax + Ay\|^2 - \|Ax - Ay\|^2 =$
$= \|A(x+y)\|^2 - \|A(x-y)\|^2 = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = 4\langle x, y\rangle$, i.e. A conserve le produit scalaire et A est donc une matrice orthogonale.

Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$. Notons que i est l'indice des lignes et que j est l'indice des colonnes. Soit maintenant $v_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$ la j-me colonne de A. Alors

$$A^tA = \begin{pmatrix} <v_1, v_1> & <v_1, v_2> & \cdots & <v_1, v_n> \\ <v_2, v_1> & <v_2, v_2> & \cdots & <v_2, v_n> \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ <v_n, v_1> & <v_n, v_2> & \cdots & <v_n, v_n> \end{pmatrix},$$

donc $A^tA = (\langle v_j, v_k\rangle)_{1\leq j,k\leq n}$. Ceci nous montre que $A^tA = I_n$ si et seulement si $\langle v_j, v_k\rangle = \delta jk$; i.e. si et seulement si $\{v_1, \cdots, v_n\}$ est une base orthonormée . On a donc équivalence entre (2) et (5).
Supposons maintenant que (1) est vérifié, i.e que $\langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$. Soit $e_j = (0, \cdots, 0, \underbrace{1}_{j}, 0, \cdots, 0)$ le j-me vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Comme $v_j = Ae_j$, on obtient:

$\langle v_j, v_k\rangle = \langle Ae_j, Ae_k\rangle = \langle e_j, e_k\rangle = \delta_{jk}$.
Donc (1) est équivalente à (2).

On admet les autres équivalences. ○

Classification des matrices orthogonales dans $\mathbb{R}^2$

Proposition
$O(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} : \theta \in [0, 2\pi] \right\}$
Interprétation géométrique:
(1) $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ correspond à une rotation d'angle θ autour de l'origine

ex Pour $\theta = \pi/4$ on a:
$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta - \sin\theta \\ \sin\theta + \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} + 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

(2) Les matrices de la forme $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$
représentent une symétrie orthogonale par rapport à la droite $\mathbb{R}\begin{pmatrix} \cos\theta/2 \\ \sin\theta/2 \end{pmatrix}$.

ex $\theta = \pi/2 \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
Alors $A\binom{1}{0} = \binom{0}{1}$ et $A\binom{0}{1} = \binom{1}{0}$.

Classification des matrices orthogonales dans $\mathbb{R}^3$

Théorème Soit $A \in O(3)$. Alors il existe une matrice $S \in O(3)$ telle que:

$$S^t A S = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \text{ avec } \theta \in [0, 2\pi[\ (mod\ 2\pi).$$

ex Soit f la la transformation dans $\mathbb{R}^3$ donnée par:
rotation de 90^0 degré dans le plan $[x, y]$ (donné par l'équation $z = 0$), puis symétrie par rapport au plan $[x, y]$.
Alors, par rapport à la base canonique $\{e_1, e_2, e_3\}$, f est représentée par la matrice
$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Rappel Soit $A \in \mathcal{M}(n \times n\,,\,\mathbf{C})$. Le scalaire $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de A s'il existe un vecteur <u>non nul</u> $v \in \mathbb{C}^n$ tel que $Av = \lambda v$. v est dit alors un vecteur propre de A. On sait que λ est une valeur propre de A si et seulement si λ est une racine (=zéro) du polynôme caractéristique $p_A(\lambda) = \det\,(A - \lambda I_n)$ de A.

Proposition. Soit $A \in O(n)$ et soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A. Alors $|\lambda| = 1$. Donc, si λ est une valeur propre réelle de A, alors $\lambda = \pm 1$.

Démonstration Soit $v \in \mathbb{C}^n$, $v \neq 0$, un vecteur propre associé à la valeur propre λ, i.e. $Av = \lambda v$. Comme A est une matrice orthogonale, on sait d'après le théorème précédent que $\|Av\| = \|v\|$. Donc $|\lambda|\|v\| = \|\lambda v\| = \|v\|$. Ceci implique que $|\lambda| = 1$. ○

Proposition Soit $A \in \mathcal{M}(n \times n\,,\,\mathbf{R})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Les assertions suivantes sont équivalentes:

(1) λ est une valeur propre de A
(2) λ est une valeur propre de A^t
(3) $\overline{\lambda}$ est une valeur propre de A
(4) $\overline{\lambda}$ est une valeur propre de A^t.

Dém. C'est une conséquence de
$\det\,(A - \lambda I_n) = \det\,\Big((A - \lambda I_n)^t\Big) = \det\,(A^t - \lambda I_n)$, ainsi que
$\overline{\det(A - \lambda I_n)} = \det\,(A - \overline{\lambda} I_n)$. ○

Proposition. Soit $A \in O(n)$. Alors

(1) 1 est valeur propre de $A \iff$ 2 est valeur propre de $A + A^t$
(2) -1 est valeur propre de $A \iff -2$ est valeur propre de $A + A^t$
(3) $e^{i\theta}$ est valeur propre de $A \iff e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta$ est valeur propre de $A + A^t$.

Dém. Soit $c = \cos\theta$. Comme A est inversible on a $\det A \neq 0$. Donc:
$2c$ valeur propre de $A + A^t$
$\iff \det\,(A + A^t - 2cI_n) = 0$
$\iff (\det\,A)\Big(\det\,(A + A^t - 2cI_n)\Big) = 0$
$\iff \det\,\Big(A(A + A^t - 2cI_n)\Big) = 0$
$\iff \det\,(A^2 + AA^t - 2cA) = 0$
$\underset{\iff}{AA^t = I_n} \det\,(A^2 - 2cA + I_n) = 0$
$\iff \det\,\Big((A - e^{i\theta}I_n)(A - e^{-i\theta}I_n)\Big) = 0$
$\iff \det\,(A - e^{i\theta}I_n)\,\det\,(A - e^{-i\theta}I_n) = 0$
$\iff e^{i\theta}$ ou (et) $e^{-i\theta}$ valeurs propres de A.

Notons que $x^2 - 2cx + 1 = 0 \Longleftrightarrow x = e^{\pm i\theta}$. $\bigcirc$

Définition Une matrice $A \in \mathcal{M}(n \times n\,, \mathbf{R})$ est dite <u>symétrique</u> si $A^t = A$.
<u>ex</u> $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Proposition Soit $A \in \mathcal{M}(n \times n\,, \mathbf{R})$ et soit $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ l'espace euclidien. Alors on a $\forall x, y \in \mathbb{R}^n : \langle Ax, y \rangle = \langle x, A^t y \rangle$.

Dém. $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$.

Alors $\langle Ax, y \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i} x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{ni} x_i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\rangle =$
$= \sum_{j=1}^n \big(\sum_{i=1}^n a_{ji} x_i \big) y_j = \sum_{i=1}^n \big(\sum_{j=1}^n a_{ji} y_j \big) x_i =$
$= \langle x, A^t y \rangle$. $\bigcirc$

Corollaire $A \in \mathcal{M}(n \times n\,, \mathbf{R})$ symétrique $\Longleftrightarrow$ $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ on a $\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$.

Dém. "$\Longrightarrow$" A symétrique $\Longrightarrow A = A^t \Longrightarrow \langle Ax, y \rangle = \langle x, A^t y \rangle = \langle x, Ay \rangle$.

"$\Longleftarrow$" On a $\langle x, A^t y \rangle = \langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$. Donc:
$\forall x, y : \langle x, Ay \rangle - \langle x, A^t y \rangle = 0$, i.e. $\forall x, y : \langle x, (A - A^t) y \rangle = 0$. En particulier, ceci est vrai pour $x = (A - A^t) y$. Donc:
$0 = \langle (A - A^t) y, (A - A^t) y \rangle = \|(A - A^t) y\|^2 \iff (A - A^t) y = 0 \;\forall y \iff Ay = A^t y \;\forall y \iff A = A^t$. $\bigcirc$

Proposition Soit $A \in \mathcal{M}(n \times n\,, \mathbf{R})$ une matrice symétrique, soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ deux valeurs propres distinctes de A et soient x_j des vecteurs propres associés à λ_j. Alors $\langle x_1, x_2 \rangle_{\mathbf{R}} = 0$.

Dém. On a $\langle \lambda_1 x_1, 1 x_2 \rangle \, \langle A x_1, x_2 \rangle \stackrel{A = A^t}{=} \langle x_1, A x_2 \rangle = \langle x_1, \lambda_2 x_2 \rangle$.
Donc $\lambda_1 \langle x_1, x_2 \rangle = \lambda_2 \langle x_1, x_2 \rangle$.
Ceci implique que $\langle x_1, x_2 \rangle = 0$. $\bigcirc$

Théorème*Diagonalisation des matrices symétriques*

Soit $A \in \mathcal{M}(n \times n\,, \mathbf{R})$ une matrice symétrique. Alors toutes les valeurs propres de A sont réelles. En plus A est diagonalisable. Il existe même une matrice orthogonale $S \in O(n)$ telle que $D = S^t A S$ soit la matrice diagonale $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$, où $\lambda_j \in \mathbb{R}$

sont les valeurs propres de A (pas nécessairement distinctes).

Preuve Montrons la première assertion. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et $x \in \mathbb{C}^n$ tq $Ax = \lambda x$, $x \neq 0$. On a:
$\langle Ax, x\rangle_{\mathbb{C}} = \langle \lambda x, x\rangle_{\mathbb{C}} = \lambda \|x\|^2$.
D'autre part:
$\langle Ax, x\rangle_{\mathbb{C}} \overset{A=A^t}{=} \langle x, Ax\rangle_{\mathbb{C}} = \langle x, \lambda x\rangle_{\mathbb{C}} = \overline{\lambda}\,\langle x, x\rangle_{\mathbb{C}} = \overline{\lambda}\|x\|^2$.
Donc $\lambda\|x\|^2 = \overline{\lambda}\|x\|^2$. Comme $x \neq 0$, on obtient $\lambda = \overline{\lambda}$, i.e. λ est réel. ○

Corollaire Soit $A \in \mathcal{M}(n \times n\,, \mathbf{R})$ une matrice symétrique. Alors il existe une base orthonormée $\{v_1, \cdots, v_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ telle que chaque vecteur v_j soit un vecteur propre de A et tq par rapport à cette base nouvelle, la représentation matricielle de l'application $T : x \to Ax$ soit une matrice diagonale.

<u>ex</u> $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Alors A est symétrique.

det $(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda+1)(\lambda-3)$.
Donc on a les valeurs propres $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = 3$. D'éterminons les vecteurs propres y associés:
$(A - \lambda_1 I_2)v = 0 :\quad \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ solution: $\binom{1}{-1}$.
L'espace propre $E_{-1} = \text{vect}\binom{1}{-1}$. Posons $v_1 = \binom{1/\sqrt{2}}{-1/\sqrt{2}}$.

$(A - \lambda_2 I_2)v = 0 :\quad \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ solution: $\binom{1}{1}$.
L'espace propre $E_3 = \text{vect}\,\binom{1}{1}$. Posons $v_2 = \binom{1/\sqrt{2}}{1/\sqrt{2}}$.

On a vu que $v_1 \perp v_2$. Donc $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ est une base orthonormée formée de vecteurs propres de A. Posons $S = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$. Alors $S \in O(2)$ et $S^{-1}AS = S^tAS = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

procédure générale pour trouver une base orthonormée formée de vecteurs propres d'une matrice symétrique

Soit $A \in \mathcal{M}(n \times n\,, \mathbf{R})$ une matrice symétrique.
(1) On calcule le polynôme caractéristique $p_A(\lambda) = \det\,(A - \lambda I_n)$.
(2) On détermine les racines (=zéros) de p_A, i.e. tous les λ tq $p_A(\lambda) = 0$. On sait qu'elles sont réelles. Ce sont les valeurs propres de A.
(3) Soient $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ les valeurs propres de A distinctes $(1 \leq r \leq n)$. Pour chaque λ_j on détermine l'espace propre $E_{\lambda_j} = \{x \in \mathbb{R}^n : (A - \lambda_j I_n)x = 0\}$. Plus précisement,

on détermine une base B_j de E_{λ_j}. Par le procédé de Gram-Schmidt on cherche alors une base orthonormée $\mathcal{B}_j$ de E_{λ_j}.

(4) $\mathcal{B} = \cup_{j=1}^{r} \mathcal{B}_j$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ formée par des vecteurs propres de A.

(5) Soit S la matrice dont les colonnes sont les vecteurs de la base $\mathcal{B}$. Alors $S \in O(n)$, i.e. $S^t = S^{-1}$ et $D = S^t A S$ est une matrice diagonale dont la diagonale est formée par les valeurs propres λ_j, $(j = 1, \cdots, r)$ de A.

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 &&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&& \\ && \lambda_1 &&&&&& \\ &&& \lambda_2 &&&&& \\ &&&& \ddots &&&& \\ &&&&& \lambda_2 &&& \\ &&&&&& \ddots && \\ &&&&&&& \lambda_r & \\ &&&&&&&& \ddots \\ &&&&&&&&& \lambda_r \end{pmatrix}.$$

Soit $D_j = \begin{pmatrix} \lambda_j && \\ & \ddots & \\ && \lambda_j \end{pmatrix}$. Alors D_j est une matrice diagonale d'ordre d_j $(j = 1, \cdots, r)$, où $d_j = \dim E_{\lambda_j}$. On a: $\sum_{j=1}^{r} d_j = n$. En plus, d_j est la multiplicité de la racine λ_j de p_A; i.e. $p_A(\lambda_j) = (p_A)'(\lambda_j) = \cdots = (p_A)^{(d_j-1)}(\lambda_j) = 0$ et $(p_A)^{(d_j)}(\lambda_j) \neq 0$.

<u>ex</u> Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Alors $A = A^t$. En plus, $p_A(\lambda) = (\lambda+1)^2(2-\lambda)$. Les valeurs propres sont donc $\lambda_1 = -1$ (double) et $\lambda_2 = 2$ (simple).

Espaces propres:

$E_2 = \text{vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \text{vect} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$,

$E_{-1} = \text{vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$. Gram-Schmidt nous donne:

$u_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ et:

$$\widetilde{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Donc $u_2 = \frac{\widetilde{u_2}}{\|\widetilde{u_2}\|} = \frac{\widetilde{u_2}}{\sqrt{3/2}} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$.

Donc $E_{-1} = \text{vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \right\}$.

On constate que $\dim E_2 = 1$ et $\dim E_{-1} = 2$. Donc $\dim E_2 + \dim E_{-1} = \dim \mathbb{R}^3 = 3$.

Enfin $S = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$.

On a $S^t = S^{-1}$, donc S est orthogonale et

$S^tAS = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Definition Soit V et W deux espaces vectoriels sur le corps $\mathbb{K}$. Une application $b : V \times W \to \mathbb{K}$ est dite <u>bilinéaire</u>, si elle est linéaire par rapport à chacune de ses variables.

<u>ex</u> Soit $A \in \mathcal{M}(n \times n\,,\, \mathbf{R})$ une matrice. Alors l'application $b : \begin{cases} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \langle Ax, y\rangle_{\mathbb{R}} \end{cases}$, est bilinéaire.

Si on considère x et y comme matrices d'ordre $n \times 1$ (une colonne et de n lignes), on peut aussi écrire b sous la forme $b(x, y) = x^tAy$.

On voit que b est symétrique, i.e. $b(x, y) = b(y, x)$ si et seulement si A est une matrice symétrique. Sous quelles conditions b définit il un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$?

Proposition Soit $A \in \mathcal{M}(n \times n\,,\, \mathbf{R})$ une matrice symétrique. Alors $b(x, y) = \langle Ax, y\rangle_{\mathbb{R}}$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ si et seulement si les valeurs propres de A sont strictement positives.

Dém. Comme b est symétrique et linéaire dans le premier argument, il suffit de voir si $b(x, x) \geq 0$ et que $b(x, x) = 0 \iff x = 0$. Comme A est symétrique, il existe une matrice orthogonale $S \in O(n)$ tq $D = S^tAS$ soit une matrice diagonale formée avec les valeurs propres λ_j de A $(1 \leq j \leq n)$. Soit $y = (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Pour $x = Sy$ on a:

$\langle Ax, x\rangle_{\mathbb{R}} = \langle ASy, Sy\rangle_{\mathbb{R}} \overset{A=A^t}{=} \langle Sy, ASy\rangle_{\mathbb{R}} = \langle y, S^t(ASy)\rangle_{\mathbb{R}} = \langle y, (S^tAS)y\rangle_{\mathbb{R}} = \langle y, Dy\rangle_{\mathbb{R}} = \sum_{j=1}^n y_j(\lambda_j y_j) = \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j^2$.

Donc, on voit que $\langle Ax, x\rangle \geq 0 \iff \forall j\ \lambda_j \geq 0$ et que $\Big[\langle Ax, x\rangle\ = 0 \Longrightarrow x = 0\Big] \iff \forall j\ \lambda_j > 0$.

ex

Soit $A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$. Alors $A \in O(2)$. Notons que $A^t = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Soit $A = \dfrac{1}{10} \begin{pmatrix} 6 & -4\sqrt{3} & 4 \\ 4\sqrt{3} & 7 & \sqrt{3} \\ -4 & \sqrt{3} & 9 \end{pmatrix}$. Alors $A \in O(3)$, car p.ex. les lignes de A forment une base orthonormale:

$(6, -4\sqrt{3}, 4) \perp (4\sqrt{3}, 7, \sqrt{3})$
$(4\sqrt{3}, 7, \sqrt{3}) \perp (-4, \sqrt{3}, 9)$
$(6, -4\sqrt{3}, 4) \perp (-4, \sqrt{3}, 9)$
$\|\frac{1}{10}(6, -4\sqrt{3}, 4)\| = \frac{1}{10}\sqrt{36 + 48 + 16} = 1$
$\|\frac{1}{10}(4\sqrt{3}, 7, \sqrt{3})\| = \frac{1}{10}\sqrt{48 + 49 + 3} = 1$
$\|\frac{1}{10}(-4, \sqrt{3}, 9)\| = \frac{1}{10}\sqrt{16 + 3 + 81} = 1.$

Démontrons que (1) est équivalente à (7):

(1) $\Longrightarrow$ (7): Par hypothèse $\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$. En particulier, ceci est vrai pour $x = y$. Donc: $\|Ax\|^2 = \langle Ax, Ax \rangle = \langle x, x \rangle = \|x\|^2$; i.e. $\|Ax\| = \|x\|$.

(7) $\Longrightarrow$ (1): On peut vérifier que pour des evps réels on a $\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}\left(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2\right)$. Donc la linéarité de A et $\|Ax\| = \|x\|$ pour tout x impliquent que $4\langle Ax, Ay \rangle = \|Ax + Ay\|^2 - \|Ax - Ay\|^2 =$
$= \|A(x+y)\|^2 - \|A(x-y)\|^2 = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = 4\langle x, y \rangle$, i.e. A conserve le produit scalaire et A est donc une matrice orthogonale.

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$. Notons que i est l'indice des lignes et que j est l'indice des colonnes. Soit maintenant $v_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$ la j-me colonne de A. Alors

$$A^t A = \begin{pmatrix} < v_1, v_1 > & < v_1, v_2 > & \cdots & < v_1, v_n > \\ < v_2, v_1 > & < v_2, v_2 > & \cdots & < v_2, v_n > \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ < v_n, v_1 > & < v_n, v_2 > & \cdots & < v_n, v_n > \end{pmatrix},$$

donc $A^t A = (\langle v_j, v_k \rangle)_{1 \leq j,k \leq n}$. Ceci nous montre que $A^t A = I_n$ si et seulement si $\langle v_j, v_k \rangle = \delta jk$; i.e. si et seulement si $\{v_1, \cdots, v_n\}$ est une base orthonormée . On a donc équivalence entre (2) et (5).
Supposons maintenant que (1) est vérifié, i.e que $\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$. Soit $e_j = (0, \cdots, 0, \underbrace{1}_{j}, 0, \cdots, 0)$ le j-me vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Comme $v_j = Ae_j$, on obtient:

$\langle v_j, v_k\rangle = \langle Ae_j, Ae_k\rangle = \langle e_j, e_k\rangle = \delta_{jk}$.
Donc (1) est équivalente à (2).

On admet les autres équivalences. ○

Classification des matrices orthogonales dans $\mathbb{R}^2$

Proposition
$O(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} : \theta \in [0, 2\pi] \right\}$
Interprétation géométrique:
(1) $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ correspond à une rotation d'angle θ autour de l'origine

ex Pour $\theta = \pi/4$ on a:
$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta - \sin\theta \\ \sin\theta + \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} + 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

(2) Les matrices de la forme $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$
représentent une symétrie orthogonale par rapport à la droite $\mathbb{R}\begin{pmatrix} \cos\theta/2 \\ \sin\theta/2 \end{pmatrix}$.

ex $\theta = \pi/2 \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
Alors $A\binom{1}{0} = \binom{0}{1}$ et $A\binom{0}{1} = \binom{1}{0}$.

Classification des matrices orthogonales dans $\mathbb{R}^3$

Théorème Soit $A \in O(3)$. Alors il existe une matrice $S \in O(3)$ telle que:

$$S^t AS = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \text{ avec } \theta \in [0, 2\pi[\ (mod\ 2\pi).$$

ex Soit f la la transformation dans $\mathbb{R}^3$ donnée par:
rotation de 90^0 degré dans le plan $[x, y]$ (donné par l'équation $z = 0$), puis symétrie par rapport au plan $[x, y]$.
Alors, par rapport à la base canonique $\{e_1, e_2, e_3\}$, f est représentée par la matrice
$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Rappel Soit $A \in \mathcal{M}(n \times n\,,\,\mathbf{C})$. Le scalaire $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de A s'il existe un vecteur <u>non nul</u> $v \in \mathbb{C}^n$ tel que $Av = \lambda v$. v est dit alors un vecteur propre de A. On sait que λ est une valeur propre de A si et seulement si λ est une racine (=zéro) du polynôme caractéristique $p_A(\lambda) = \det\,(A - \lambda I_n)$ de A.

Proposition. Soit $A \in O(n)$ et soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A. Alors $|\lambda| = 1$. Donc, si λ est une valeur propre réelle de A, alors $\lambda = \pm 1$.

Démonstration Soit $v \in \mathbb{C}^n$, $v \neq 0$, un vecteur propre associé à la valeur propre λ, i.e. $Av = \lambda v$. Comme A est une matrice orthogonale, on sait d'après le théorème précédent que $\|Av\| = \|v\|$. Donc $|\lambda|\|v\| = \|\lambda v\| = \|v\|$. Ceci implique que $|\lambda| = 1$. ○

Proposition Soit $A \in \mathcal{M}(n \times n\,,\,\mathbf{R})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Les assertions suivantes sont équivalentes:

(1) λ est une valeur propre de A
(2) λ est une valeur propre de A^t
(3) $\overline{\lambda}$ est une valeur propre de A
(4) $\overline{\lambda}$ est une valeur propre de A^t.

Dém. C'est une conséquence de
$\det\,(A - \lambda I_n) = \det\,\Big((A - \lambda I_n)^t\Big) = \det\,(A^t - \lambda I_n)$, ainsi que
$\overline{\det(A - \lambda I_n)} = \det\,(A - \overline{\lambda} I_n)$. ○

Proposition. Soit $A \in O(n)$. Alors

(1) 1 est valeur propre de $A \iff 2$ est valeur propre de $A + A^t$
(2) -1 est valeur propre de $A \iff -2$ est valeur propre de $A + A^t$
(3) $e^{i\theta}$ est valeur propre de $A \iff e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta$ est valeur propre de $A + A^t$.

Dém. Soit $c = \cos\theta$. Comme A est inversible on a $\det A \neq 0$. Donc:
$2c$ valeur propre de $A + A^t$
$\iff \det\,(A + A^t - 2cI_n) = 0$
$\iff (\det\,A)\Big(\det\,(A + A^t - 2cI_n)\Big) = 0$
$\iff \det\,\Big(A(A + A^t - 2cI_n)\Big) = 0$
$\iff \det\,(A^2 + AA^t - 2cA) = 0$
$\overset{AA^t = I_n}{=} \det\,(A^2 - 2cA + I_n) = 0$
$\iff \det\,\Big((A - e^{i\theta} I_n)(A - e^{-i\theta} I_n)\Big) = 0$
$\iff \det\,(A - e^{i\theta} I_n)\,\det\,(A - e^{-i\theta} I_n) = 0$
$\iff e^{i\theta}$ ou (et) $e^{-i\theta}$ valeurs propres de A.

Notons que $x^2 - 2cx + 1 = 0 \Longleftrightarrow x = e^{\pm i\theta}$. $\bigcirc$

Définition Une matrice $A \in \mathcal{M}(n \times n\,, \mathbf{R})$ est dite <u>symétrique</u> si $A^t = A$.

<u>ex</u> $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Proposition Soit $A \in \mathcal{M}(n \times n\,, \mathbf{R})$ et soit $(\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ l'espace euclidien. Alors on a $\forall x, y \in \mathbb{R}^n : \langle Ax, y\rangle = \langle x, A^t y\rangle$.

Dém. $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$.

Alors $\langle Ax, y\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i}x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{ni}x_i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\rangle =$
$= \sum_{j=1}^n \big(\sum_{i=1}^n a_{ji}x_i\big)y_j = \sum_{i=1}^n \big(\sum_{j=1}^n a_{ji}y_j\big)x_i =$
$= \langle x, A^t y\rangle$. $\bigcirc$

Corollaire $A \in \mathcal{M}(n \times n\,, \mathbf{R})$ symétrique $\Longleftrightarrow$ $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ on a $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$.

Dém. "$\Longrightarrow$" A symétrique $\Longrightarrow A = A^t \Longrightarrow \langle Ax, y\rangle = \langle x, A^t y\rangle = \langle x, Ay\rangle$.

"$\Longleftarrow$" On a $\langle x, A^t y\rangle = \langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$. Donc:
$\forall x, y : \langle x, Ay\rangle - \langle x, A^t y\rangle = 0$, i.e. $\forall x, y : \langle x, (A - A^t)y\rangle = 0$. En particulier, ceci est vrai pour $x = (A - A^t)y$. Donc:
$0 = \langle (A - A^t)y, (A - A^t)y\rangle = \|(A - A^t)y\|^2 \Longleftrightarrow (A - A^t)y = 0\ \forall y \Longleftrightarrow Ay = A^t y\ \forall y \Longleftrightarrow A = A^t$. $\bigcirc$

Proposition Soit $A \in \mathcal{M}(n \times n\,, \mathbf{R})$ une matrice symétrique, soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ deux valeurs propres distinctes de A et soient x_j des vecteurs propres associés à λ_j. Alors $\langle x_1, x_2\rangle_{\mathbf{R}} = 0$.

Dém. On a $\langle \lambda_1 x_1, 1x_2\rangle\, \langle Ax_1, x_2\rangle \overset{A=A^t}{=} \langle x_1, Ax_2\rangle = \langle x_1, \lambda_2 x_2\rangle$.
Donc $\lambda_1 \langle x_1, x_2\rangle = \lambda_2 \langle x_1, x_2\rangle$.
Ceci implique que $\langle x_1, x_2\rangle = 0$. $\bigcirc$

Théorème*Diagonalisation des matrices symétriques*

Soit $A \in \mathcal{M}(n \times n\,, \mathbf{R})$ une matrice symétrique. Alors toutes les valeurs propres de A sont réelles. En plus A est diagonalisable. Il existe même une matrice orthogonale $S \in O(n)$ telle que $D = S^t A S$ soit la matrice diagonale $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$, où $\lambda_j \in \mathbb{R}$

sont les valeurs propres de A (pas nécessairement distinctes).

Preuve Montrons la première assertion. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et $x \in \mathbb{C}^n$ tq $Ax = \lambda x$, $x \neq 0$. On a:
$\langle Ax, x\rangle_{\mathbb{C}} = \langle \lambda x, x\rangle_{\mathbb{C}} = \lambda \|x\|^2$.
D'autre part:
$\langle Ax, x\rangle_{\mathbb{C}} \overset{A=A^t}{=} \langle x, Ax\rangle_{\mathbb{C}} = \langle x, \lambda x\rangle_{\mathbb{C}} = \overline{\lambda}\,\langle x, x\rangle_{\mathbb{C}} = \overline{\lambda}\|x\|^2$.
Donc $\lambda\|x\|^2 = \overline{\lambda}\|x\|^2$. Comme $x \neq 0$, on obtient $\lambda = \overline{\lambda}$, i.e. λ est réel. ○

Corollaire Soit $A \in \mathcal{M}(n \times n\,,\mathbf{R})$ une matrice symétrique. Alors il existe une base orthonormée $\{v_1, \cdots, v_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ telle que chaque vecteur v_j soit un vecteur propre de A et tq par rapport à cette base nouvelle, la représentation matricielle de l'application $T : x \to Ax$ soit une matrice diagonale.

<u>ex</u> $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Alors A est symétrique.

det $(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda+1)(\lambda-3)$.
Donc on a les valeurs propres $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = 3$. D'éterminons les vecteurs propres y associés:
$(A - \lambda_1 I_2)v = 0 :\quad \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ solution: $\binom{1}{-1}$.
L'espace propre $E_{-1} = \text{vect}\binom{1}{-1}$. Posons $v_1 = \binom{1/\sqrt{2}}{-1/\sqrt{2}}$.

$(A - \lambda_2 I_2)v = 0 :\quad \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ solution: $\binom{1}{1}$.
L'espace propre $E_3 = \text{vect}\,\binom{1}{1}$. Posons $v_2 = \binom{1/\sqrt{2}}{1/\sqrt{2}}$.

On a vu que $v_1 \perp v_2$. Donc $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ est une base orthonormée formée de vecteurs propres de A. Posons $S = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$. Alors $S \in O(2)$ et $S^{-1}AS = S^tAS = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

procédure générale pour trouver une base orthonormée formée de vecteurs propres d'une matrice symétrique

Soit $A \in \mathcal{M}(n \times n\,,\mathbf{R})$ une matrice symétrique.
(1) On calcule le polynôme caractéristique $p_A(\lambda) = \det\,(A - \lambda I_n)$.
(2) On détermine les racines (=zéros) de p_A, i.e. tous les λ tq $p_A(\lambda) = 0$. On sait qu'elles sont réelles. Ce sont les valeurs propres de A.
(3) Soient $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ les valeurs propres de A distinctes ($1 \leq r \leq n$). Pour chaque λ_j on détermine l'espace propre $E_{\lambda_j} = \{x \in \mathbb{R}^n : (A - \lambda_j I_n)x = 0\}$. Plus précisement,

on détermine une base B_j de E_{λ_j}. Par le procédé de Gram-Schmidt on cherche alors une base orthonormée $\mathcal{B}_j$ de E_{λ_j}.

(4) $\mathcal{B} = \cup_{j=1}^{r} \mathcal{B}_j$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ formée par des vecteurs propres de A.

(5) Soit S la matrice dont les colonnes sont les vecteurs de la base $\mathcal{B}$. Alors $S \in O(n)$, i.e. $S^t = S^{-1}$ et $D = S^t A S$ est une matrice diagonale dont la diagonale est formée par les valeurs propres λ_j, $(j = 1, \cdots, r)$ de A.

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & \lambda_1 & & & & & & \\ & & & \lambda_2 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & \lambda_2 & & & \\ & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & \lambda_r & \\ & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & \lambda_r \end{pmatrix}.$$

Soit $D_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_j \end{pmatrix}$. Alors D_j est une matrice diagonale d'ordre d_j $(j = 1, \cdots, r)$, où $d_j = \dim E_{\lambda_j}$. On a: $\sum_{j=1}^{r} d_j = n$. En plus, d_j est la multiplicité de la racine λ_j de p_A; i.e. $p_A(\lambda_j) = (p_A)'(\lambda_j) = \cdots = (p_A)^{(d_j-1)}(\lambda_j) = 0$ et $(p_A)^{(d_j)}(\lambda_j) \neq 0$.

<u>ex</u> Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Alors $A = A^t$. En plus, $p_A(\lambda) = (\lambda+1)^2(2-\lambda)$. Les valeurs propres sont donc $\lambda_1 = -1$ (double) et $\lambda_2 = 2$ (simple).

Espaces propres:

$E_2 = \text{vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \text{vect} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$,

$E_{-1} = \text{vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$. Gram-Schmidt nous donne:

$u_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ et:

$\widetilde{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Donc $u_2 = \frac{\widetilde{u_2}}{\|\widetilde{u_2}\|} = \frac{\widetilde{u_2}}{\sqrt{3/2}} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$.

Donc $E_{-1} = \text{vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \right\}$.

On constate que $\dim E_2 = 1$ et $\dim E_{-1} = 2$. Donc $\dim E_2 + \dim E_{-1} = \dim \mathbb{R}^3 = 3$.

Enfin $S = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$.

On a $S^t = S^{-1}$, donc S est orthogonale et

$S^tAS = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Definition Soit V et W deux espaces vectoriels sur le corps $\mathbb{K}$. Une application $b : V \times W \to \mathbb{K}$ est dite <u>bilinéaire</u>, si elle est linéaire par rapport à chacune de ses variables.

<u>ex</u> Soit $A \in \mathcal{M}(n \times n\,, \mathbf{R})$ une matrice. Alors l'application $b : \begin{cases} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \langle Ax, y\rangle_{\mathbb{R}} \end{cases}$, est bilinéaire.

Si on considère x et y comme matrices d'ordre $n \times 1$ (une colonne et de n lignes), on peut aussi écrire b sous la forme $b(x, y) = x^tAy$.

On voit que b est symétrique, i.e. $b(x, y) = b(y, x)$ si et seulement si A est une matrice symétrique. Sous quelles conditions b définit il un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$?

Proposition Soit $A \in \mathcal{M}(n \times n\,, \mathbf{R})$ une matrice symétrique. Alors $b(x, y) = \langle Ax, y\rangle_{\mathbb{R}}$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ si et seulement si les valeurs propres de A sont strictement positives.

Dém. Comme b est symétrique et linéaire dans le premier argument, il suffit de voir si $b(x, x) \geq 0$ et que $b(x, x) = 0 \iff x = 0$. Comme A est symétrique, il existe une matrice orthogonale $S \in O(n)$ tq $D = S^tAS$ soit une matrice diagonale formée avec les valeurs propres λ_j de A $(1 \leq j \leq n)$. Soit $y = (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Pour $x = Sy$ on a: $\langle Ax, x\rangle_{\mathbb{R}} = \langle ASy, Sy\rangle_{\mathbb{R}} \overset{A=A^t}{=} \langle Sy, ASy\rangle_{\mathbb{R}} = \langle y, S^t(ASy)\rangle_{\mathbb{R}} = \langle y, (S^tAS)y\rangle_{\mathbb{R}} = \langle y, Dy\rangle_{\mathbb{R}} = \sum_{j=1}^n y_j(\lambda_j y_j) = \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j^2$.

Donc, on voit que $\langle Ax, x\rangle \geq 0 \iff \forall j\ \lambda_j \geq 0$ et que $\Big[\langle Ax, x\rangle\ = 0 \Longrightarrow x = 0\Big] \iff \forall j\ \lambda_j > 0$.

Notions topologiques et convergence dans $\mathbb{R}^n$

Notion de distance

Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$, i.e.
N1 $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$
N2 $\|x\| \geq 0$ et $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$
N3 $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

ex Pour $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ on notera
$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^n |x_j|^2}$ (norme euclidienne)
$\|x\|_\infty = \max_{1\leq j\leq n} |x_j|$
$\|x\|_1 = \sum_{j=1}^n |x_j|$.

Définition Deux normes $\|\cdot\|_a$ et $\|\cdot\|_b$ sur un espace vectoriel E sont dites équivalentes s'il existe deux constantes $C_1 > 0$ et $C_2 > 0$ tq
$C_1\|x\|_a \leq \|x\|_b \leq C_2\|x\|_a$.

Proposition $\forall x \in \mathbb{R}^n$ on a:
$\frac{1}{\sqrt{n}}\|x\|_2 \leq \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty$.

Preuve. Soit $|x_{j_0}| = \max_{1\leq j\leq n} |x_j|$.
$\frac{1}{\sqrt{n}}\|x\|_2 = \frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\sum_{j=1}^n |x_j|^2} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{n|x_{j_0}|^2} = |x_{j_0}| = \|x\|_\infty = \sqrt{|x_{j_0}|^2} \leq \sqrt{\sum_{j=1}^n |x_j|^2} =$
$\|x\|_2 \leq \sqrt{\left(\sum_{j=1}^n |x_j|\right)^2} = \sum_{j=1}^n \underbrace{|x_j|}_{\leq |x_{j_0}|} = \|x\|_1 \leq n|x_{j_0}| = n\|x\|_\infty$. ○

Proposition Sur $\mathbb{R}^n$ toutes les normes sont équivalentes.

Définition Soit M un ensemble non vide. Une application $d : M \times M \to \mathbb{R}$ est une distance si:

D1 $d(x, y) \geq 0$ et $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$
D2 $d(x, y) = d(y, x)$ symétrie
D3 $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ inégalité triangulaire

ex • Soit E un espace vectoriel muni d'une norme $\|\cdot\|$. Alors $d(x, y) = \|x - y\|$ définit une distance sur E.

Preuve D1 et D2 sont claires. En plus, $d(x, y) = \|x - y\| = \|(x - z) + (z - y)\| \leq \|x - z\| + \|z - y\| = d(x, z) + d(z, y)$.

• Soit $E = C[0, 1])$ l'espace vectoriel des fonctions continues et à valeurs réelles sur $[0, 1]$. Alors

$d(f,g) = \sqrt{\int_0^1 |f(t)-g(t)|^2\, dt}$ est une distance sur E.

Remarques —Un ensemble M muni d'une distance d s'appelle *espace métrique*.
—Un espace vectoriel E muni d'une norme s'appelle *espace normé*.
—La distance $d(x,y) = \|x-y\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^n |x_j - y_j|^2}$
$x, y \in \mathbb{R}^n$ s'appelle *distance euclidienne*.

Définition Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$ et $d(x,y) = \|x-y\|$.
(1) Supposons que $M \subseteq \mathbb{R}^n$. On dit que M est <u>borné</u> si M est inclus dans une boule $B(x_0; r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| < r\}$ pour un certain $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$.

(Remarque: comme toutes les normes sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes, cette notion ne dépend pas du choix de la norme)
(2) Soit $S \subseteq \mathbb{R}$ un ensemble borné. Un nombre $C \in \mathbb{R}$ s'appelle *borne supérieure de S*, si $\forall x \in S$ on a: $x \leq C$.

(3) Soit $M \subseteq \mathbb{R}^n$ un ensemble borné. Alors le <u>diamètre</u> de M est égal à la plus petite borne supérieure de l'ensemble $\mathcal{D}$ des distances $d(x,y)$, où $x, y \in M$. Notation: $\mathrm{diam} M = \sup\{d(x,y) : x, y \in M\}$.

<u>ex</u> Soit $B = B(x_0; r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\|_2 < r\}$ une boule euclidienne. Alors $\mathrm{diam}\, B = 2r$.
Preuve Supposons d'abord que $x_0 = 0$. Alors $x, y \in B \implies d(x,y) = \|x-y\| \leq \|x\| + \|y\| < r + r = 2r$. Donc $2r$ est une borne supérieure de $\mathcal{D}$. Prenons $x_n = (r - \frac{1}{n}, 0, \cdots, 0)$, $y_n = (-r + \frac{1}{n}, 0, \cdots, 0)$. Alors $x_n, y_n \in B$ et $d(x_n, y_n) = 2r - \frac{2}{n} \to 2r$ si $n \to \infty$.
Si le centre x_0 est différent de 0, on utilise le fait que la distance euclidienne est invariante par translation; i.e.
$\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$ $d(x,y) = d(x - x_0, y - x_0)$.
Comme $x \in B(x_0; r) \iff x - x_0 \in B(0; r)$ on obtient pour $u = x - x_0$ et $v = y - x_0$
$\mathrm{diam}\, B(x_0; r) = \sup\{d(x,y) : x, y \in B(x_0; r)\} = \sup\{d(u,v) : u, v \in B(0; r)\} = 2r$.

Notion de convergence

Définition *convergence dans* $\mathbb{R}^n$

Soit $\|\cdot\|$ une norme dans $\mathbb{R}^n$ et soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de points dans $\mathbb{R}^n$. Alors on dit que (x_k) converge vers $x \in \mathbb{R}^n$ si $\|x_k - x\| \to 0$ pour $k \to \infty$ (Not.: $x_k \overset{\|\cdot\|}{\to} x$.

Remarque Comme toutes les normes dans $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes, on a $x_k \overset{\|\cdot\|_\alpha}{\to} x \iff x_k \overset{\|\cdot\|_\beta}{\to} x$.

ex Soit $x_k = \left(\frac{1}{k}, \sqrt{\frac{1}{k}}\right)$; $x = (0,0)$. Alors $\|x_k - x\|_2 = \sqrt{\left(\frac{1}{k}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{k}\right)^2 + \frac{1}{k}} \to$ 0 si $k \to \infty$,
donc $x_k \to x$.

Théorème Soit $x_k = (a_1^k, \cdots, a_n^k) \in \mathbb{R}^n$ et soit $x = (a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. Alors
$x_k \overset{\|\cdot\|}{\to} x \iff \lim\limits_{k\to\infty} a_j^k = a_j \quad \forall j = 1, \cdots, n.$

En d'autres mots, la convergence dans la norme est égale à la convergence des composantes.

ex
$\left(\frac{1}{k} + e^{-k}, \sin\frac{1}{k}, \log(1 + \frac{1}{k})\ \right) \to (0,0,0)$,
$\left((-1)^k, \frac{1}{k}\right)$ ne converge pas.

notions topologiques

Dans ce paragraphe, on regarde $\mathbb{R}^n$ comme espace normé muni d'une norme quelconque.

Définition (1) Soit $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Un point $x_0 \in \mathbb{R}^n$ s'appellé point intérieur de M, s'il existe une boule B de centre x_0 tq $B \subseteq M$.

(2) L'ensemble de tous les points intérieurs de M est l'intérieur de M. Not.: M^0.

(3) M est dit ouvert si chaque point x_0 de M est un point intérieur de M, i.e si $M = M^0$.

- $\mathbb{R}^1$, $]a,b[$, $]-\infty, b[$, $]a, \infty[$
sont des parties ouvertes de $\mathbb{R}^1$.
- $[a,b[$ et $[a,b]$ ne sont pas ouverts dans $\mathbb{R}^1$.
- chaque boule $B = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x - x_0\| < r\}$ dans $\mathbb{R}^n$ est ouverte:

Preuve Soit $y_0 \in B$ et soit $\rho = \frac{1}{2}(r - \|y_0 - x_0\|)$. Alors $B(y_0;\rho) \subseteq B(x_0;r)$ parce que $\|x - y_0\| < \rho \Longrightarrow \|x - x_0\| \leq \|x - y_0\| + \|x_0 - y_0\| \leq \rho + \|x_0 - y_0\| = \frac{1}{2}(r - \|y_0 - x_0\|) + \|x_0 - y_0\| = \frac{1}{2}r + \frac{1}{2}\underbrace{\|x_0 - y_0\|}_{<r} < \frac{1}{2}r + \frac{1}{2}r = r$.

- De même $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| > r\}$ est ouvert.
- $M = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| \leq r\}$ n'est pas ouvert, parce que par ex. pour $\|e_1\| = 1$, le point $x = x_0 + re_1 \in M$ mais $x \notin M^0$.

Définition Soit $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Un point $x_0 \in \mathbb{R}^n$ est appelé point frontière de M si toute boule de centre x_0 contient au moins un point de M et un point du complémentaire $M^c = \mathbb{R}^n \setminus M$ de M; i.e . $B \cap M \neq \emptyset$ et $B \cap M^c \neq \emptyset$.
L'ensemble des points frontières de M est la frontière de M (not.: ∂M.)

- $\partial B(x_0;r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| = r\}$.
- $M = B(x_0;r) \setminus \{x_0\} \Longrightarrow \partial M = \partial B(x_0;r) \cup \{x_0\}$.
- $\partial\big([-1,2]\big) = \partial\big([-1,2[\big) = \partial\big(]-1,2]\big) =$

$= \partial\Big(]-1,2[\Big) = \{-1,2\}$.
- $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$, $\quad \partial\mathbb{R}^n = \emptyset$.

Définition Soit $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Un point $x_0 \in \mathbb{R}^n$ est appelé <u>point adhérent</u> à M si toute boule de centre x_0 contient un point de M. L'ensemble des points adhérents à M est appelé <u>l'adhérence</u> ou <u>fermeture</u> de M (not.: $\overline{M}$).

- $B = B(x_0, r) \Longrightarrow \overline{B} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| \leq r\}$
- $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

Propriétés • $\quad M \subseteq \mathbb{R}^n \Longrightarrow \partial M \subseteq \overline{M}$
- $M \subseteq \mathbb{R}^n \Longrightarrow M^0 \subseteq M \subseteq \overline{M}$
- $M \subseteq \mathbb{R}^n \Longrightarrow \overline{M} = M \cup \partial M$
- $M \subseteq \mathbb{R}^n \Longrightarrow \partial M = \overline{M} \setminus M^0$.

Rappellons q'une partie M de $\mathbb{R}^n$ est dite ouverte si $M = M^0$. Par analogie on a:

Définition • $\quad$ Une partie M de $\mathbb{R}^n$ est dite <u>fermée</u> si $M = \overline{M}$.

- Les boules $\overline{B}(x_o;r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| \leq r\}$ sont des parties fermées de $\mathbb{R}^n$.
- Il existe des ensembles qui ne sont ni ouverts, ni fermés:

$[a,b[, \quad]a,b], \quad \mathbb{Q}, \quad \overline{B}(x_0;r) \setminus \{x_0\}$.
- $\mathbb{R}^n$ est à la fois ouvert et fermé.

Notons que $\overline{M}$ est un fermé et que M^0 est un ouvert. Ceci est une conséquence des faits que $\overline{\overline{M}} = \overline{M}$ et que $(M^0)^0 = M^0$.

Définition Une partie $M \subseteq \mathbb{R}^n$ est <u>dense</u> dans $\mathbb{R}^n$ si $\overline{M} = \mathbb{R}^n$; i.e. si pour chaque point $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et chaque boule $B = B(x_0;r)$ de centre x_0 on a $B \cap M \neq \emptyset$.

- $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Propriétés des ensembles ouverts .

(1) La réunion d'un nombre quelconque d'ouverts est un ouvert.
(2) L'intersection d'un nombre *fini* d'ouverts est un ouvert.

Dém. (1) Soient U_n des ouverts et soit $U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$. Montrons que U est ouvert. Soit $x_0 \in U$. Alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tq $x_0 \in U_{n_0}$. U_{n_0} ouvert implique qu'il existe une boule $B = B(x_0;r)$ entièrement incluse dans U_{n_0}. Donc $B \subseteq U_{n_0} \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$, ce qui implique que x_0 est un point intérieur de U. Donc $U = U^0$; i.e. U est ouvert.

(2) Soient $V_1, \cdots, V_n$ des ouverts et soit $V = \bigcap_{j=1}^n V_j$. Montrons que V est un ouvert. Soit $x_0 \in V$. Ceci implique que pour tout $j \in \{1, \cdots, n\}$ on a $x_0 \in V_j$. Comme V_j est un ouvert, il existe pour tout j une boule $B_j = B(x_0, r_j)$ tq $B_j \subseteq V_j$, $j = 1, \cdots, n$. Soit $r = \min\{r_1, \cdots, r_n\}$. Alors $B(x_0; r) \subseteq \bigcap_{j=1}^n V_j = V$. Donc $x_0 \in V^0$. Comme x_0 était choisi arbitrairement, on a $V = V^0$, donc V est ouvert. $\bigcirc$

Remarque En général l'intersection d'un nombre infini d'ouverts n'est pas un ouvert:

$I_n =]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[\ (n \in \mathbb{N}^*) \quad \Longrightarrow \quad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{0\}$, mais $\{0\}$ n'est pas un ouvert.

(3) • $U \subseteq \mathbb{R}^n$ est un ouvert $\Longleftrightarrow$ $U^c = \mathbb{R}^n \setminus U$ est un fermé.
• Soit $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Alors $(\overline{M})^c \overset{*}{=} (M^c)^0$ et $(M^0)^c = \overline{(M^c)}$.

Démontrons par exemple *. Soit $x_0 \in (\overline{M})^c$, i.e x_0 n'est pas un élément de $\overline{M}$. En vue de la définition des points adhérents à M, on voit qu'il existe une boule B centrée en x_0 qui ne coupe pas M, i.e. $B \cap M = \emptyset$. Ceci est équivalent à ce que $B \subseteq M^c$. Donc x_0 est un point intérieur de M^c. On conclut que $(\overline{M})^c \subseteq (M^c)^0$. L'autre inclusion se montre de la même façon.

(4) La réunion d'un nombre *fini* de fermés est un fermé.
(5) L'intersection d'un nombre quelconque de fermés est un fermé.

Dém. (5) Soit F_j des fermés. D'après les règles de de Morgan on obtient: $(\bigcap F_j)^c = \bigcup(F_j^c)$ $(*)$.
(3) implique que $(F_j)^c$ est ouvert. (1) implique que la réunion de ces ouverts est un ouvert. Donc, d'après $(*)$ et (3), $\bigcap F_j$ est fermé.

(6) Soit $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Alors la frontière ∂M de M est un fermé.

Dém. Notons que $\partial M = \overline{M} \setminus M^0$. Donc $\partial M = \overline{M} \cap (M^0)^c$ est l'intersection de deux fermés, qui est un fermé.

Théorème *caractérisation de l'adhérence de M*

Soit $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Alors un point $x_0 \in \mathbb{R}^n$ appartient à $\overline{M}$ si et seulement si il existe une suite d'éléments de M qui converge vers x_0.

ex • $0 \in \overline{]0, 1]}$ car $\frac{1}{n}$ converge vers 0.
• Soit $M = \{(x, \sin 1/x) : 0 < x \leq 2/\pi\}$. Alors $\overline{M} = M \cup \{(0, s) : -1 \leq s \leq 1\}$, car:

Soit $(0, s) \in \mathbb{R}^2$ avec $-1 \leq s \leq 1$. Choisissons $\alpha \in [0, 2\pi[$ tq $\sin\alpha = s$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, soit $x_k = \frac{1}{\alpha+2k\pi}$ et $p_k = (x_k, \sin\frac{1}{x_k})$. Alors $p_k \in M$ et $p_k \to (0, s)$.

Différentielles de fonctions à plusieurs variables

Convention Dans ce chapitre $\|\cdot\|_n$ est la norme euclidienne $\sqrt{\sum_{j=1}^n |x_j|^2}$ dans $\mathbb{R}^n$.

Définition Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$
$x = (x_1, \cdots, x_n) \mapsto f(x_1, \cdots, x_n)$ une fonction réelle à n variables. Soient $a \in U,\ L \in \mathbb{R}$. On dit que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$, si pour toute suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $a_k \neq a$, d'éléments de U, et convergeante vers a, la suite des images $(f(a_k))_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers L, donc
$a_k \overset{\|\cdot\|_n}{\to} a \implies f(a_k) \to L$.

<u>ex</u> • $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2,\ a = (1, -1)$.
$\lim\limits_{(x_1,x_2)\to(1,-1)} f(x_1, x_2) = -1$, car
soit $a_k = (\alpha_k, \beta_k)$ une suite qui converge vers $(1, -1)$, i.e. $\alpha_k \to 1$ et $\beta_k \to -1$. Alors $f(a_k) = \alpha_k^2 + 2\beta_k \to 1 + 2(-1) = -1$.

• $g(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1}{x_2} & \text{si } x_2 \neq 0, \\ 0 & \text{si } x_2 = 0 \end{cases}$.
Alors $\lim_{(x_1,x_2)\to(0,0)} g(x_1, x_2)$ n'existe pas, car:
soit $a_k = (\frac{1}{k}, 0)$ et $b_k = (\frac{1}{k}, \frac{1}{k})$. Alors $g(a_k) = 0\ \forall k$ et $g(b_k) = 1\ \forall k$. Donc, quoique a_k et b_k convergent vers le même point $(0, 0)$, les suites des images $g(a_k)$ et $g(b_k)$ convergent vers des limites différentes. Donc le comportement de g dans un voisinage de l'origine dépend du "chemin" de rapprochement vers $(0, 0)$. La limite de $g(x_1, x_2)$ si (x_1, x_2) tend vers $(0, 0)$, n'existe donc pas.

• $h(x, y) = \begin{cases} \frac{(xy)^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$.
Est-ce que $L = \lim_{(x,y)\to(0,0)} h(x, y)$ existe? Comme $h(t, 0) = 0\ \forall t \neq 0$, on a $\lim_{t\to 0} h(t, 0) = 0$. Donc, si L existe, L est nécessairement égale à 0.
$|h(x, y) - 0| = \left|\frac{(xy)^2}{x^2+y^2}\right| = \frac{|xy|}{x^2+y^2}|xy| \leq |xy|$, car $\frac{|xy|}{x^2+y^2} \leq 1/2 \leq 1$. Comme $\lim_{(x,y)\to(0,0)} |xy| = 0$, on a $h(x, y) \to 0$ si $(x, y) \to 0$.

Notons que $0 \leq (|x| - |y|)^2 = x^2 + y^2 - 2|xy| \iff x^2 + y^2 \geq 2|xy| \iff \frac{2|xy|}{x^2+y^2} \leq 1$.

Continuité

Définition Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $x_0 \in U$. Une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ est <u>continue</u> au point x_0 si la limite $L = \lim_{x\to x_0} f(x)$ existe et si $L = f(x_0)$.

• La fonction h ci-dessus n'est pas continue à l'origine puisque $h(0, 0) = 1 \neq \lim_{(x,y)\to(0,0)} h(x, y) = 0$. Mais la fonction $h^*(x, y) = h(x, y)$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $h^*(0, 0) = 0$ est continue à l'origine, parce que $h^*(0, 0) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} h^*(x, y) = 0$.

• La fonction g ci-dessus n'est pas continue à l'origine parce que la limite

$lim_{(x,y)\to(0,0)}g(x,y)$ n'existe pas.

Définition *Continuité d'une fonction vectorielle*
Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f : U \to \mathbb{R}^q$ une fonction vectorielle à n variables (on dit aussi un champ vectoriel). On dit que f est continue au point $a \in U$ si pour toute boule $B_q(f(a);\varepsilon)$ de centre $f(a)$ et de rayon $\varepsilon > 0$ dans $\mathbb{R}^q$ il existe une boule $B_n(a;\delta)$ de centre a et de rayon $\delta > 0$ tq $f\Big(B_n(a;\delta)\Big) \subseteq B_q(f(a);\varepsilon)$, i.e. si
$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ : \|x-a\|_n < \delta \Longrightarrow \|f(x)-f(a)\|_q < \varepsilon$.

Remarque Si $q = 1$ on retrouve la même définition qu' auparavant.

Theorem. Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert et $a \in U$. Une fonction vectorielle $f : U \to \mathbb{R}^q$ à n variables et q composantes est continue au point a si et seulement si les composantes f_j de f sont continues en a, où $f(x_1,\cdots,x_n) = \begin{pmatrix} f_1(x_1,\cdots,x_n) \\ \vdots \\ f_q(x_1,\cdots,x_n) \end{pmatrix}$.

—Ce théorème nous permet de ramener l'étude de la continuité d'une fonction vectorielle à l'étude de la continuité d'une fonction réelle.

Propriétés
(1) La somme et le produit de deux fonctions continues est une fonction continue.

(2) Le quotient f/g de deux fonctions continues est continu en chaque point où $g \neq 0$.

(3) Les monômes $x_1^{q_1}x_2^{q_2}\cdots x_n^{q_n}$ $(q_j \in \mathbb{N})$ sont des fonctions continues sur $\mathbb{R}^n$. On appelle $\sum_{j=1}^n q_j$ le degré de ce monôme. Un polynôme est une combinaison linéaire de ces monômes. Le degré d'un polynôme à n variables est le maximum des degrés des monômes y associés.

(4) Soient $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ et $g : V \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ des fonctions continues. Supposons que $f(U) \subseteq V$. Alors $h = g \circ f : U \to \mathbb{R}^q$ est continue.

<u>ex.</u> • $p(x,y,z) = x^2z + y^4z + x^2 + xy + z + 1$, deg $p = \max\{3,5,2,2,1,0\} = 5$.
• La fonction $h(x,y) = \frac{(xy)^2}{x^2+y^2}$ est continue en chaque point $(x_0,y_0) \neq (0,0)$ parce qu'elle est un quotient de deux polynômes à deux variables.

• Soit $A \in \mathcal{M}(q \times n, \mathbb{R})$, $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le q \\ 1\le j\le n}}$ et
$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^q \\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto Ax \end{cases}, \text{ où } Ax = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{qj}x_j \end{pmatrix}.$$
Alors f est une fonction vectorielle continue.

Notions de dérivées pour des fonctions à n variables

I Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f : U \to \mathbb{R}$. Fixons $a = (a_1, \cdots, a_n) \in U$. Posons $U_j = \{t \in \mathbb{R} : (a_1, \cdots, a_{j-1}, t, a_{j+1}, \cdots, a_n) \in U\}$. Alors U_j est un ouvert dans $\mathbb{R}$.
Considérons pour $j \in \{1, \cdots, n\}$ les fonctions $\Phi_j : U_j \to \mathbb{R}$, définies par
$\Phi_j(x_j) = f(a_1, \cdots, a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, \cdots, a_n)$.
Si Φ_j est dérivable au point a_j, alors on dit que la dérivée partielle de f en a par rapport à la variable x_j existe et on a
$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \frac{d\Phi_j}{dx_j}(a_j)$.
Autre notation: $f_{x_j}(a)$.
On a donc:
$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \lim_{x_j \to a_j} \frac{\Phi_j(x_j) - \Phi_j(a_j)}{x_j - a_j} = \lim_{t \to 0} \frac{\Phi_j(a_j + t) - \Phi_j(a_j)}{t} =$$
$= \lim_{t\to 0} \frac{f(a_1, \cdots, a_{j-1}, a_j + t, a_{j+1}, \cdots, a_n) - f(a_1, \cdots, a_n)}{t}$.
Le <u>gradient</u> de f est le vecteur (ligne)
$\text{grad} f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right) = \nabla f(a)$ (nabla de f).

<u>ex</u> • $f(x, y) = x^2y^3 + x^4 + 3$
$f_x(x, y) = 2xy^3 + 4x^3$ (y considérée comme une "constante")
$f_y(x, y) = 3x^2y^2$ (x considérée comme une "constante")

grad $f(1, 2) = (20, 12)$.

II Soit $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^q$ une fonction vectorielle aux composantes $f_1, \cdots, f_q$ définie sur l'ouvert U. Supposons qu'au point $a \in U$ les gradients $\nabla f_j(a)$ existent ($1 \le j \le q$).
Alors la matrice
$$J_f(a) = \frac{\partial(f_1, \cdots, f_q)}{\partial(x_1, \cdots, x_n)}(a) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(a) \\ \vdots \\ \nabla f_q(a) \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_q}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_q}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_q}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$
est la <u>matrice jacobienne</u> de f en a.
(Notons que la j-me ligne de J_f est le gradient de f_j).

<u>ex</u> • $f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x^2 + y \\ y \end{pmatrix}$
Alors $J_f(x, y) = \begin{pmatrix} 4x & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

• Soit $g(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$. Est-ce que le gradient de g existe sur $\mathbb{R}^2$?

Si $(x, y) \neq (0, 0)$ on a:

$\text{grad}\, g(x,y) = \left(\frac{(x^2+y^2)y - xy\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}, \frac{(x^2+y^2)x - xy\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}\right) =$
$= \left(\frac{y^3 - x^2y}{(x^2+y^2)^2}, \frac{x^3-y^2x}{(x^2+y^2)^2}\right).$
Si $(x,y) = (0,0)$ on a:

$g_x(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{g(t,0)-g(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = 0$
$g_y(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{g(0,t)-g(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = 0,$
donc $\nabla g(0,0) = (0,0)$.

Notions de différentielles de fonctions de plusieurs variables

Rappel Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. La dérivée de f en a est donnée par (si elle existe):
(1) $f'(a) = \lim_{t\to a} \frac{f(t)-f(a)}{t-a}$.
Ceci est équivalent à ce que
(2) $f(t) = f(a) + (t-a)f'(a) + \mathcal{O}(t-a)$ où $\lim_{t\to a} \frac{\mathcal{O}(t-a)}{t-a} = 0$ (on dit que f est différentiable en a).
En d'autres mots, f est différentiable en a, s'il existe une application linéaire $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

(2') $f(t) = f(a) + L(t-a) + \mathcal{O}(t-a)$

(On choisit $Lu = f'(a) \cdot u \;\; (u \in \mathbb{R})$).
L'équation de la tangente T de f en a est:
$y = f(a) + f'(a)(x-a)$.
On va généraliser cela au cas de fonctions de plusieurs variables. But: donner une approximation des fonctions différentiables par des applications linéaires.

Définition Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert, $a \in U$ et $f : U \to \mathbb{R}^q$ une fonction vectorielle. On dit que f est <u>différentiable</u> au point a s'il existe une application linéaire $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^q$ tq
$$f(x) = f(a) + L(x-a) + \mathcal{O}(x-a), \qquad (*)$$
où $\mathcal{O}$ est une fonction vectorielle à q composantes et n variables tq:
$\frac{\|\mathcal{O}(x-a)\|_q}{\|x-a\|_n} \to 0$ si $x \to a$.
En d'autres mots: f est différentiable en $a \iff \lim_{x\to a} \frac{\|f(x)-f(a)-L(x-a)\|_q}{\|x-a\|_n} = 0 \overset{x-a=h}{\iff}$
$\lim_{h\to 0} \frac{\|f(a+h)-f(a)-Lh\|_q}{\|h\|_n} = 0$ où $h = (h_1, \cdots, h_n)^t \in \mathbb{R}^n$.

En utilisant la représentation matricielle des applications linéaires (par rapport aux bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et de $\mathbb{R}^q$), on obtient:
$f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^q$ est différentiable au point $a \in U \iff$ il existe une matrice $A \in \mathcal{M}(q \times n, \mathbb{R})$, tq

$\lim_{h\to 0} \frac{\|f(a+h)-f(a)-Ah\|_q}{\|h\|_n} = 0 \quad h \in \mathbb{R}^n$ (*$*$)

Remarque —Le nombre de lignes de A est égal au nombre des composantes de f, à savoir q,

—le nombre de colonnes de A est égal au nombre des variables, à savoir n.

— Si f est différentiable en a, alors L resp. A est déterminé de façon unique par (*) resp. (*$*$).

Définition L'application linéaire L ci-dessus s'appelle la <u>différentielle</u> de f en a. La matrice A y associée est la <u>dérivée</u> de f en a, et on note $d_a f = L; \quad f'(a) = A$.

Remarque • Soit $q = 1$ et $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ différentiable en a, $a \in U$. Alors la dérivée $f'(a)$ de f en a est une matrice d'une ligne et de n colonnes. On peut donc considérer dans ce cas $f'(a)$ comme un vecteur *ligne*.

• Pour $n = 2$ et $q = 1$, le plan tangentiel au graphe $\{(u, v, z) : \underbrace{(u, v)}_{x} \in U, z = f(u, v)\}$ de f en $a \in U$ est donné par

$z = f(a) + f'(a) \cdot (x - a)$,

où le $\cdot$ est le produit de la matrice $f'(a)$ avec le vecteur colonne $x - a$;

$\left((\cdot \quad \cdot) \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} \in \mathbb{R} \right)$

On peut aussi interpréter $f'(a) \cdot (x - a)$ comme le produit scalaire $\langle f'(a), x - a\rangle$ des deux vecteurs $f'(a)$ et $x - a$.

Théorème 1 Si f est différentiable en $a \in \mathbb{R}^n$, alors f est continue en a.

Remarques—L'existence des dérivées partielles n'implique pas la continuité des fonctions à plusieurs variables. (Notez bien la différence avec le cas d'une fonction d'une seule variable) La dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ d'une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ au point $a \in \mathbb{R}^n$ ne donne que des renseignements sur le comportement de f sur l'axe $a + te_j$ et où $t \in \mathbb{R}$ est proche de zéro.

—Quelles relations y-a-t'il entre la différentielle (dérivée) de f et ses dérivées partielles?

Théorème 2 Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ouvert et $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_q \end{pmatrix} : U \to \mathbb{R}^q$ une fonction vectorielle. Supposons que f soit différentiable en a, $a \in U$. Alors les dérivées partielles $\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a)$ de f en a existent pour tout $j \in \{1, \cdots, n\}$ et $k \in \{1, \cdots, q\}$ et la dérivée de f en a coïncide avec la matrice jacobienne de f en a; i.e. $A = f'(a) = J_f(a)$. En particulier, si $q = 1$, on a $f'(a) = \text{grad } f(a)$.

Dém. f différentiable en $a \iff f(a+h) = f(a) + f'(a)\cdot h + o(\|h\|_n)$, où $h \in \mathbb{R}^n$.
Prenons $h = te_j = t(0,\cdots,0,\underbrace{1}_{j},0,\cdots,0)^t$, alors:

$$\frac{\|f(a+te_j) - f(a) - f'(a)\cdot(te_j)\|_q}{\|te_j\|_n} \overset{t\to 0}{\to} 0.$$

Notons que $t \to 0 \iff h = te_j \to 0$.

Soit $C_j = \begin{pmatrix} c_{1j} \\ \vdots \\ c_{qj} \end{pmatrix}$ la j-me colonne de la matrice $f'(a) \in \mathcal{M}(q\times n, \mathbb{R})$, i.e. $f'(a) = (C_1,\cdots,C_n)$. Comme la j-me colonne de $f'(a)$ est l'image du vecteur canonique e_j par rapport à l'application linéaire $u \to f'(a)\cdot u$, on obtient

$$\frac{\|f(a_1,\cdots,a_{j-1},a_j+t,a_{j+1},\cdots,a_n) - f(a) - tC_j\|_q}{|t|} \to 0.$$

Ceci implique, que pour chacune des q-lignes on a

$$\frac{|f_k(a_1,\cdots,a_{j-1},a_j+t,a_{j+1},\cdots,a_n) - f_k(a) - tc_{kj}|}{|t|} \to 0 \text{ si } t\to 0 \quad (k=1,\cdots,q);$$

i.e. $\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a) = c_{kj}$. Donc $f'(a) = J_f(a)$. ○

On va voir, que la réciproque du théorème 2 n'est pas vraie: ex Soit $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) = (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$.
Cette fonction n'est pas continue à l'origine, car $f(t,t) = \frac{t^2}{2t^2} \to \frac{1}{2} \neq 0 = f(0,0)$ si $t \to 0$, mais les dérivées partielles de f existent partout. Dû au théorème 1, f ne peut pas être différentiable à l'origine.

On a cependant le résultat suivant:

Théorème 3 Une condition suffisante pour que $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^q$ soit différentiable en $a \in U$ est que la matrice jacobienne de f soit continue en a; i.e. que toutes les dérivées partielles $\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a)$, $(j=1,\cdots,n;\ k=1,\cdots,q)$ soient continues en a.

ex • $n=2, q=1 \quad f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$.
Est-ce que f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$?
$1^{\text{er cas}}$ $(x,y) \neq (0,0)$. Calculons le gradient de f.

$f_x(x,y) = \frac{\sqrt{x^2+y^2}\,3x^2 - x^3\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

$f_y(x,y) = \frac{-x^3\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Donc, d'après le théorème 3, f est différentiable sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et $f'(x,y) = \text{grad } f(x,y) = (f_x, f_y)$.

<u>$2^{\text{me cas}}$</u> $(x,y) = (0,0)$.

$f_x(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t^3}{\sqrt{t^2}}-0}{t} = \lim_{t\to 0} |t| = 0$.

$f_y(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} 0 = 0$.
Donc $\nabla f(0,0) = (0,0)$. Il reste à vérifier que

$L = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|f(h,k)-f(0,0)-\nabla f(0,0)\cdot(h,k)|}{\|(h,k)-(0,0)\|_2} = 0$.

En effet, $\dfrac{\left|\frac{h^3}{\sqrt{h^2+k^2}} - 0 - (0,0)\cdot(h,k)\right|}{\sqrt{h^2+k^2}} = \dfrac{|h^3|}{\left(\sqrt{h^2+k^2}\right)^2} = \dfrac{|h^3|}{h^2+k^2} = \left|\dfrac{h^2}{h^2+k^2}\right| |h| \leq$ $|h| \to 0$ si $(h,k) \to (0,0)$.

- $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$

Alors $f_x(0,0)$ n'existe pas car $\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \frac{\frac{t}{t^2}}{t} = \frac{1}{t^2} \to \infty$ si $t \to 0$.
Donc, d'après théorème 2 f n'est pas différentiable à l'origine.

Théorème 4 Soient $f, g : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ différentiable sur l'ouvert U. Alors:
(1) $f+g$ est différentiable sur U et $(f+g)' = f' + g'$.
(2) fg est différentiable sur U et $(fg)'(x_0) = \underbrace{f(x_0)}_{\in\mathbb{R}}\underbrace{g'(x_0)}_{\in\mathbb{R}^n} + \underbrace{g(x_0)}_{\in\mathbb{R}}\underbrace{f'(x_0)}_{\in\mathbb{R}^n}$.

(3) $\frac{f}{g}$ est différentiable en chaque point $x_0 \in U$ où $g(x_0) \neq 0$ et on a
$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \dfrac{g(x_0)f'(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$.

<u>ex</u> Les polynômes de n variables sont différentiables sur $\mathbb{R}^n$ (th. 3) parce que leurs dérivées partielles sont des polynômes, donc des fonctions continues.

Dérivées directionnelles

Définition Soit $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction réelle définie sur l'ouvert U, $a \in U$ et $e \in \mathbb{R}^n$ un vecteur de direction, i.e. $\|e\|_n = 1$ (norme euclidienne). Alors la limite
$\frac{\partial f}{\partial e}(a) = \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \frac{f(a+te)-f(a)}{t}$
(si elle existe) s'appelle <u>dérivée directionnelle</u> de f suivant la direction de e au point a.

Remarque Si $e = e_j = (0, \cdots, 0, \underbrace{1}_{j}, 0, \cdots, 0)$, alors $\frac{\partial f}{\partial e_j} = f_{x_j}$ $(= \frac{\partial f}{\partial x_j})$.

<u>ex.</u> • $f(x,y) = x^3y^2 + x$, $e = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$,
$a = (1,2)$.

Alors $\frac{\partial f}{\partial e}(1,2) = \lim_{t\to 0^+} \frac{f(1+t/\sqrt{2},2-t/\sqrt{2})-f(1,2)}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{(1+t/\sqrt{2})^3(2-t/\sqrt{2})^2+1+t/\sqrt{2}-5}{t} = 9\sqrt{2}$.

Théorème 5 Soit $a \in U \subseteq \mathbb{R}^n$, U ouvert. Supposons que $f : U \to \mathbb{R}$ soit différentiable en a. Alors les dérivées directionnelles de f en a existent pour toutes les directions $e \in \mathbb{R}^n$, $\|e\|_n = 1$, et

$$\frac{\partial f}{\partial e}(a) = \text{grad } f(a) \cdot e$$

(Ici on peut interpréter le $\cdot$ comme produit scalaire des vecteurs lignes grad $f(a)$ et e ou comme produit de la matrice grad $f(a)$ (une ligne, n colonnes) avec le vecteur colonne e).

Démonstration $\frac{f(a+te)-f(a)}{t} = \frac{f'(a)\cdot(te)+\mathcal{O}(te)}{t} = \text{grad } f(a)\cdot e + \frac{\mathcal{O}(te)}{t} \overset{t\to 0}{\longrightarrow} \text{grad } f(a)\cdot e$, car $\lim_{t\to 0} |\frac{\mathcal{O}(te)}{t}| = \lim_{t\to 0} \frac{\mathcal{O}(te)}{\|te\|_n} = 0$.

- Reprenons l'exercice ci-dessus.

$\frac{\partial f}{\partial e}(1,2) = \nabla f(1,2)\cdot(1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2}) = (13,4)\cdot(1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2}) = 9/\sqrt{2}$.

Remarque En général, la formule ci-dessus n'est plus vraie si on suppose seulement que les *dérivées partielles* de f existent en a.

<u>ex.</u> Soit $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

Alors, pour $e = (e_1,e_2)$ avec $e_1^2+e_2^2 = 1$, on a: $\frac{f(te_1,te_2)-f(0,0)}{t} = \frac{t^2 e_1 e_2}{t^2} = e_1 e_2$.
Donc, en laissant tendre t vers 0 on voit que toutes les dérivées directionnelles de f à l'origine existent, qu'on a $\frac{\partial f}{\partial e}(0,0) = e_1e_2$, mais que $\nabla f(0,0)\cdot(e_1,e_2) = (0,0)\cdot(e_1,e_2) = 0 \neq e_1e_2$, si $e_1e_2 \neq 0$.

Théorème 6 Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ouvert, $a \in U$, et soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable au point a.

Si grad $f(a) = 0$, alors toutes les dérivées directionnelles de f en a s'annulent, i.e. $\frac{\partial f}{\partial e}(a) = 0\ \forall e \in \mathbb{R}^n$, $\|e\|_n = 1$.
Si grad $f(a) \neq 0$, alors il existe une direction $e_0 \in \mathbb{R}^n$ tq $\frac{\partial f}{\partial e_0}(a)$ soit maximale. On peut choisir
$e_0 = \frac{\text{grad } f(a)}{\|\text{grad } f(a)\|_n}$ et on a
$\max_{\|e\|_n=1} \dfrac{\partial f}{\partial e}(a) = \dfrac{\partial f}{\partial e_0}(a) = \|\text{grad } f(a)\|_n$.

Démonstration $\frac{\partial f}{\partial e}(a) \overset{Th.5}{=} \text{grad } f(a)\cdot e \overset{Cauchy-Schwarz}{\leq} \|e\|_n\, \|\text{grad } f(a)\|_n \leq \|\text{grad } f(a)\|_n$.
Si $e_0 = \frac{\text{grad } f(a)}{\|\text{grad } f(a)\|_n}$, on obtient: $\frac{\partial f}{\partial e_0}(a) = \|\text{grad } f(a)\|_n$. ○

Dérivées partielles d'ordre supérieur

Définitions (1) Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert. On appelle $f : U \to \mathbb{R}$ <u>continûment différentiable</u> sur U ($f \in C^1(U)$), si toutes les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ de f existent sur U et sont continues.
(2) Si les dérivées partielles des fonctions $g_j = \frac{\partial f}{\partial x_j}$ existent, alors on dit que les dérivées partielles du second ordre de f existent. On note $\frac{\partial g_j}{\partial x_k} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}$ $\quad (j, k = 1, \cdots, n)$
(n^2 fonctions)

On peut considérer de la même manière les dérivées partielles d'ordre p (si elles existent), notées par
$\frac{\partial^p f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_p}} = f_{x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_p}}$, où $i_1, i_2, \cdots, i_p \in \{1, \cdots, n\}$.
Attention à l'ordre des variables: en général $f_{x_1 x_2} \neq f_{x_2 x_1}$ (voir TD).
<u>ex.</u> $f(x, y, z) = x^2 y + z^3 \quad f_x = 2xy \quad f_y = x^2 \quad f_z = 3z^2$
$f_{xx} = 2y \quad f_{xy} = 2x \quad f_{xz} = 0$
$f_{yx} = 2x \quad f_{yy} = 0 \quad f_{yz} = 0$
$f_{zx} = 0 \quad f_{zy} = 0 \quad f_{zz} = 6z.$

Théorème de Schwarz (1) Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert. Supposons que toutes les dérivées partielles du second ordre de $f : U \to \mathbb{R}$ soient continues sur U ($f \in C^2(U)$). Alors $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j} \quad \forall j, k \in \{1, \cdots, n\}$.
(2) Si toutes les dérivées partielles jusqu'à l'ordre p sont continues sur U ($f \in C^p(U)$), on ne change pas $\frac{\partial^p}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_p}}$ on permutant l'ordre des x_j, ($j \in \{1, \cdots, n\}$).

Le Laplacien Δ

Définition Soit $f \in C^2(U)$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ouvert. Le <u>laplacien</u> de f est la fonction
$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} = \sum_{j=1}^n f_{x_j x_j}$.

f est dite <u>harmonique</u> sur U si $\Delta f \equiv 0$.

<u>ex.</u>• $f(x, y) = x^2 - y^2 = \mathrm{Re}\, z^2$ ($z = x + iy$) $\quad \Longrightarrow \Delta f \equiv 0$ pq $f_x = 2x,\ f_y = -2y \Longrightarrow$ $\Delta f = 2 + (-2) = 0$.

• $f(x, y) = \log(x^2 + y^2)$ est harmonique sur
$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ car:
$f_x = \frac{2x}{x^2+y^2} \quad f_y = \frac{2y}{x^2+y^2}$
$f_{xx} = \frac{2(x^2+y^2)-4x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$
$f_{yy} = \frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} \quad \Longrightarrow \Delta f \equiv 0.$
• $f(x_1, \cdots, x_n) = \|x\|_n^{2-n} \quad (n \geq 3)\ x = (x_1, \cdots, x_n)$.

$*\quad n = 3$: électrostatique, gravitation: $f(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

$*\quad n \geq 3$: $f(x_1,\cdots,x_n) = \left(\sum_{j=1}^n x_j^2\right)^{\frac{2-n}{2}}$ est harmonique dans $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, car:

$f_{x_k} = \frac{2-n}{2}\left(\sum_{j=1}^n x_j^2\right)^{-\frac{n}{2}} \cdot 2x_k = \frac{(2-n)x_k}{\left(\sum_{j=1}^n x_j^2\right)^{\frac{n}{2}}}$

$f_{x_k x_k} = (2-n)\left[\left(\sum_{j=1}^n x_j^2\right)^{-\frac{n}{2}} + x_k(-\frac{n}{2})\left(\sum_{j=1}^n x_j^2\right)^{-\frac{n}{2}-1} 2x_k\right] =$

$= (2-n)\left[\left(\sum_{j=1}^n x_j^2\right)^{-\frac{n}{2}}\left(1 - nx_k^2\left(\sum_{j=1}^n x_j^2\right)^{-1}\right)\right]$

$\Longrightarrow \Delta f = \sum_{k=1}^n f_{x_k x_k} =$

$= (2-n)\left(\sum_{j=1}^n x_j^2\right)^{-\frac{n}{2}}\left[n - n\,\underbrace{(\sum_{k=1}^n x_k^2)\Big(\sum_{j=1}^n x_j^2\Big)^{-1}}_{=1}\right] = 0.$

5 Difféomorphismes, changement de variables, formule de Taylor

I Difféomorphismes

Théorème 1 *dérivée d'une application composée*

Soient $U \subseteq \mathbb{R}^n$ et $V \subseteq \mathbb{R}^p$ des ouverts, $a \in U$ et $f : U \to \mathbb{R}^p$ et $g : V \to \mathbb{R}^q$ des applications. Supposons que $f(U) \subseteq V$. Alors $h = g \circ f : U \to \mathbb{R}^q$ est bien définie. Si f est différentiable au point a et g différentiable en $f(a)$, alors h est différentiable en a et

$$\underbrace{h'(a)}_{q\times n} = \underbrace{g'(f(a))}_{q\times p} \cdot \underbrace{f'(a)}_{p\times n}.$$

ex. • $g(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 \\ x+y \end{pmatrix}$,

$f(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ e^t \end{pmatrix}$. $\quad n = 1, p = 2, q = 2.$

$h(t) = (g \circ f)(t) = \begin{pmatrix} t^4 \\ e^t + t^2 \end{pmatrix}$.

1re méthode $\quad h'(t) = \begin{pmatrix} 4t^3 \\ e^t + 2t \end{pmatrix}$.

2me méthode $\quad f'(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ e^t \end{pmatrix} \quad g'(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow$

$h'(t) = g'(t^2, e^t) \cdot \begin{pmatrix} 2t \\ e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t^2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2t \\ e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4t^3 \\ 2t + e^t \end{pmatrix}$.

Définition Soient U et U' des ouverts dans $\mathbb{R}^n$. On dit qu'une bijection $f : U \to U'$ de U sur U' est un difféomorphisme, si f et f^{-1} sont continûment différentiables sur leur domaine de définition, i.e. $f \in C^1(U, U')$ et $f^{-1} \in C^1(U', U)$.

Théorème 2 Soient U et U' des ouverts de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to U'$ un difféomorphisme de U sur U'. Alors pour chaque $a \in U$, l'application linéaire $d_a f(u) = f'(a) \cdot u \ \ (u \in \mathbb{R}^n)$— qui est la différentielle de f en a—, est un isomorphisme (i.e appl. linéaire bijective) de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$.
En plus on a: $(d_a f)^{-1} = d_{f(a)}(f^{-1})$, resp. $(f^{-1})'(y) = \left[f'\Big(f^{-1}(y)\Big)\right]^{-1}$. $*$

En d'autres mots, la matrice jacobienne de f est inversible en chaque point a de U et a pour inverse la jacobienne de f^{-1} au point $f(a)$.

Noter l'analogie avec $n = 1$ $\quad : (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$.

justification de $*$: Soit $x \in U$. Alors $(g \circ f)(x) = x = id_n(x) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Comme pour toute matrice $A \in \mathcal{M}(n \times n, \mathbb{R})$ la dérivée h' de l'application linéaire $h(x) = Ax$ est la fonction vectorielle constante $x \mapsto A$, i.e. $h'(x) = A$, on obtient d'une part

$(g \circ f)'(x) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$ et d'autre part

$(g \circ f)'(x) = \underbrace{g'(f(x))}_{n \times n} \cdot \underbrace{f'(x)}_{n \times n}$. Donc $f'(x)$ est une matrice inversible et $g'(f(x))$ est l'inverse de cette matrice. Si on remplace $f(x)$ par y et x par $f^{-1}(y) = g(y)$ on obtient $*$.

<u>ex.</u> $f(x,y) = \begin{pmatrix} x^3 + y \\ x^3 - y \end{pmatrix}$.

Alors $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$. Déterminons l'inverse f^{-1} de f:

Ceci revient à résoudre les équations non-linéaires $\begin{cases} x^3 + y = u & (1) \\ x^3 - y = v & (2) \end{cases}$, où u et v sont donnés et x et y sont à trouver.

$(1) - (2):\quad 2y = u - v \Longleftrightarrow y = \frac{u-v}{2}$

$(1) + (2):\quad 2x^3 = u + v \Longleftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{u+v}{2}}$.

Donc: $f^{-1}(u,v) = \begin{pmatrix} \sqrt[3]{\frac{u+v}{2}} \\ \frac{u-v}{2} \end{pmatrix}$. Notons que pour des valeurs p négatives, $\sqrt[3]{p}$ est défini comme $-\sqrt[3]{|p|}$.

Soit $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$. Alors $f(U) = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u + v > 0\}$. On voit que f^{-1} est continûment différentiable sur $U' := f(U)$. Calculons $(f^{-1})'$.

<u>1re méthode</u> $J_{f^{-1}}(u,v) = (f^{-1})'(u,v) =$
$= \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(u+v)^{-2/3}(\frac{1}{2})^{1/3} & \frac{1}{3}(u+v)^{-2/3}(\frac{1}{2})^{1/3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

<u>2me méthode</u> $J_f(x,y) = f'(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 & 1 \\ 3x^2 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow (f^{-1})'(u,v) = \big(f'(x,y)\big)^{-1} =$
$-\frac{1}{6x^2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -3x^2 & 3x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6x^2} & \frac{1}{6x^2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ tq $x > 0$ et $f(x,y) = (u,v)$. En remplaçant (x,y) par $(\sqrt[3]{\frac{u+v}{2}}, \frac{u-v}{2})$, on obtient:

$(f^{-1})'(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}\left(\sqrt[3]{\frac{u+v}{2}}\right)^{-2} & \frac{1}{6}\left(\sqrt[3]{\frac{u+v}{2}}\right)^{-2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Théorème 3 *difféomorphismes locaux*
Soit $x_0 \in U \subseteq \mathbb{R}^n$, U ouvert et $f : U \to \mathbb{R}^n$. Supposons que $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ et que $\det J_f(x_0) \neq 0$. Alors il existe un ouvert $V \subseteq U$ avec $x_0 \in V$ tq la restriction de f à V soit un difféomorphisme, i.e.

(1) $V' := f(V)$ est ouvert,
(2) f est une bijection de V sur V',
(3) l'inverse $g(y) = f^{-1}(y)$ existe sur V', est continûment différentiable et on a:
$g'(y) = [f'(g(y))]^{-1} \quad (y \in V')$.

II changement de variables

Soit $y = (y_1, \cdots, y_n)$ un difféomorphisme d'un ouvert $U \subseteq \mathbb{R}^n$ sur un ouvert $U' \subseteq \mathbb{R}^n$, où $y_j = y_j(x_1, \cdots, x_n)$ sont des fonctions dépendant des n variables $x_1, \cdots, x_n$. En plus, soit $f(u_1, \cdots, u_n)$ une fonction à valeurs réelles définie sur U'. Supposons que f soit différentiable sur U'. But: exprimer f et sa dérivée par rapport aux nouvelles variables $x_1, \cdots, x_n$. Ceci revient à considérer la composée $F = f \circ y$, i.e. $F(x_1, \cdots, x_n) = (f \circ y)(x_1, \cdots, x_n) = f\Big(\underbrace{y_1(x_1, \cdots, x_n)}_{u_1}, \cdots, \underbrace{y_n(x_1, \cdots, x_n)}_{u_n}\Big)$.

Calculons les dérivées partielles de F par rapport aux variables $x_1, \cdots, x_n$:

$$\underbrace{F'(x)}_{1\times n} = \underbrace{f'(y(x))}_{1\times n} \cdot \underbrace{y'(x)}_{n\times n} =$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial u_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial u_n}\right) \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \frac{\partial y_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} =$$

$= \left(\frac{\partial f}{\partial u_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial u_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial u_n}\frac{\partial y_n}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial u_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_n} + \frac{\partial f}{\partial u_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_n} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial u_n}\frac{\partial y_n}{\partial x_n}\right) = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial F}{\partial x_n}\right)$.

En résumé:

(*) $\frac{\partial F}{\partial x_k} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial u_j}\frac{\partial y_j}{\partial x_k}$ $(k = 1, \cdots, n)$.

$\underline{n=1}$ $\quad F = f \circ y : \quad \frac{dF}{dx} = \frac{df}{du}\frac{dy}{dx}$.
Par abus de notation on remplace les u dans (*) par des y.

- *coordonnées polaires*

$(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta. \end{cases}$
$0 < r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta \in]0, 2\pi[$ où $\theta \in]-\pi, \pi[$.

Formules de transformations des coordonnées cartésiennes en coordonnées polaires:

Soit $f(x,y)$ une fonction réelle et $F(r,\theta)=f(r\cos\theta, r\sin\theta)$. Alors

$\frac{\partial F}{\partial r}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}=$
$=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial(r\cos\theta)}{\partial r}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial(r\sin\theta)}{\partial r}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta.$

$\frac{\partial F}{\partial \theta}=\frac{\partial f}{\partial x}(-r\sin\theta)+\frac{\partial f}{\partial y}r\cos\theta$

Donc $\begin{pmatrix}\frac{\partial F}{\partial r}\\ \frac{\partial F}{\partial \theta}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -r\sin\theta & r\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}\\ \frac{\partial f}{\partial y}\end{pmatrix}.$

Soit $M=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -r\sin\theta & r\cos\theta\end{pmatrix}$. Alors det $M=r\neq 0$, donc M est inversible et $M^{-1}=\begin{pmatrix}\cos\theta & (-\sin\theta)/r\\ \sin\theta & (\cos\theta)/r\end{pmatrix}$.

Donc $\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}\\ \frac{\partial f}{\partial y}\end{pmatrix}=M^{-1}\begin{pmatrix}\frac{\partial F}{\partial r}\\ \frac{\partial F}{\partial \theta}\end{pmatrix}$
i.e. $\frac{\partial f}{\partial x}=\cos\theta\frac{\partial F}{\partial r}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}=\sin\theta\frac{\partial F}{\partial r}+\frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta}$.

Exprimer le laplacien Δ en coordonnées polaires.
$\Delta f=f_{xx}+f_{yy}$. En utilisant les formules ci-dessus pour F_r et F_θ en obtient:

$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}=\frac{\partial}{\partial r}\Big(\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta,r\sin\theta)+\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta,r\sin\theta)\Big)=$
$=\cos\theta\big(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cos\theta+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\sin\theta\big)+\sin\theta\big(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\cos\theta+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\sin\theta\big)$

$\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}=(-r\sin\theta)\Big[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-r\sin\theta)+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}r\cos\theta\Big]-\frac{\partial f}{\partial x}r\cos\theta+r\cos\theta\Big[\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(-r\sin\theta)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}r\cos\theta\Big]+\frac{\partial f}{\partial y}r(-\sin\theta)$.
D'après Schwarz:
$\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}r^2\sin^2\theta+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}r^2\cos^2\theta-2r^2\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}-\frac{\partial f}{\partial x}r\cos\theta-\frac{\partial f}{\partial y}r\sin\theta.$
Donc $\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}=\Delta f$.

III Formules de Taylor

Rappel Soit $f\in C^{p+1}(I)$, où $I\subseteq\mathbb{R}$ est un intervalle. Supposons que a et $a+h$ appartiennent à I. Alors

$$f(a+h)=\underbrace{f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+\cdots+\frac{h^p}{p!}f^{(p)}(a)}_{T_p=T_p(f;a)(h)}+$$
$$+\underbrace{\frac{h^{p+1}}{(p+1)!}f^{(p+1)}(a+\theta h)}_{R_p(h)},\text{ où }\theta\in]0,1[.$$

Le polynome T_p s'appelle le polynome de Taylor de degré p de f en a. On a: $R_p=\mathcal{O}(h^p)$, i.e. $\lim_{h\to 0}\frac{R_p}{h^p}=0$. Le développement limité de f en a jusqu'à l'ordre p s'écrit donc: $f=T_p+\mathcal{O}(h^p)$.

Généralisons cette formule au cas de fonctions de plusieurs variables:

Ecrivons: $hf'(a) = (h\frac{df}{dx})(a) = (h\frac{d}{dx})f(a)$
$h^2 f''(a) = (h^2\frac{d^2 f}{dx^2})(a) = (h\frac{d}{dx})^2 f(a)$, ... ,
$h^p f^{(p)}(a) = (h^p\frac{d^p f}{dx^p})(a) = (h\frac{d}{dx})^p f(a)$.
Donc $T_p(f;a)(h) = \sum_{j=0}^{p} \frac{1}{j!}(h\frac{d}{dx})^j f(a)$.

Pour le cas de n variables:
$h \cdot \text{grad}\ f(a) = h \cdot \nabla f(a) = (h \cdot \nabla)f(a) = (h_1, \cdots, h_n) \cdot (\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n})f(a) = \left(\sum_{k=1}^{n} h_k \frac{\partial}{\partial x_k}\right) f(a) = \sum_{k=1}^{n} h_k f_{x_k}(a)$.
En posons $(h \cdot \nabla)^p f(a) = \left(\sum_{k=1}^{n} h_k \frac{\partial}{\partial x_k}\right)^p f(a)$ on obtient:

Théorème de Taylor

Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ouvert, $a \in U$ et $f : U \to \mathbb{R}$. Supposons que $f \in C^{p+1}(U)$ et que pour $h = (h_1, \cdots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ le segment $[a, a+h] = \{a + th : 0 \le t \le 1\}$ joignant les points a et $a+h$ soit inclus dans U. Alors il existe $\theta \in]0,1[$ tq

$$f(a+h) = \underbrace{\sum_{j=0}^{p} \frac{1}{j!}(h \cdot \nabla)^j f(a)}_{T_p = T_p(f;a)(h)} + \underbrace{\frac{1}{(p+1)!}(h \cdot \nabla)^{p+1} f(a + \theta h)}_{R_p(h)},$$

où $T_p(f;a)$ est le polynome de Taylor de f en a d'ordre (ou de degré) p.
On a $R_p = \mathcal{O}(\|h\|^p)$; i.e. $\frac{R_p}{\|h\|^p} \to 0$ si $h \to 0$.

<u>ex.</u> • $f(x_1, x_2) = e^{x_1 x_2} \quad a = (0,0)$.
$T_2(f;a)(h_1, h_2) = f(a) + (h_1\frac{\partial}{\partial x_1} + h_2\frac{\partial}{\partial x_2})^1 f(a) + \frac{1}{2!}(h_1\frac{\partial}{\partial x_1} + h_2\frac{\partial}{\partial x_2})^2 f(a) = f(a) + h_1 f_{x_1}(a) + h_2 f_{x_2}(a) + \frac{1}{2}(h_1^2\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + 2h_1 h_2\frac{\partial^2}{\partial x_1 x_2} + h_2^2\frac{\partial^2}{\partial x_2^2})f(a) = f(a) + h_1 f_{x_1}(a) + h_2 f_{x_2}(a) + \frac{1}{2}h_1^2 f_{x_1 x_1}(a) + h_1 h_2 f_{x_1 x_2}(a) + \frac{1}{2}h_2^2 f_{x_2 x_2}(a)$

Ici: $f_{x_1} = x_2 f, \quad f_{x_2} = x_1 f, \quad f_{x_1 x_1} = x_2^2 f, \quad f_{x_2 x_2} = x_1^2 f, \quad f_{x_1 x_2} = f_{x_2 x_1} = f + x_1 x_2 f$
$f(0,0) = 1, \quad f_{x_1}(0,0) = f_{x_2}(0,0) = f_{x_1 x_1}(0,0) = f_{x_2 x_2}(0,0) = 0, \quad f_{x_1 x_2}(0,0) = 1$.

Donc $T_2\big(f;(0,0)\big)(h_1, h_2) = 1 + h_1 h_2$.

Autre méthode:
$e^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3!}t^3 + \cdots + \frac{1}{n!}t^n + \mathcal{O}(t^n) \Longrightarrow$
$e^{x_1 x_2} = 1 + (x_1 x_2) + \frac{1}{2}(x_1 x_2)^2 + \cdots$. Donc:

$T_0(f;(0,0))(x_1, x_2) = T_1(f;(0,0))(x_1, x_2) = 1$
$T_2(f;(0,0))(x_1, x_2) = T_3(f;(0,0))(x_1, x_2) = 1 + x_1 x_2$

et en général:

$T_{2n}(f;(0,0))(x_1, x_2) = T_{2n+1}(f;(0,0))(x_1, x_2) =$

$= 1 + (x_1x_2) + \frac{1}{2}(x_1x_2)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}(x_1x_2)^n.$

Application
Soit $T_3 = T_3\big(f;(0,0)\big)$. Alors $\frac{|e^{h_1h_2} - (1+h_1h_2)|}{(h_1^2+h_2^2)^{3/2}} = \frac{|f(h)-T_3(h)|}{\|h\|^3} = \frac{R_3}{\|h\|^3} \to 0$ si $h = (h_1, h_2) \to (0,0)$.

6 Maxima et minima de fonctions de plusieurs variables

Définition Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert et soit $f(x) = f(x_1, \cdots, x_n)$ une fonction définie sur U à valeurs réelles. On dit que f a un maximum relatif (local) [resp. minimum relatif (local)] au point $a_0 \in U$ s'il existe une boule $B(a_0, r)$ de centre a_0 tq $\forall x \in B(a_0, r): \; f(x) \leq f(a_0)$ [resp. $f(a_0) \leq f(x)$]. On dit que a est un extremum local si a est un maximum ou un minimum local.

Définition Soit $D \subseteq \mathbb{R}^n$ le domaine de définition d'une fonction réelle f. On dit que f a un maximum (global) [resp. minimum (global)] au point $a \in D$ si $\forall x \in D: \; f(x) \leq f(a)$ [resp. $f(a) \leq f(x)$]. Un extremum (global) est un maximum ou minimum global.

Remarque (1) Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert, $f : U \to \mathbb{R}$ et $a \in U$. Alors
a extremum global $\Longrightarrow$ a extremum local.

Théorème 1. Soit $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Supposons que D soit compacte (i.e. bornée et fermée). Alors f admet un minimum et maximum sur D, i.e. il existe $a \in D$ et $b \in D$ tq. $\forall x \in D: \; f(a) \leq f(x) \leq f(b)$.

Théorème 2. *condition nécessaire pour des extrema sur des ouverts*
Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert, $a \in U$ et $f \in C^1(U)$. Supposons que f possède un extrémum local au point a. Alors nécessairement grad $f(a) = 0$.

Remarque (1) La réciproque n'est pas vraie: $f(x) = x^3$ n'admet pas d'extremum à l'origine quoique $f'(0) = 0$.

(2) Les extrema d'une fonction continûment différentiable sur un ouvert sont donc à chercher parmis les solutions $a = (a_1, \cdots, a_n)$ du système d'équations $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) = 0$.

Les solutions s'appellent les points stationnaires de f.
Pour savoir si un point stationnaire fournit effectivement un extremum, une étude plus poussée est nécessaire. On peut utiliser les résultats suivants:

Théorème 3 *conditions suffisantes pour des extrema sur des ouverts*
$n = 2$ Soit $U \subseteq \mathbb{R}^2$ ouvert, $f : U \to \mathbb{R}$, $f \in C^2(U)$ et $(x_0, y_0) \in U$ un point stationnaire de f,i.e. grad $f(x_0, y_0) = (0,0)$. Soit $H_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} \end{pmatrix}$, appellée la matrice de Hesse de f. Alors

(1) f possède un minimum local au point (x_0, y_0) si det $H_f(x_0, y_0) > 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(x_0, y_0) > 0$.

(2) f possède un maximum local au point (x_0, y_0) si det $H_f(x_0, y_0) > 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(x_0, y_0) < 0$.

(3) Si $\det H_f(x_0, y_0) < 0$, alors f n'a pas d'extremum au point (x_0, y_0). Dans ce cas on dit que (x_0, y_0) est un point selle de f.

Dém. Soit $a = (x_0, y_0)$ et $h = (h_1, h_2)$. Comme grad $f(a) = 0$, on a d'après le théorème de Taylor:

$f(a+h) = f(a) + \text{grad } f(a) \cdot h + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{2} f_{x_i x_j}(a) h_i h_j + o(\|h\|^2)$. Donc

$\frac{f(a+h)-f(a)}{\|h\|^2} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{2} f_{x_i x_j}(a) \frac{h_i}{\|h\|} \frac{h_j}{\|h\|} + o(1) =$

$= \frac{1}{2} \left\langle \frac{h}{\|h\|}, H_f(a) \frac{h}{\|h\|} \right\rangle_{\mathbb{R}} + o(1)$.

Soit $H_f(a) = A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}$ et $\Delta = \det A$. Notons que, d'après Schwarz, H_f est une matrice symétrique. Soit $x = \frac{h}{\|h\|}$. Alors $\|x\| = 1$. Pour $x = (x_1, x_2)$ on a:

$\langle x, Ax \rangle_{\mathbb{R}} = x_1(\alpha x_1 + \beta x_2) + x_2(\beta x_1 + \gamma x_2) = \alpha x_1^2 + 2\beta x_1 x_2 + \gamma x_2^2 = \frac{1}{\alpha}\Big((\alpha x_1 + \beta x_2)^2 + \Delta x_2^2\Big)$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}^2, x \neq 0 : \langle x, Ax \rangle > 0 \iff \alpha > 0$ et $\Delta > 0$.

Comme $S = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\}$ est un ensemble compact, la fonction continue $x \mapsto \langle x, Ax \rangle$ prend son minimum sur S, disons que $\min\{\langle x, Ax \rangle : \|x\| = 1\} = \varepsilon$.

Les conditions $\alpha > 0$ et $\Delta > 0$ impliquent que ε est strictement positif. Donc : $\frac{f(a+h)-f(a)}{\|h\|^2} \geq \varepsilon + o(1)$. On laissant tendre $\|h\|$ vers zéro, on voit que $f(a+h) - f(a) \geq 0$ $\forall h$ avec $\|h\| \leq \delta$ i.e. f a un minimum au point a. ○

ex. • $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy \quad U = \mathbb{R}^2$.

(1) $f_x = 3x^2 - 3y \stackrel{!}{=} 0 \iff x^2 = y$

(2) $f_y = 3y^2 - 3x \stackrel{!}{=} 0 \iff y^2 = x$.

(1) et (2) $\implies y^4 = y \iff y(y^3 - 1) = 0 \iff y = 0$ ou $y = 1$.

Donc $(0, 0)$ et $(1, 1)$ sont les points stationnaires de f. (*Faites le contrôle*)

$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}$.

$H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad H_f(1, 1) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$.

$\det H_f(0, 0) = -9 < 0 \implies$ l'origine est un point selle.

$\det H_f(1,1) = 36 - 9 = 27 > 0$; $f_{xx}(1,1) = 6 > 0$, donc $(1,1)$ est un minimum local de f et on a: $f(1,1) = -1$.

- $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2xy + 1,\ U = \mathbb{R}^2$.

(1) $\quad f_x = 2x - 2y \overset{!}{=} 0$

(2) $\quad f_y = 2y - 2x \overset{!}{=} 0$

Donc (1) et (2) vérifiées $\Longleftrightarrow x = y$; i.e. tous les points de la diagonale $x = y$ sont des points stationnaires de f.

$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \det H_f(t,t) = 0\ \forall t \in \mathbb{R}$.

On ne peut donc pas appliquer le critère ci-dessus pour décider si f a un extremum en (t,t). Mais $f(x,y) = (x-y)^2 + 1 \geq 1$ et $f(t,t) = 1$ pour tout t; donc f possède un minimum global aux points de la forme (t,t), $t \in \mathbb{R}$. On peut aussi conclure que f ne possède pas de maximum local.

Pour traiter le cas de n variables, on doit utiliser les concepts suivants:
Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ouvert, $f : U \to \mathbb{R}$, $f \in C^2(U)$. Soit $A = H_f(x) = \left(\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j \partial x_k}\right)_{j,k=1,\cdots,n}$ la matrice de Hesse associée à f. Le théorème de Schwarz nous dit que A est une matrice symétrique. i.e. $A = A^t$. D'après le paragraphe 2 A est diagonalisable, les valeurs propres sont réelles et il existe une matrice orthogonale S tq $S^t AS = D$, où D est une matrice diagonale formée par des vecteurs propres de A.

Définition Soit $A \in \mathcal{M}(n \times n, \mathbb{R})$ une matrice symétrique

(1) A est dite <u>définie positive</u>, $(A > 0)$, si toutes les valeurs propres de A sont strictement positives.

(2) A est dite <u>définie négative</u>, $(A < 0)$, si toutes les valeurs propres de A sont stictement négatives.

(3) A est dite <u>indéfinie</u> si A possède au moins une valeur propre > 0 <u>et</u> (au moins) une valeur propre < 0.

Remarque • $\quad A > 0 \Longleftrightarrow -A < 0$.

- $A > 0 \Longleftrightarrow x^t Ax = \langle x, Ax\rangle_{\mathbb{R}} > 0\ \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \Longleftrightarrow \langle x, Ay\rangle_{\mathbb{R}}$ définie un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.
- $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} > 0 \Longleftrightarrow \det A = \alpha\gamma - \beta^2 > 0$ et $\alpha > 0$.

Dém $A > 0 \Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} : \langle x, Ax\rangle = \alpha x_1^2 + 2\beta x_1 x_2 + \gamma x_2^2 = \frac{1}{\alpha}\big((\alpha x_1 + \beta x_2)^2 + x_2^2 \det A\big) > 0$ $\bigcirc$

Théorème *critère de positivité de Sylvester-Hurwic*
Soit $A = (a_{jk})_{1 \leq j,k \leq n} \in \mathcal{M}(n \times n, \mathbb{R})$ une matrice symétrique et soit

$$\Delta_k = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix} \quad (k = 1, \cdots, n).$$

Alors $A > 0 \iff \Delta_k > 0 \ \forall k \in \{1, \cdots, n\}$ et
$A < 0 \iff \Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0, \cdots$.

Théorème 5. *conditions suffisantes pour des extréma locaux*
Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ouvert et $f \in C^2(U)$. Supposons que $x_0 \in U$ soit un point stationnaire de f, i.e. grad $f(x_0) = 0$. Soit $H_f = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}\right)_{1 \leq j,k \leq n}$ la matrice de Hesse associée à f (c'est une matrice symétrique).

(1) Si $H_f(x_0) > 0$, alors x_0 est un point où f admet un minimum relatif.
(2) Si $H_f(x_0) < 0$, alors x_0 est un point où f admet un maximum relatif.
(3) Si $H_f(x_0)$ est indéfinie, alors f n'admet pas d'extremum en x_0.

Remarque • Le cas $n = 2$ est inclus dans ce théorème.
• Si $H_f(x_0)$ possède une valeur propre égale à 0, alors on ne peut rien conclure.

ex. • $f(x, y, z) = x^2 y + zy + \frac{2}{3}x^3 + 2y^2 + z^2$
(1) $f_x = 2xy + 2x^2 \overset{!}{=} 0 \iff 2x(y + x) = 0$
(2) $f_y = x^2 + z + 4y \overset{!}{=} 0$
(3) $f_z = y + 2z \overset{!}{=} 0 \iff y = -2z$.

Si $x = 0$, alors (2) et (3) impliquent que $y = z = 0$.
Si $x = -y$, alors (3) implique que $x = 2z$. Dans (2):
$4z^2 + z - 8z = 0 \iff z(4z - 7) = 0 \iff z = 0$ ou $z = \frac{7}{4}$.
On a donc deux points stationnaires: $(0, 0, 0,)$ et $(\frac{7}{2}, -\frac{7}{2}, \frac{7}{4})$.

Matrice de Hesse $H_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2y + 4x & 2x & 0 \\ 2x & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

$H_f(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$,

$H_f(\frac{7}{2}, -\frac{7}{2}, \frac{7}{4}) = \begin{pmatrix} 7 & 7 & 0 \\ 7 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

$H_f(0, 0, 0)$ ne satisfait pas les hypothèses du théorème 5, car 0 est une valeur propre. Mais on voit que pour $y = z = 0$ on a:
$f(\frac{1}{n}, 0, 0) > 0$ et $f(-\frac{1}{n}, 0, 0) < 0$. Donc $(0, 0, 0)$ n'est pas un extremum.
Cherchons les signes des valeurs propres de $A = H_f(\frac{7}{2}, -\frac{7}{2}, \frac{7}{4})$. Le polynôme caractéristique est $p_A(\lambda) = -\lambda^3 + 13\lambda^2 - 49$. Comme la matrice est symétrique, on sait

que p_A a trois racines réelles. Comme $\lim_{\lambda\to-\infty} p_A(\lambda) = +\infty$ et que $p_A(0) = -49 < 0$, on en déduit qu'au moins une racine est strictement négative. D'autre part, comme la dérivée $p'_A(\lambda) = \lambda(26-3\lambda)$ s'annulle pour $\lambda = 0$ et $\lambda = \frac{26}{3}$, —des nombres positives—, on peut conclure que les deux autres racines doivent être strictement positives. Donc A possède deux valeurs propres > 0 et une valeur propre < 0; ce qui montre que A est indéfinie. Donc f n'a pas d'extremum au point $(\frac{7}{2}, -\frac{7}{2}, \frac{7}{4})$.

Les méthodes ci-dessus ne s'appliquent pas si on veut déterminer les extrema de fonctions définies sur des compacts.
ex. Soit $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$ et $f(x,y) = xy^2$. Comme E est compact et f continue (c'est un polynôme), on sait que $\min_E f$ et $\max_E f$ existent. Pour les déterminer, on regarde d'abord ce qui se passe sur l'ensemble E^0 des points intérieurs de E.

Comme $E^0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 1\}$ est ouvert, on cherche d'abord les points stationnaires de f sur E^0:
grad $f(x,y) = (y^2, 2xy) = (0,0) \Longleftrightarrow y = 0$ et x arbitraire.
Donc l'ensemble des points stationnaires de f dans E^0 est $S =]-1,1[\times\{0\}$. Si $(x_0,y_0) \in S$ alors $f(x_0,y_0) = 0$.
$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$ det $H_f(x_0,y_0) = -4y_0^2 = 0$. On ne peut rien conclure. Mais, en regardant le signe de f, on voit que f a un maximum relatif en $(x_0,0)$ si $x_0 < 0$ et un minimum relatif en $(x_0,0)$, si $x_0 > 0$, tandis qu'à l'origine f n'a pas d'extremum.

Notons cependant que ces points de S ne sont pas des extrema globaux, parce que f prend aussi bien des valeurs négatives que positives, tandis que $f(x_0,y_0) = 0$ si $(x_0,y_0) \in S$. On en déduit que les extréma globaux se trouvent sur la frontière ∂E du disque unité.

1re méthode Si $x^2+y^2 = 1$ on a : $f(x,y) = xy^2 = x(1-x^2) = h(x)$ où $x \in [-1,1]$. Comme $h'(x) = 1-3x^2 = 0 \Longleftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ et que $h''(x) = -6x < 0$ en $\frac{1}{\sqrt{3}}$ resp. $h''(x) > 0$ en $-\frac{1}{\sqrt{3}}$, on déduit que h a un maximum relatif au point $\frac{1}{\sqrt{3}}$ et un minimum relatif au point $-\frac{1}{\sqrt{3}}$. Comme $h(\pm 1) = 0$, on conclut que $\max\limits_{[-1,1]} h = h(\dfrac{1}{\sqrt{3}}) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1-\dfrac{1}{3}) = \dfrac{2}{3\sqrt{3}}$ et que $\min\limits_{[-1,1]} h = h(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}) = -\dfrac{2}{3\sqrt{3}}$. Comme $\max_E f = \max h_{[-1,1]}$ et que $\min_E f = \min h_{[-1,1]}$, on obtient:
$\max_E f = \frac{2}{3\sqrt{3}}$ et $\min_E f = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$.

En général on ne peut résoudre ce type de problème avec cette méthode "primitive";

d'où on a besoin d'une méthode plus subtile, à savoir la méthode des extréma liés:

Théorème 6. *multiplicateurs de Lagrange* 1^{re} *version*
Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert, $f, g \in C^1(U)$ et $M = \{x \in U : g(x) = 0\}$. Supposons que $f|_M$— la restriction de f à M— possède un extremum local au point $x_0 \in M$. En plus, supposons que grad $g(x_0) \neq 0$. Alors il existe $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tq (x_0, λ_0) soit un point stationnaire de $L(x, \lambda) = f(x) + \lambda g(x)$ où $(x, \lambda) \in U \times \mathbb{R}$.

En pratique, pour déterminer les extréma liés, on cherche les points stationnaires de $L = f + \lambda g$.

Reprenons notre exemple ci-dessus: $f(x, y) = xy^2, M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.
Calculons les extréma de $f|_M$

D'abord on constate que M est donné par les racines de la fonction $g(x, y) = x^2+y^2-1$.
Donc $L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y) = xy^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$, $(x, y, \lambda) \in \mathbb{R}^3$.
(1) $\quad L_x = y^2 + 2\lambda x \overset{!}{=} 0$

(2) $\quad L_y = 2yx + 2\lambda y \overset{!}{=} 0$

(3) $\quad L_\lambda = x^2 + y^2 - 1 \overset{!}{=} 0$
En multipliant (1) par y (si $y \neq 0$) et (2) par x (si $x \neq 0$), on obtient:
$(1') \quad y^3 + 2\lambda xy = 0$ et $(2') \quad 2x^2y + 2\lambda xy = 0$. Puis, $(1') - (2')$ donne: $y^3 - 2x^2y = 0 \iff y(y^2 - 2x^2) = 0 \iff y = 0$ où $y = \pm\sqrt{2}x$. Dans (3): $x^2 + 2x^2 - 1 = 0 \iff 3x^2 = 1 \iff x_0 = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$ et $y_0 = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$. De (1): $\lambda = -\frac{y_0^2}{2x_0} = \mp\frac{2/3}{2\frac{1}{\sqrt{3}}} = \mp\frac{1}{\sqrt{3}}$. Solutions:
$(x_0, y_0, \lambda_0) = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}})$, $(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}})$,
$(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$, $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ et
$(x_1, y_1, \lambda_1) = (1, 0, 0)$, $(-1, 0, 0)$. $\quad$ (*Vérifier!!*)
Notons qu'en vue de (1) et de (3) $x \neq 0$.
On a : grad $g(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ et $f(x_0, y_0) = \pm\frac{2}{3\sqrt{3}}$ resp. grad $g(x_1, y_1) \neq (0, 0)$ et $f(x_1, y_1) = 0$.

Comme les extréma de $f|_M$ existent, on peut donc appliquer le théorème ci-dessus et on obtient
$\max_M f = \frac{2}{3\sqrt{3}}$ et $\min_M f = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$.

Théorème 7. *multiplicateurs de Lagrange* 2^{me} *version*
Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert, $f \in C^1(U)$, et $g_j \in C^1(U)$, $j = 1, \cdots q$, où $1 \leq q < n$. Soit $g = (g_1, \cdots, g_q)$ et $M = \bigcap_{j=1}^{q} \{x \in U : g_j(x) = 0\}$.

Supposons que $f|_M$ possède un extrémum local au point $x_0 \in M$. Si le rang de la matrice jacobienne de g au point x_0 est égal à q, alors il existe $\lambda_0 = (\lambda_1^0, \cdots, \lambda_q^0) \in \mathbb{R}^q$ tq (x_0, λ_0) soit un point stationnaire de la <u>fonction de Lagrange</u>
$L(x, \lambda_1, \cdots, \lambda_q) = f(x) + \sum_{j=1}^{q} \lambda_j g_j(x) \quad (x \in U, \lambda_j \in \mathbb{R})$.

Les nombres λ_j sont appellés les <u>multiplicateurs de Lagrange</u>. Notons que l'hypothèse sur le rang de la jacobienne de g en x_0 nous dit que celui est maximal $[J_g(x_0) \in \mathcal{M}(q \times n, \mathbb{R})]$.

<u>ex.</u> • Déterminer le maximum et le minimum de la fonction $f(x, y, z) = 5x + y - 3z$ sur l'intersection de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ avec le plan $x + y + z = 0$.

<u>Sol.</u>: $g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1, \quad g_2(x, y, z) = x + y + z, \quad n = 3, q = 2$.
$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : g_1(x, y, z) = 0, g_2(x, y, z) = 0\}$ (ellipse dans $\mathbb{R}^3$).
Est-ce que les hypothèses du théorème 7 sont vérifiées? Oui, car d'abord $f, g_1, g_2 \in C^1(\mathbb{R}^3)$. En plus, M est compact (car M est l'intersection de deux fermés (donc fermé) et M est borné). Donc $\max_M f$ et $\min_M f$ existent. La condition sur le rang ne peut être vérifiée qu'après avoir calculé les points stationnaires de
$L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = 5x + y - 3z + \lambda_1(x^2 + y^2 + z^2 - 1) + \lambda_2(x + y + z)$.
(1) $\quad L_x = 5 + 2\lambda_1 x + \lambda_2 \stackrel{!}{=} 0$

(2) $\quad L_y = 1 + 2\lambda_1 y + \lambda_2 \stackrel{!}{=} 0$

(3) $\quad L_z = -3 + 2\lambda_1 z + \lambda_2 \stackrel{!}{=} 0$

(4) $\quad L_{\lambda_1} = x^2 + y^2 + z^2 - 1 \stackrel{!}{=} 0$

(5) $\quad L_{\lambda_2} = x + y + z \stackrel{!}{=} 0$.

(1)+(2)+(3): $3 + 2\lambda_1 \underbrace{(x + y + z)}_{=0} + 3\lambda_2 = 0 \stackrel{(5)}{\Longrightarrow}$
$3 + 3\lambda_2 = 0 \Longrightarrow \lambda_2 = -1$. Remplaçons dans (1) et (2) :
$(1') \quad 4 + 2\lambda_1 x = 0$ et $(2') \quad 2\lambda_1 y = 0$. (1') implique que $\lambda_1 \neq 0$, donc, de (2'), on obtient $y = 0$.
Dans (5): $(5') \quad x + z = 0 \Longleftrightarrow x = -z$ et dans (4) $x^2 + z^2 = 1 \stackrel{(5')}{\Longleftrightarrow} 2x^2 = 1 \Longleftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.
En plus $z = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}$. $(1') \Longrightarrow \lambda_1 = -2x = -(\pm\frac{2}{\sqrt{2}}) = \mp\frac{2}{\sqrt{2}}$.
On obtient donc les solutions suivantes (vérifier!!)
$(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}, -1); \quad (-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}, -1)$

$f(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}) = 4\sqrt{2} = \max_M f$,
$f(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}) = -4\sqrt{2} = \min_M f$.
Conditions au rang : $g(x, y, z) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 + z^2 - 1 \\ x + y + z \end{pmatrix}$,
$J_g = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Donc rang $J_g(x_0, y_0, z_0) = 2$.

Pour terminer, on va généraliser une de nos définitions:
Soit $M \subseteq \mathbb{R}^n$ le domaine de définition d'une fonction f et soit $a \in M$. On dit que f admet un minimum/maximum/extrémum local en a s'il existe une boule $B(a; r)$ de centre a tq la restriction de f à $M \cap B(a, r)$ a un minimum/maximum/extrémum (global) en a.

Proposition Soit f une fonction continûment différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\}$ le premier quadrant. Supposons que $(v_1, v_2) = \text{grad } f(0, 0) \neq (0, 0)$.

(1) Si $v_1 > 0$ et $v_2 > 0$, alors $(0, 0)$ est un minimum local de la restriction de f à Q,

(2) Si $v_1 < 0$ et $v_2 < 0$, alors $(0, 0)$ est un maximum local de la restriction de f à Q,

(3) Si $v_1 v_2 < 0$, alors $f|_Q$ ne possède pas d'extrémum local en $(0, 0)$.

7 Courbes

Définition (1) Soit $I = [\alpha, \beta] \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle borné et fermé (donc compact). Un arc, ou chemin, ou une courbe γ dans $\mathbb{R}^n$ de classe C^1 est l'image $\Phi(I)$ d'une application $\Phi : I \to \mathbb{R}^n$ dont les composantes Φ_j $(j = 1, \cdots, n)$ sont continûment différentiables. L'application $\Phi = (\Phi_1, \cdots, \Phi_n)$ s'appelle une paramétrisation ou un paramétrage de γ.
(2) Si une paramétrisation Φ d'une courbe γ satisfait $\Phi(\alpha) = \Phi(\beta)$, alors on dit que γ est une courbe fermée.
(3) Si Φ est injective sur I, i.e. $\Phi(t_1) \neq \Phi(t_2)$ pour $\alpha \leq t_1 < t_2 \leq \beta$, alors on dit que $\gamma = \Phi(I)$ est un arc de Jordan.
(4) Si Φ est injective sur $[\alpha, \beta[$ et satisfait $\Phi(\alpha) = \Phi(\beta)$, alors γ est une courbe de Jordan (fermée).
(5) Si $\Phi' = (\Phi'_1, \cdots, \Phi'_n) \neq (0, \cdots, 0)$ en chaque point de I, alors on dit que l'arc $\gamma = \Phi(I)$ est lisse.

ex. • Le cercle $\Phi(t) = (\cos t, \sin t),\ 0 \leq t \leq 2\pi$ est une courbe de Jordan (fermée) lisse.
Le cercle parcouru deux fois est paramétrisé p.ex. par:
$\Phi(t) = (\cos t, \sin t),\ 0 \leq t \leq 4\pi$.
• l'hélice circulaire: $\Phi(t) = (\cos t, \sin t, at),\ 0 \leq t \leq M$.

Définition Soit $\Phi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ une paramétrisation d'une courbe dans $\mathbb{R}^n$. En plus, soit $J = [\alpha', \beta']$ un deuxième intervalle et $h : J \to I$ un difféomorphisme de J sur I. Alors l'application $\Psi = \Phi \circ h : J \to \mathbb{R}^n$ représente le même arc ($\Psi(J) = \Phi(I)$). On dit que l'un est obtenu par l'autre par un changement de paramétrage. Associée à un paramétrage d'un arc γ est un sens d'orientation de ce dernier. On dit que $\Phi(\alpha)$ est le point initial (point de départ) et $\Phi(\beta)$ le point terminal de l'arc γ. Donc l'arc $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n,\ t \mapsto \Phi(t)$ est parcouru de $\Phi(\alpha)$ à $\Phi(\beta)$. Le sens d'orientation est conservé par un changement de paramétrage avec $h' > 0$. Si on considère le paramétrage $\Psi(t) = \Phi(-t + \alpha + \beta),\ \alpha \leq t \leq \beta$, alors l'arc $\gamma = \Phi[\alpha, \beta] = \Psi[\alpha, \beta]$ est parcouru en sens inverse. On note cet arc par γ^- —c'est le chemin inverse.

Définition (1) La longueur d'un arc γ donné par le paramétrage $t \mapsto \Phi(t) = (\Phi_1(t), \cdots, \Phi_n(t))$, $t \in I = [\alpha, \beta]$, est donnée par l'intégrale
$L(\gamma) = \int_\alpha^\beta \|\Phi'(t)\|_2 dt = \int_\alpha^\beta \sqrt{\sum_{j=1}^n |\Phi'_j(t)|^2}\, dt.$
(2) Si l'arc est donné par l'équation cartésienne $\Phi(t) = (t, f(t)),\ \alpha \leq t \leq \beta$, alors

$$L(\gamma) = \int_\alpha^\beta \sqrt{1 + \|f'(t)\|_2^2}\, dt,$$

où $f = (f_1, \cdots, f_{n-1})$.
(3) Si l'arc $\gamma \subseteq R^2$ est donné par ses coordonnées polaires, $r = r(\theta),\ \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2,\ r \in C^1[\theta_1, \theta_2]$,alors

$L(\gamma) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{r^2(t) + \dot{r}^2(t)}dt.$
Dém. (1)

$\underline{n = 2}$, $\Phi(t) = (x(t), y(t))$. Soit $\alpha = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n = \beta$ une subdivision de $[\alpha, \beta]$ et posons $x_j = x(t_j)$ resp. $y_j = y(t_j)$. Alors
$L_j \sim \sqrt{(x_{j+1} - x_j)^2 + (y_{j+1} - y_j)^2}$. Donc
$L(\gamma) = \sum L_j = \sum (t_{j+1} - t_j) \sqrt{\left(\frac{x_{j+1} - x_j}{t_{j+1} - t_j}\right)^2 + \left(\frac{y_{j+1} - y_j}{t_{j+1} - t_j}\right)^2} =$
$= \sum (t_{j+1} - t_j) \sqrt{[x'(\theta_j)]^2 + [y'(\tilde{\theta}_j)]^2}.$
En passant à la limite $\max_{1 \leq j \leq n} |t_{j+1} - t_j| \to 0$, on obtient que
$L(\gamma) = \int_\alpha^\beta \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}dt.$

(3) $\Phi(\theta) = \begin{pmatrix} x(\theta) \\ y(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(\theta)\cos\theta \\ r(\theta)\sin\theta \end{pmatrix}$, $\Phi'(\theta) = \begin{pmatrix} \dot{r}(\theta)\cos\theta - r(\theta)\sin\theta \\ \dot{r}(\theta)\sin\theta + r(\theta)\cos\theta \end{pmatrix} \implies$
$L(\gamma) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \Big((\dot{r}^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta - 2r\dot{r}\cos\theta\sin\theta) + (\dot{r}^2\sin^2\theta + r^2\cos^2\theta + 2\dot{r}r\cos\theta\sin\theta)\Big)^{\frac{1}{2}} d\theta =$
$= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\dot{r}^2(\theta) + r^2(\theta)}\, d\theta.$

Remarque: La longueur d'une courbe ne dépend pas de son paramétrage: Soit $h : [\alpha', \beta'] \to [\alpha, \beta]$ homéomorphisme, $\Psi = \Phi \circ h$ et $h' > 0$. Alors
$\int_{\alpha'}^{\beta'} \|\Psi'\|_2 dt = \int_{\alpha'}^{\beta'} \sqrt{\sum_{j=1}^n |\Psi_j'(t)|^2} dt =$
$= \int_{\alpha'}^{\beta'} \sqrt{\sum_{j=1}^n [\Phi_j'(h(t))h'(t)]^2} dt =$
$= \int_{\alpha'}^{\beta'} \sqrt{\sum_{j=1}^n [\Phi_j'(h(t))]^2}\, h'(t)dt$
$\overset{s=h(t)}{=} \int_\alpha^\beta \sqrt{\sum_{j=1}^n |\Phi_j'(s)|^2}\, ds = \int_\alpha^\beta \|\Phi'\|_2 ds.$

<u>ex</u> • $\Phi(t) = (r\cos t, r\sin t),\ 0 \leq t \leq 2\pi$. Alors $L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{[(r\cos t)']^2 + [(r\sin t)']^2}dt = 2\pi r$.

• Cercle parcouru n-fois:
$\Phi(t) = (r\cos t, r\sin t),\ 0 \leq t \leq 2n\pi$. Alors
$L(\gamma) = \int_0^{2n\pi} \sqrt{[(r\cos t)']^2 + [(r\sin t)']^2}dt = 2n\pi r.$

Ou, en utilisant une autre paramétrisation:

$\Phi(t) = (r\cos nt, r\sin nt),\ 0 \leq t \leq 2\pi.$
$L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{[(r\cos nt)']^2 + [r\sin nt)']^2}dt = 2\pi rn,$

• spirale logarithmique: $r(\theta) = ae^{k\theta}$, $k > 0$,

$\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \quad a > 0.$
$L(\gamma) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{a^2 e^{2k\theta} + a^2 k^2 e^{2k\theta}} d\theta =$
$= a \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{(1+k^2) e^{2k\theta}} d\theta = a\sqrt{1+k^2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} e^{k\theta} d\theta =$
$= a\sqrt{1+k^2}\, [\frac{1}{k} e^{k\theta}]_{\theta_1}^{\theta_2} = \frac{a}{k}\sqrt{1+k^2}(e^{k\theta_2} - e^{k\theta_1}) \to \frac{a}{k}\sqrt{1+k^2} e^{k\theta_2}$ si $\theta_1 \to -\infty$.

- $\Phi(t) = (2t, t^2),\ 0 \leq t \leq 1$. Posons $y(t) = t^2, x(t) = 2t$. Alors $y(t) = \left(\frac{x(t)}{2}\right)^2$.

Equation cartésienne de la courbe: $y = \frac{x^2}{4},\ 0 \leq x \leq 2$.
$L(\gamma) = \int_0^2 \sqrt{1 + y'^2(x)} dx = \int_0^2 \sqrt{1 + \frac{x^2}{4}} dx$
ou bien
$L(\gamma) = \int_0^1 \sqrt{[(2t)']^2 + [(t^2)']^2} dt = \int_0^1 \sqrt{4 + 4t^2} dt = 2\int_0^1 \sqrt{1+t^2} dt = \sqrt{2} + \log(1+\sqrt{2})$.

Définition Soit $\Phi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ une courbe lisse; i.e $\Phi \in C^1([\alpha,\beta])$ et $\Phi' \neq 0$. Pour $\alpha \leq t_0 \leq \beta$ posons $s(t_0) = L(\Phi([\alpha, t_0]))$. Alors s s'appelle l'abscisse curviligne.
On a:
$s(t_0) = \int_\alpha^{t_0} \|\Phi'(t)\|_2 dt.$
C'est une fonction strictement croissante, et continûment différentiable sur $[\alpha, \beta]$. En plus, $s'(t) = \|\Phi'(t)\|_2 > 0$. Donc l'inverse de s, notée par g, existe sur l'intervalle $[0, L(\gamma)]$ et $g'(S) = \frac{1}{s'(g(S))} = \frac{1}{\|\Phi'(t)\|_2}$ pour $t = g(S) \iff S = s(t)$. Notons que $g \circ s = s \circ g = id$.
Considérons l'application $\Psi : \begin{cases} [0, L(\gamma)] \to \mathbb{R}^n \\ s \mapsto \Phi(t_0) \end{cases}$ si t_0 est choisi tq $s(t_0) = s$. Notons que $t_0 = g(s)$. Donc $\Psi(s) = \Phi(g(s))$. On appelle ψ la paramétrisation de la courbe γ par rapport à l'abscisse curviligne s.

$\Psi(0) = \Phi(g(0)) = \Phi(\alpha),\ \Psi(L(\gamma)) = \Phi(g(L(\gamma))) = \Phi(\beta)$.
On a : $\|\Psi'(s)\|_2 = 1$ parce que:
$\Psi'(s) = (\Phi \circ g)'(s) = \Phi'(g(s)) g'(s) = \Phi'(g(s)) \frac{1}{\|\Phi'(g(s))\|_2}$.

En particulier on a: $L(\Psi([0,s])) = \int_0^s \|\Psi'(\sigma)\|_2 d\sigma = \int_0^s 1 d\sigma = s$.
ex. • Le cercle: $\Phi(t) = (\cos t, \sin t),\ 0 \leq t \leq 2\pi$. Alors
$s(t_0) = \int_0^{t_0} \|\Phi'(t)\|_2 dt = \int_0^{t_0} \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} dt = t_0;$
donc ce paramétrage du cercle (avec l'angle en radian) est déjà le paramétrage par rapport à l'abscisse curviligne.
• Déterminer le paramétrage de $\Phi(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t^2 \\ \frac{4}{3}(1+t)^{3/2} \end{pmatrix}$,
$0 \leq t \leq 1$, par rapport à l'abscisse curviligne:

$y(x) = \frac{4}{3}(1 + \sqrt{2x}),\ 0 \leq x \leq \frac{1}{2}$, est la représentation cartésienne de la courbe.
$s(t_0) = \int_0^{t_0} \sqrt{t^2 + [2(1+t)^{\frac{1}{2}}]^2} dt = \int_0^{t_0} \sqrt{t^2 + 4t + 4} dt = \int_0^{t_0} (t+2) dt = \frac{1}{2} t_0^2 + 2t_0$.
$L(\gamma) = s(1) = \frac{5}{2}$. Calculons l'inverse g de $s(t)$:

$s = \frac{1}{2}t^2 + 2t \Longleftrightarrow t^2 + 4t - 2s = 0 \Longleftrightarrow t = -2 \pm \sqrt{2s+4}$. Comme $t \geq 0$, on voit que $g(s) = -2 + \sqrt{2s+4}$, $0 \leq s \leq \frac{5}{2}$. Donc:

$$\Psi(s) = \Phi(g(s)) = \begin{pmatrix} 4 + s - 2\sqrt{4+2s} \\ \frac{4}{3}\Big(1 + \big(-2 + \sqrt{4+2s}\big)\Big)^{\frac{3}{2}} \end{pmatrix}.$$

On a: $\|\Psi'(s)\|_2 = 1 \; \forall s \in [0, \frac{5}{2}]$; *vérifier !*

II Intégrales curvilignes

• Soit γ un arc dans $\mathbb{R}^n$ et soit $f : \gamma \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\gamma = \Phi([\alpha, \beta])$, $\Phi \in C^1([\alpha, \beta])$. Comme f est bornée, on peut définir l'intégrale curviligne, type premier

$$I_1 = \int_\gamma f ds = \int_\alpha^\beta f(\Phi(t))\|\Phi'(t)\|_2 dt.$$

ds s'appelle la différentielle curviligne et on a:
$ds = \|\Phi'(t)\|_2 \, dt$.

Interprétation géométrique dans $\mathbb{R}^2$:

I_1 est l'aire de la surface S, donnée par le graphe de f si $f \geq 0$:
$S = \{\big(x(t), y(t), f(x(t), y(t))\big) : \alpha \leq t \leq \beta\}$.

• intégrale curviligne du deuxième type: (intégration de champs vectoriels définis sur des courbes)

Soit γ une courbe dans $\mathbb{R}^n$ donnée par le paramétrage $\Phi(t) = (\Phi_1(t), \cdots, \Phi_n(t))$, $\Phi_j \in C^1([\alpha, \beta])$ et soit $f : \gamma \to \mathbb{R}^n$ une fonction (ou un champ) vectorielle définie sur l'arc γ avec valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Supposons que $f = (f_1, \cdots, f_n)$ soit continue. Pour $x = (x_1, \cdots, x_n)$ et $dx = (dx_1, \cdots, dx_n)$ on définit:

$\int_\gamma f(x) \cdot dx = \int_\gamma \sum_{j=1}^n f_j dx_j =$
$= \int_\alpha^\beta \sum_{j=1}^n f_j(\Phi(t))\Phi_j'(t) dt.$

Interprétation en physique: $\int_\gamma f(x) \cdot dx$ désigne le travail effectué par un point soumis en chaque point x de γ à une force $f(x)$ lorsqu'il parcourt l'arc γ (électron dans un champ électrique, point de masse dans un champ gravitationnel....)

Remarque (1) Les intégrales curvilignes ne dépendent pas du paramétrage de la courbe donnée si $h' > 0$.
(2) L'intégrale curviligne du deuxième type change de signe si on intègre sur le chemin inverse:
$\int_{\gamma-} f(x) \cdot dx = -\int_\gamma f(x) \cdot dx$.

<u>ex.</u> • Soit γ donnée par $\Phi(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t-1 \end{pmatrix}$, $0 \leq t \leq 1$, et

$f(x,y) = \begin{pmatrix} x^2y \\ x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix}$, où $(x,y) \in \gamma$.
Notons que la courbe est une parabole déquation cartésienne $x = (y+1)^2,\ 0 \leq x \leq 1$ resp. $y = \sqrt{x} - 1$. Alors pour $x(t) = t^2$ et $y(t) = t-1$ on obtient:
$dx = 2tdt$ et $dy = 1dt$. Donc
$\int_\gamma f(x,y) \cdot d(x,y) = \int_\gamma (f_1 dx + f_2 dy) =$
$= \int_0^1 \Big[t^4(t-1)2t + (t^2+t-1)1\Big] dt = -\frac{5}{42}$.

Définition Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f = (f_1, \cdots, f_n)$ un champ vectoriel sur U. Une fonction réelle $F : U \to \mathbb{R}$ est appellée primitive ou potentiel de f si F est différentiable et satisfait $\operatorname{grad} F = f$ sur U, i.e. $\frac{\partial F}{\partial x_j} = f_j,\ (j = 1, \cdots, n)$.

Remarque Comme dans le cas d'une variable, toutes les primitives sont données par $F + c$, où c est une constante. Mais contrairement au cas d'une variable, il existe des champs $f = (f_1, \cdots, f_n)$ de fonctions continues sur U qui n'ont pas de potentiel.

ex. • $U = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$,
$f(x,y,z) = (-\frac{x}{r^3}, -\frac{y}{r^3}, -\frac{z}{r^3})$, où $x^2+y^2+z^2 = r^2$. On vérifie aisément que $F(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{1}{r}$ est un potentiel de f.

Théorème 7.1 (1) Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f = (f_1, \cdots, f_n)$ un champ continu sur U. Alors les assertions suivantes sont équivalentes:
(i) f admet un potentiel F sur U.
(ii) $\int_\gamma f(x) \cdot dx$ ne dépend que des points initiaux et terminaux des courbes γ dans U, i.e. si $a, b \in U$ et si γ_1 et γ_2 sont deux courbes joignant a et b dans U, (i.e. $\Phi_1(\alpha) = \Phi_2(\alpha) = a$ et $\Phi_1(\beta) = \Phi_2(\beta) = b$), alors $\int_{\gamma_1} f(x) \cdot dx = \int_{\gamma_2} f(x) \cdot dx$.
(iii) $\int_\gamma f(x) \cdot dx = 0$ pour toute courbe fermée.

(2) Supposons que U est connexe par arcs (i.e. si $\forall a, b \in U$ il existe un arc $\gamma_{a,b}$ dans U joignant a et x), et que (ii) ou (et) (iii) est satisfait. Alors une primitive est donnée par:
$F(x) = \int_{\gamma_{a,x}} f(y) \cdot dy$ où $a \in U$ est fixé.
(3) Si F est une primitive du champ continu f, alors $\int_\gamma f(x) \cdot dx = F(b) - F(a)$, où $a = \Phi(\alpha)$ est le point initial et $b = \Phi(\beta)$ le point terminal de l'arc $\gamma = \Phi([\alpha, \beta])$.

Théorème 7.2 *conditions nécessaires explicites*
Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert, $f = (f_1, \cdots, f_n)$ un champ sur U tq $f_j \in C^1(U),\ (j = 1, \cdots, n)$. Supposons que f admet une primitive sur U. Alors on a:

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_k} = \frac{\partial f_k}{\partial x_j} \quad (j, k = 1, \cdots, n)$$

(Ce sont les conditions d'intégrabilité).

Dém. Soit $F : U \to \mathbb{R}$ une primitive de f, i.e. grad $F = f$. Alors $\frac{\partial F}{\partial x_j} = f_j$. Donc, d'après Schwarz:
$\frac{\partial f_j}{\partial x_k} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_k \partial x_j} = \frac{\partial f_k}{\partial x_j}$.
(Notons que $f_j \in C^1(U)$ implique que F est de classe C^2.)
Remarque: Les conditions d'intégrabilité ne sont pas suffisantes pour que f admet une primitive (voir l'exemple plus tard). On a besoin d'une condition géométrique sur le domaine U:

Théorème 7.3 Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert *convexe*, (i.e. $\forall a, b \in U$, le segment $[a, b] = \{tb + (1-t)a : 0 \le t \le 1\} \subseteq U$), et soit $f = (f_1, \cdots, f_n)$ un champ tq
(1) $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$
(2) $\frac{\partial f_j}{\partial x_k} = \frac{\partial f_k}{\partial x_j} \quad (j, k = 1, \cdots, n)$
Alors f admet un potentiel sur U.

Pour $n = 3$ et $U = \mathbb{R}^3$ on a les équivalences suivantes:
Un champ $f = (A, B, C) \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ a un potentiel $\Longleftrightarrow$ rot$f = 0$, oùrot f est le rotationel de f défini par:

rot $f = \nabla \times f = (\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z}, \frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial x}, \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y})$.

$\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A & B & C \end{vmatrix}$.

<u>ex.</u> • $U = \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (2xy + 1, x^2)$.
Est-ce que f admet un potentiel sur $\mathbb{R}^2$?
(0) $\mathbb{R}^2$ est convexe
(1) $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$
(2) $\frac{\partial(2xy+1)}{\partial y} = 2x \overset{!}{=} \frac{\partial x^2}{\partial x}$.

Calcul du potentiel:
grad$F = f \Longleftrightarrow \begin{cases} F_x = 2xy + 1 & \text{(i)} \\ F_y = x^2 & \text{(ii)} \end{cases} \overset{(i)}{\Longrightarrow} F(x, y) = x^2 y + x + C(y) \Longrightarrow F_y = x^2 + C'(y) \overset{(ii)}{=} x^2 \Longleftrightarrow C'(y) = 0 \Longleftrightarrow C(y) = C$.
D'où $F(x, y) = x^2 y + x + C$ sont toutes les primitives de f sur $\mathbb{R}^2$.
<u>*vérifier!*</u>

• $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, $f(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right) = (f_1, f_2)$.
Est-ce que f possède un potentiel dans U?
* $\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{-(x^2+y^2)+y(2y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$,
$\frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{x^2+y^2-x(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$, donc $\frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial y}$.

$*$ Nous ne pouvons pas appliquer le théorème 7.3 parce que U n'est pas convexe.

$*$ Sur le cercle unité $\Phi(t) = (\cos t, \sin t),\ 0 \leq t \leq 2\pi$ on a:
$\int_\gamma f(x,y) \cdot d(x,y) = \int_\gamma f_1 dx + f_2 dy =$
$= \int_0^{2\pi} \left[f_1(\cos t, \sin t)(-\sin t) + f_2(\cos t, \sin t)\cos t\right] dt =$
$= \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = 2\pi \neq 0,$
donc, d'après théorème 7.1 f n'admet pas de primitive sur U.
$*$ Cependant, si U' est le demi-plan supérieur, i.e. $U' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$, alors f admet une primitive sur U', car U' est convexe et les conditions d'intégrabilité sont satisfaits.

Calculons cette primitive: $F_x = \frac{-y}{x^2+y^2}$, $F_y = \frac{x}{x^2+y^2}$. Donc $F(x,y) = \int \frac{-y}{x^2+y^2} dx = \int \frac{-y}{x^2\left(1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right)} dx = \int \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \left(-\frac{y}{x^2}\right) dx = \arctan \frac{y}{x} + C(y)$.
Comme $F_y = \dfrac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \dfrac{1}{x} + C'(y) \overset{!}{=} \dfrac{x}{x^2+y^2}$, on déduit que $C'(y) = 0$. Donc $\arctan \frac{y}{x} + C$, où C est une constante, sont toutes les primitives de f sur U'.

8 Intégrales multiples et mesures de Jordan

Définition Soient $a_j < b_j, 1 \leq j \leq n$. Alors $I = \prod_{j=1}^n [a_j, b_j] = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_j \leq x_j \leq b_j\}$ s'appelle <u>intervalle</u> ou <u>cube</u> dans $\mathbb{R}^n$.

(Pour $n = 2$ on a donc des rectangles dont les côtés sont parallèles aux axes des coordonnées, et pour $n = 3$ on a des cubes dont les faces sont parallèles aux plans $x = 0$, $y = 0$ et $z = 0$ resp.)

On définit le volume d'un cube $I = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$ dans $\mathbb{R}^n$ par $|I| = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$.

Soit $k \in \mathbb{N}$ et $\mathcal{Q}_k$ le pavage dyadique d'ordre k de $\mathbb{R}^n$, i.e. $\mathcal{Q}_k$ est l'ensemble des cubes de la forme $Q = \{x = (x_1, \cdots, x_n) : \frac{q_i}{2^k} \leq x_i \leq \frac{q_i+1}{2^k}, q_i \in \mathbb{Z}\}$

Soit $A \subseteq \mathbb{R}^n$ bornée. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, soit M_k le nombre des cubes $Q \in \mathcal{Q}_k$ qui coupent A (i.e. ont un point commun avec A) et soit m_k le nombre des cubes dans $\mathcal{Q}_k$ qui sont entièrement inclus dans A. Le volume d'un cube de $\mathcal{Q}_k$ est $\left(\frac{1}{2^k}\right)^n$ (dans $\mathbb{R}^n$). Donc $\frac{M_k}{2^{kn}}$ et $\frac{m_k}{2^{kn}}$ donnent une approximation du volume $Vol(A)$ de A:

$$\frac{m_k}{2^{kn}} \leq Vol(A) \leq \frac{M_k}{2^{kn}}$$

On voit que $\frac{M_k}{2^{kn}}$ est une suite décroissante si $k \nearrow$ et que $\frac{m_k}{2^{kn}}$ est croissante si $k \nearrow$. Comme A est bornée, ces suites sont bornées; d'où les limites existent.

Définition On dit que l'ensemble borné $A \subseteq \mathbb{R}^n$ est <u>mesurable au sens de Jordan</u> si ces deux limites coïncident; i.e. si $\lim_{k\to\infty} \frac{m_k}{2^{kn}} = \lim_{k\to\infty} \frac{M_k}{2^{kn}}$. La valeur commune est appellée <u>mesure ou volume</u> de A, notée par mes$A$.
Pour $n = 2$ on parle aussi de l'aire de A.

Propriétés Soient A et B deux ensembles mesurables dans $\mathbb{R}^n$. Alors
(1) $\text{mes}A \geq 0$,
(2) $A \subseteq B \Longrightarrow \text{mes}\, A \leq \text{mes}\, B$,
(3) $A \cap B$ et $A \cup B$ mesurables et $\text{mes}\,(A \cup B) = \text{mes}\, A + \text{mes}\, B - \text{mes}\,(A \cap B)$.
(4) Le translaté de A a la même mesure que A,
(5) Si f est une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, alors $\text{mes}\, f(A) = |\det f| \text{mes}\, A$;

en particulier, la mesure est invariante pour les transformations orthogonales (parce que celles-là ont le déterminant ± 1.)

<u>ex.</u> • Les intervales $A = [a, b]$, $]a, b]$, $]a, b[$ et $[a, b[$ sont mesurables et $\text{mes}\, A = b - a$.
• $A = \mathbb{Q} \cap\,]0, 1[$ n'est pas mesurable au sens de Jordan. En effet, les éléments du pavage $\mathcal{Q}_k$ de $\mathbb{R}^1$ qui coupent A ont la forme $I_{k,n} = [\frac{n}{2^k}, \frac{n+1}{2^k}], 0 \leq n \leq 2^k - 1$; Donc $M_k = 2^k$. D'autre part, comme chaque intervalle contient un nombre irrationnel, aucun des éléments du pavage $\mathcal{Q}_k$ n'est inclus dans A, donc $m_k = 0$. Conclusion: $\frac{M_k}{2^k} = 1\ \forall k$

et $\frac{m_k}{2^k} = 0 \; \forall k$.

Théorème 8.1 Un ensemble E dans $\mathbb{R}^n$ a la mesure nulle s'il peut être recouvert par un nombre fini de cubes (ou boules) tel que la somme des volumes des cubes (boules) est aussi petit qu'on veut; i.e.
$\text{mes}E = 0 \iff \forall \varepsilon > 0 \, \exists$ cubes C_j $(j = 1, \cdots, N) : E \subseteq \bigcup_{j=1}^N C_j$ et $\sum_{j=1}^N |C_j| \leq \varepsilon$.

ex. • $E = \{(t,t) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq t \leq 1\}$. Alors E est un ensemble compact de mesure nulle, car, soit $I_j = [\frac{j}{2^k}, \frac{j+1}{2^k}] \times [\frac{j}{2^k}, \frac{j+1}{2^k}],$, $0 \leq j \leq 2^k - 1$. Alors $E \subseteq \bigcup I_j$ et $\sum |I_j| = 2^k \left(\frac{1}{2^k}\right)^2 \to 0$ si $k \to \infty$.

ex. • Le cercle unité $E = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\}$ a la mesure nulle dans $\mathbb{R}^2$. En effet, soit $\alpha_j = exp(2\pi i \frac{j}{2^k})$. Alors $E \subseteq \bigcup_{0 \leq j \leq 2^k} B(\alpha_j; \frac{4}{2^k})$ et $\sum_{j=0}^{2^k} \text{mes}\left(B(\alpha_j; \frac{4}{2^k})\right) \leq (2^k + 1) \left(\frac{8}{2^k}\right)^2 \to 0$ si $k \to \infty$.

ex. • $E = \{(q, 0) \in \mathbb{R}^2 : q \in \mathbb{Q}, 0 \leq q \leq 1\}$. Alors E est mesurable et mes $E = 0$. En effet
$E \subseteq \bigcup_{0 \leq j \leq 2^k - 1} \left([\frac{j}{2^k}, \frac{j+1}{2^k}] \times [0, \frac{1}{2^k}]\right)$, $M_k = 2^k, m_k = 0$. Mais $\frac{M_k}{(2^k)^2} = \frac{1}{2^k} \to 0$ si $k \to 0$.

Proposition 8.2 Supposons que $E \subseteq \mathbb{R}^n$ soit mesurable au sens de Jordan et que mes $E = 0$. Alors chaque partie $F \subseteq E$ est mesurable et mes $F = 0$.

Théorème 8.3 Soit $E \subseteq \mathbb{R}^n$ borné. Alors E est mesurable au sens de Jordan si et seulement si sa frontière ∂E a la mesure nulle.

ex. •. Le disque $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ est mesurable parce que $\partial D = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\}$ a la mesure nulle (voir ci dessus)

ex. •. $E = \mathbb{Q} \cap [0,1]$ n'est pas mesurable, parce que $\partial E = [0,1]$ et mes $[0,1] = 1 \neq 0$.

Proposition 8.4 Soit f une fonction continue sur un intervalle compacte I dans $\mathbb{R}^n$. Supposons que $f \geq 0$. Alors le graphe de f, donné par $G(f) = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in I\}$ est mesurable et a la mesure nulle (dans $\mathbb{R}^{n+1}$).

Comment calculer la mesure d'un ensemble? Rappel:

Soient $f, g \in C([a,b])$ et $g(x) \leq f(x) \, \forall x \in [a,b]$ et $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in I, g(x) \leq y \leq f(x)\}$. Alors A est mesurable et mes $A = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)dx = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{f(x)} 1 \, dy\right)dx =: \iint_A d(x,y)$ (intégrale double).

B fonctions intégrables dans $\mathbb{R}^n$, intégrales multiples

Définition Soit A un ensemble borné et mesurable dans $\mathbb{R}^n$. Soit f une fonction à valeurs réelles définie et bornée sur A. Considérons l'extension de f sur $\mathbb{R}^n$ définie par $f(x) = 0$ si $x \in \mathbb{R}^n \setminus A$. Soit $C_k^{(i)}$ les intervales du pavage dyadique de $\mathbb{R}^n$ d'ordre k.

Notons que $|C_k^{(i)}| = \left(\frac{1}{2^k}\right)^n$. Soit

$$s_k(f) = \sum_i |C_k^{(i)}| \inf_{C_k^{(i)}} f$$

et

$$S_k(f) = \sum_i |C_k^{(i)}| \sup_{C_k^{(i)}} f,$$

où $\inf_{C_k^{(i)}} f$ est la plus grande borne inférieure de f sur $C_k^{(i)}$ et $\sup_{C_k^{(i)}} f$ la plus petite borne supérieure de f sur $C_k^{(i)}$. S_k et s_k sont des sommes finies. Notons que $(\mathrm{mes}\, A) \inf f \leq s_k \leq S_k \leq (\mathrm{mes}\, A) \sup f$. En plus (S_k) est une suite décroissante, et (s_k) une suite croissante. Donc les limites $s = \lim_{k\to\infty} s_k$ et $S = \lim_{k\to\infty} S_k$ existent. Si $s = S$, alors on dit que f est <u>intégrable</u> au sens de Riemann sur A, ($f \in R(A)$) et on note

$s = \int_A f(x)dx$ resp. $s = \int_A f(x_1, \cdots, x_n) d(x_1, \cdots, x_n)$.

Remarque Si f est intégrable sur A alors on a:
$\int_A f(x)dx = \lim_{k\to\infty} \sum_i |C_k^{(i)}| \ f(\zeta_k^i)$,
avec $\zeta_k^i \in C_k^{(i)}$.

Propriétés 8.5 Soit $A \subseteq \mathbb{R}^n$ mesurable. Alors on a:

(1) $\text{mes}A = \int_A 1dx$,
(2) Si $\text{mes}A = 0$, alors $\int_A f dx = 0 \ \forall f$ bornée sur A,
(3) $\inf_{x\in A} f(x) \leq \dfrac{\int_A f(x)dx}{\text{mes}A} \leq \sup_{x\in A} f(x)$, si f est intégrable sur A.
(4) $\left|\int_A f(x)dx\right| \leq \int_A |f(x)|dx$, si $|f|$ est intégrable sur A,
(5) $\int_A (\lambda f(x) + \mu g(x))\, dx = \lambda \int_A f(x)dx + \mu \int_A g(x)dx$
$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ f, g$ intégrable sur A,
(6) Si $A \subseteq \mathbb{R}^n$ et $B \subseteq \mathbb{R}^n$ sont mesurables avec $A \cap B = \emptyset$, alors
$\int_{A\cup B} f\, dx = \int_A f\, dx + \int_B f\, dx \quad \forall f \in R(A \cup B)$.
(7) Chaque fonction continue et bornée sur un ensemble mesurable A est intégrable.

Théorème 8.6 (Théorème de Fubini, *réduction des nombres de variables*)
Soit $A' \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ mesurable, et Φ et Ψ deux fonctions réelles continues et bornées sur A' tq $\Phi(x') \leq \Psi(x') \ \ \forall x' \in A'$.
Soit $A = \{(x', x_n) \in \mathbb{R}^n : x' \in A', \Phi(x') \leq x_n \leq \Psi(x')\}$.
Alors A est mesurable et
$\int_A f(x)dx = \int_{A'} \left(\int_{\Phi(x')}^{\Psi(x')} f(x', x_n)dx_n\right) dx'$
pour tout f bornée et continue sur A.

<u>ex.</u> • Soit $f(x, y) = x^2 + y$ et A le triangle formé par les points $(0, 0)$, $(1, 1)$ et $(0, 1)$. Calculer $I = \int_A f(x, y)d(x, y)$.

1$^{\text{re}}$ méthode: $I = \int_{x=0}^{x=1} \left(\int_{y=x}^{y=1} (x^2 + y)dy\right) dx = \int_{x=0}^{x=1} \left([x^2y + \frac{1}{2}y^2]_{y=x}^1\right) dx = \int_0^1 (x^2 + \frac{1}{2} - x^3 - \frac{1}{2}x^2)dx =$
$= \int_0^1 (\frac{1}{2}x^2 - x^3 + \frac{1}{2})dx = (\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x)\big|_0^1 = \frac{5}{12}$.

2$^{\text{e}}$ méthode: $I = \int_{y=0}^{y=1} \left(\int_{x=0}^{x=y} (x^2 + y)dx\right) dy = \int_{y=0}^{y=1} (\frac{1}{3}x^3 + yx)\big|_0^y\, dx = \int_0^1 (\frac{1}{3}y^3 + y^2)dy = \frac{1}{12}y^4 + \frac{1}{3}y^3\big|_0^1 = \frac{5}{12}$.

• Calculons l'aire de ce triangle: $\text{mes}A = \int_A 1d(x, y) = \int_{y=0}^{y=1} \int_{x=0}^{x=y} 1dx\, dy = \int_0^1 (y - 0)dy = \frac{1}{2}y^2\big|_0^1 = \frac{1}{2}$.

• Calculons l'aire de la surface A de $\mathbb{R}^2$ délimitée par les courbes $y^2 = 2px,\ x^2 = 2py \quad (p > 0)$.

Cherchons les bornes d'intégration:
points d'intersections des courbes: $\frac{x^2}{2p} = \sqrt{2px} \iff 2px = \left(\frac{x^2}{2p}\right)^2 \iff x^4 = 8p^3x \iff x^3 = 8p^3$ où $x = 0 \iff x = 2p$ où $x = 0$.
$\text{mes}A = \int_A 1d(x,y) = \int_{x=0}^{x=2p} \left(\int_{y=\frac{x^2}{2p}}^{y=\sqrt{2px}} 1\, dy\right) dx = \int_0^{2p} (\sqrt{2px} - \frac{x^2}{2p}) dx = \frac{4}{3}p^2.$

• Calculons $I = \int_A xyz\, d(x,y,z)$ si $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq z,\ 0 \leq z \leq x\}$. On a:
$I = \int_{x=0}^{x=1} \int_{z=0}^{z=x} \int_{y=0}^{y=z} xyz\, dydzdx =$
$= \int_{x=0}^{x=1} \int_{z=0}^{z=x} (\frac{1}{2}xzy^2)\Big|_{y=0}^{y=z} dzdx = \int_{x=0}^{x=1} \int_{z=0}^{z=x} \frac{1}{2}xz^3\, dzdx = = \int_{x=0}^{x=1} \frac{1}{8}xz^4\Big|_{z=0}^{z=x} dx = \int_0^1 \frac{1}{8}x^5 dx = \frac{1}{48}$

ou
$I = \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=0}^{y=x} \int_{z=y}^{z=x} xyz\, dzdydx =$
$= \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=0}^{y=x} (xy\frac{1}{2}z^2)\Big|_{z=y}^{z=x} dydx =$
$= \int_{x=0}^{x=1} \int_{y=0}^{y=x} (\frac{x^3y}{2} - \frac{xy^3}{2}) dydx =$
$= \int_{x=0}^{x=1} (\frac{x^3}{4}y^2 - \frac{x}{8}y^4)\Big|_{y=0}^{y=x} dx =$
$= \int_0^1 (\frac{x^5}{4} - \frac{x^5}{8}) dx = \int_0^1 \frac{x^5}{8} dx = \frac{1}{48}.$

C Changement de variables dans les intégrales multiples

Soit P le parallélogramme formé par les vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ dans $\mathbb{R}^2$ ($\vec{A}$ et $\vec{B}$ linéairement indépendants) Alors l'aire de P est $\text{mes}P = h\|\vec{B}\| = \sin\theta\|\vec{A}\|\,\|\vec{B}\|$.
Si $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont des vecteurs dans $\mathbb{R}^3$, cette formule reste vraie et on a $\text{mes}P = \|\vec{A}\times\vec{B}\|$ (produit vectoriel).

Soit Q le parallélépipède formé par les vecteurs $\vec{A}$, $\vec{B}$ et $\vec{C}$, où $\{\vec{A},\vec{B},\vec{C}\}$ est un système libre. Alors le volume de Q est donné par:
$\text{mes}Q = h\cdot\|\vec{B}\times\vec{C}\|$ avec $h = \|\vec{A}\|\cos\psi$, où ψ est l'angle formé par $\vec{A}$ et $\vec{n}$, la normale au plan $\vec{OB},\vec{OC}$. On a:
$h = \left\langle \vec{A},\vec{n}\right\rangle = \vec{A}\cdot\vec{n}$ (produit scalaire).
Donc: $\text{mes}Q = \vec{A}\cdot\vec{n}\,\|\vec{B}\times\vec{C}\| = \vec{A}\underbrace{\left[\|\vec{B}\times\vec{C}\|\,\vec{n}\right]}_{=\vec{B}\times\vec{C}} = \vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = \det(\vec{A},\vec{B},\vec{C})$.
Autre interprétation: Considérons l'application linéaire $L:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ avec $L(1,0,0) = \vec{A}$, $L(0,1,0) = \vec{B}$, $L(0,0,1) = \vec{C}$. Comme les vecteurs $\vec{A},\vec{B},\vec{C}$ sont linéairement indépendants, L est un difféomorphisme linéaire. L'image du cube unité $C = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 0\le x,y,z\le 1\}$ par rapport à l'application L est le parallélépipède Q ci-dessus. Le volume du cube unité est donc multiplié par $\det(\vec{A},\vec{B},\vec{C})$. Donc: $\text{mes}Q = \int_Q 1d(u,v,w) = \int_C 1\,|\det(\vec{A},\vec{B},\vec{C})|d(x,y,z)$ où $(u,v,w) = L(x,y,z)$ et $Q = L(C)$ resp. $C = L^{-1}(Q)$. Notons aussi que la dérivée L' de L est la matrice constante $(\vec{A}\,\vec{B}\,\vec{C})$.
On va généraliser cette formule pour des difféomorphismes quelconques.

Théorème 8.7 (transformation de variables)
Soient U et V deux ensembles ouverts et mesurables dans $\mathbb{R}^n$ (en particulier U et V sont bornés). Supposons que $\Phi : U\to V$ soit un difféomorphisme lipschitzien de U sur V, i.e.
$*$ $\Phi = (\Phi_1,\cdots,\Phi_n)$ est continûment différentiable sur U, donc $\Phi\in C^1(U,V)$,
$*$ Φ est une bijection dont l'inverse Φ^{-1} est continûment différentiable sur V, donc $\Phi^{-1}\in C^1(V,U)$,
$*$ Φ satisfait une condition de Lipschitz, i.e. il existe une constante $M\in\mathbb{R}$ tq
$\|\Phi(x)-\Phi(x')\|\le M\|x-x'\| \quad \forall x,x'\in U$.

Alors pour toute fonction f bornée et intégrable sur V, la fonction $(f\circ\Phi)|\det\Phi'|$ est intégrable sur U et on a:

$$\int_V f(y)dy = \int_U (f\circ\varphi)|\det\Phi'(x)|dx.$$

En plus, l'image $B = \Phi(A)$ d'un ensemble mesurable $A \subseteq U$ est mesurable et pour toute fonction f bornée et intégrable sur $B = \Phi(A)$ on a:
$\int_B f(y)dy = \int_A (f \circ \varphi)\, |\det \Phi'(x)| dx$.

Exemples: (1) coordonnées polaires:

Soit $U =]0, R[\times]0, 2\pi[$ et $V = \{(r\cos\theta, r\sin\theta) : 0 < r < R, 0 < \theta < 2\pi\}$ et $(y_1, y_2) = \Phi(x_1, x_2) = (x_1 \cos x_2, x_1 \sin x_2)$. Alors Φ est un difféomorphisme de U sur V. On a:
$\Phi'(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \cos x_2 & -x_1 \sin x_2 \\ \sin x_2 & x_1 \cos x_2 \end{pmatrix}$, $|\det \Phi'(x_1, x_2)| = x_1$. Donc:
$\int_V f(y_1, y_2) d(y_1, y_2) = \int_U f(x_1 \cos x_2, x_1 \sin x_2) x_1 \, d(x_1, x_2)$.
De façon plus commode on écrira pour $x_1 = r$ et $x_2 = \theta$. En posant $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$, on obtient donc pour toute fonction continue sur le disque $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R\}$ que:
$\int_D f(x, y) d(x, y) = \int_{]0,R[\times]0,2\pi[} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r \, d(r, \theta)$
$\overset{Fubini}{=} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{R} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr d\theta$.

En particulier pour $f \equiv 1$ on obtient l'aire du disque D de rayon R:

- $\mathrm{mes} D = \int_D d(x, y) = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{R} r dr d\theta = \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{1}{2} r^2 \Big|_0^R d\theta = \frac{1}{2} R^2 2\pi = \pi R^2$.
- Calculer $I = \displaystyle\iint_{x^2+y^2 \leq 1} (1 - x^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}} d(x, y)$.

On fait le changement de variables $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$. Alors
$I = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{1} \left(1 - r^2\right)^{-\frac{1}{2}} r dr d\theta = \int_0^{2\pi} (1 - r^2)^{\frac{1}{2}} (-\frac{1}{2}) 2 \Big|_0^1 d\theta = 2\pi$.

coordonnées sphériques

Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta\cos\varphi \\ r\cos\theta\sin\varphi \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$ où
$0 < r < R$, $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ et $0 < \varphi < 2\pi$. L'application S qui associe à (r, θ, φ) le point (x, y, z) ci-dessus est un difféomorphisme du cube $]0, R[\times] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\times]0, 2\pi[$ sur une boule de rayon R et centrée à l'origine dont on a enlevé un certain demi-disque (voir figure).
Notons que l'image du cube fermé est la boule fermée.
La jacobienne de S est:
$$S'(r, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\cos\varphi & -r\cos\theta\sin\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \end{pmatrix}$$

Donc $\det S'(r,\theta,\varphi) = r^2\cos\theta$.
Pour toute fonction f continue sur la boule $B = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \le R^2\}$ on obtient donc avec le théorème de Fubini:

$\iiint_B f(x,y,z)d(x,y,z) =$
$= \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{r=0}^{R} f\big(r\cos\theta\cos\varphi, r\cos\theta\sin\varphi, r\sin\theta\big) r^2\cos\theta dr d\theta d\varphi.$
Le terme $r^2\cos\theta dr d\theta d\varphi$ s'appelle la différentielle sphérique.

<u>ex.</u> • $\displaystyle\iiint_{x^2+y^2+z^2<1} z^2 d(x,y,z) =$
$= \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{r=0}^{1}(r^2\sin^2\theta)r^2\cos\theta dr d\theta d\varphi =$
$= \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{5}r^5\right]_0^1\cos\theta\sin^2\theta d\theta d\varphi =$
$= \frac{2\pi}{5}\int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin^2\theta d\theta = \frac{2\pi}{15}[\sin^3\theta]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4\pi}{15}.$

• Calculer $I = \iiint_B \sqrt{x^2+y^2+z^2}d(x,y,z)$ où $B = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 < x\}$.

On a: $B = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x-\frac{1}{2})^2+y^2+z^2 < \frac{1}{4}\}$.
Coordonnées sphériques: $r^2 < r\cos\theta\cos\varphi \iff 0 < r < \cos\theta\cos\varphi$ où $\theta \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, $\varphi \in]0,2\pi]$.
Donc $I = \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{r=0}^{\cos\theta\cos\varphi} rr^2\cos\theta dr d\theta d\varphi =$
$= \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\left(\frac{1}{4}r^4\right)_0^{\cos\theta\cos\varphi}\right]\cos\theta d\theta d\varphi =$
$= \frac{1}{4}\int_\varphi\int_\theta\cos^5\theta\cos^4\varphi d\theta d\varphi = \frac{1}{4}\Big(\int_\varphi\cos^4\varphi d\varphi\Big)\Big(\int_\theta\cos^5\theta d\theta\Big).$

• Calculer le volume de la partie de la boule
$x^2+y^2+z^2 \le a^2$ incluse dans le cylindre $(x-\frac{a}{2})^2+y^2 \le \frac{a^2}{4}$.

Déterminons d'abord l'intersection D du cylindre avec le plan $\overline{xy}$, d'équation $z=0$:
$D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x-\frac{a}{2})^2+y^2 \le \frac{a^2}{4}\}$.
Pour $(x,y)\in D$ on a l'équation de la sphère: $z = \pm\sqrt{a^2-x^2-y^2}$.

Donc le volume cherché est l'intégrale
$\displaystyle I = \iint_D\Big(\int_{-\sqrt{a^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} 1\,dz\Big)d(x,y) =$
$= 2\iint_D\sqrt{a^2-x^2-y^2}d(x,y).$

Coordonnées polaires: $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ où $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$.
$D: x^2 + y^2 - ax \le 0 \iff r^2 - ar\cos\theta \le 0 \iff 0 \le r \le a\cos\theta$.
Donc $I = \int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^{a\cos\theta} 2\sqrt{a^2 - r^2}\, r dr d\theta =$
$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^{a\cos\theta} r\sqrt{a^2 - r^2} dr d\theta =$
$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{1}{2} 4 \cdot \frac{2}{3} (a^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{a\cos\theta} \right) d\theta =$
$= \frac{4}{3} a^3 (\frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta d\theta) = \frac{4}{3} a^3 (\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3})$.

Coordonnées elliptiques

Ellipse $\begin{cases} x = ar\cos\theta & 0 \le \theta \le 2\pi, \\ y = br\sin\theta & 0 \le r \le 1. \end{cases}$
$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1\}$.

Calculons l'aire de cette ellipse:
$\text{mes}E = \iint_E 1\, d(x, y) =$
$= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{1} \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} \right| d(r, \theta) =$
$= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{1} \left| \begin{matrix} a\cos\theta & -ar\sin\theta \\ b\sin\theta & br\cos\theta \end{matrix} \right| d(r, \theta) =$
$= \int_{\theta=0}^{2\pi} \left(\int_{r=0}^{1} abr dr \right) d\theta = 2\pi \frac{abr^2}{2} \Big|_0^1 = \pi ab$.

D Intégrales impropres

<u>ex. 1</u> "fonctions non bornées"

- $r > 0,\ \alpha > 0, B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le r^2\}$.

$\iint_B \frac{1}{\|(x,y)\|^\alpha} d(x, y) = \iint_B \frac{d(x,y)}{(x^2+y^2)^{\alpha/2}}$.
Pour quelles valeurs de α cette intégrale impropre existe?

Soit $B_\varepsilon = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \varepsilon \le \sqrt{x^2 + y^2} \le r\}$. La fonction $f(x, y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^{\alpha/2}}$ est bornée et continue sur B_ε. Alors
$\iint_{B_\varepsilon} f(x, y) d(x, y) = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\rho=\varepsilon}^{r} \frac{1}{\rho^\alpha} \rho d\rho d\theta =$
$= 2\pi \int_\varepsilon^r \frac{1}{\rho^{\alpha-1}} d\rho =$
$= \begin{cases} 2\pi \log\rho \Big|_\varepsilon^r & \text{si } \alpha = 2 \\ 2\pi \frac{\rho^{-\alpha+2}}{2-\alpha} \Big|_\varepsilon^r & \text{si } \alpha > 2 \text{ où } 0 < \alpha < 2 \end{cases} =$

$= \begin{cases} 2\pi \log\frac{r}{\varepsilon} & \text{si } \alpha = 2 \\ \frac{2\pi}{2-\alpha} \left(r^{2-\alpha} - \varepsilon^{2-\alpha} \right) & \text{si } \alpha > 2 \text{ où } 0 < \alpha < 2 \end{cases} \xrightarrow{\varepsilon \to 0}$

$\begin{cases} \infty & \text{si } \alpha \le 2 \\ \frac{2\pi}{2-\alpha} r^{2-\alpha} & \text{si } 0 < \alpha < 2. \end{cases}$

Conclusion: $\iint_B \frac{d(x,y)}{(x^2+y^2)^{\alpha/2}}$ existe $\iff 0 < \alpha < 2$.

De même: $\displaystyle\iint_{B(0,r)\subseteq\mathbb{R}^n}\cdots\cdots\int \frac{d(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\|x\|^\alpha}$ existe $\Longleftrightarrow 0<\alpha<n$.

<u>ex. 2</u>: fonction bornée, domaine d'intégration non borné"

- $\displaystyle I=\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}d(x,y)=$

$\displaystyle =\lim_{R\to\infty}\iint_{x^2+y^2\leq R^2} e^{-(x^2+y^2)}d(x,y)=$

$\displaystyle =\lim_{R\to\infty}\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{R} e^{-r^2}rdrd\theta=$

$=2\pi\lim_{R\to\infty}\int_0^R re^{-r^2}\,dr=2\pi(-\frac{1}{2})\lim_{R\to\infty} e^{-r^2}\Big|_0^R=\pi.$

Mais on a encore:

$\displaystyle I=\lim_{R\to\infty}\iint_{\max\{|x|,|y|\}\leq R} e^{-(x^2+y^2)}d(x,y)\overset{\text{Fubini}}{=}$

$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^R\Big[\int_{-R}^R e^{-x^2-y^2}\,dx\Big]dy=$

$=\lim_{R\to\infty}\Big[\int_{-R}^R e^{-x^2}dx\ \int_{-R}^R e^{-y^2}\,dy\Big]=\Big(\int_{-\infty}^\infty e^{-s^2}\,ds\Big)^2.$

Donc $\int_{\mathbb{R}} e^{-s^2}ds=\sqrt{\pi}$ et $\int_0^\infty e^{-s^2}ds=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

(Ceci est important pour la théorie des probabilités).

<u>ex. 2</u> Soit $f(x,y)=\frac{1}{[1-(x^2+y^2)]^\alpha}$, $\quad\alpha>0$. Alors f est une fonction non bornée sur le disque unité.

$\iint_{x^2+y^2<1}f(x,y)d(x,y)=\int_0^{2\pi}\int_0^1\frac{1}{(1-r^2)^\alpha}rdrd\theta=2\pi\int_0^1\frac{r}{(1-r^2)^\alpha}dr\overset{s=1-r}{=}2\pi\int_0^1\frac{1-s}{(2-s)^\alpha}\frac{1}{s^\alpha}ds=I.$

Comme $\frac{1-s}{(2-s)^\alpha}\frac{1}{s^\alpha}\leq\frac{1}{s^\alpha}$ et $\frac{1-s}{(2-s)^\alpha}\frac{1}{s^\alpha}\geq\frac{\frac{1}{2}}{2^\alpha}\frac{1}{s^\alpha}$ si $0<s\leq\frac{1}{2}$, on voit que I existe $\Longleftrightarrow\int_0^1\frac{1}{s^\alpha}ds$ existe. Mais cette dernière intégrale existe si et seulement si $0<\alpha<1$.

9 Intégrales de surfaces

Rappel: Jusqu'ici: • Intégrales curvilignes
(γ courbe dans $\mathbb{R}^n$, paramétrisée par $\Phi(t) = (\Phi_1(t), \cdots, \Phi_n(t))$):

(I) $I = \int_\gamma f\, ds = \int_\alpha^\beta f(\Phi(t))\, \|\Phi'(t)\|_n\, dt$
où $f : \gamma \to \mathbb{R}$ est continue.

(II) $I = \int_\gamma \vec{f}(x) \cdot dx = \sum_{j=1}^n \int_\gamma f_j(x) dx_j$,
où $\vec{f} = (f_1, \cdots, f_n) : \gamma \to \mathbb{R}^n$ est continue et $dx_j = \Phi_j'(t)dt$.
• intégrales multiples: (V mesurable dans $\mathbb{R}^n$):
$\int_V f(x)\, dx, \quad f : V \to \mathbb{R}$ bornée et continue.

Définition Soit $D \subseteq \mathbb{R}^2$ un domaine délimité par une courbe fermée C^1 de Jordan. L'image $S = \Phi(D)$ d'une application $\Phi : D \to \mathbb{R}^3$ s'appelle surface non dégénérée si:

(1) $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3) \in C^1(D, \mathbb{R}^3) \cap C(\overline{D}, \mathbb{R}^3)$,
(2) Φ injective,
(3) le rang de la matrice jacobienne $J_\Phi = \Phi'$ est égal à 2 dans D (Notons que $J_\Phi \in \mathcal{M}(3 \times 2; \mathbb{R})$.

ex. • $D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 < 1\}$,
$S = \Phi(u, v) = (u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2}), \quad (u, v) \in D$
Donc S est la demi-sphère
$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z > 0\}$.

A Calcul de l'aire d'une surface dans $\mathbb{R}^3$

Rappel: l'aire du parallélogramme donné par les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ dans $\mathbb{R}^3$ est la norme euclidienne du produit vectoriel $\vec{a} \times \vec{b}$.
Considérons le plan tangentiel à la surface S au point $P = \Phi(u_0, v_0) = (x_0, y_0, z_0)$ donné par sa représentation paramétrique
$T(\lambda, \lambda') = P + \lambda \Phi_u(u_0, v_0) + \lambda' \Phi_v(u_0, v_0), \quad \lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$.
L'aire du parallélogramme ci dessus est ainsi:
$\|\Phi_u \times \Phi_v\|$.
On définit donc l'aire de la surface S par

$$\mathcal{A}(S) = \iint_D \|\Phi_u \times \Phi_v\|\, d(u, v).$$

Si $\Phi(u, v) = (u, v, f(u, v))$ est une représentation cartésienne d'une surface S, on a:

$$\|\Phi_u \times \Phi_v\| = \sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2} \qquad (*)$$

Preuve de $(*)$: $\Phi_u = (1, 0, f_u),\ \Phi_v = (0, 1, f_v)$. Donc:

$\Phi_u \times \Phi_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & f_u \\ 0 & 1 & f_v \end{vmatrix} = (-f_u, -f_v, 1)$. Ainsi
$\|\Phi_u \times \Phi_v\| = \sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}$.

Exemple Demi-sphère S: $(u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2}) = \Phi(u, v)$, $u^2 + v^2 < 1 \implies$
$\|\Phi_u \times \Phi_v\| = \sqrt{1 + \left(\dfrac{-u}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\right)^2 + \left(\dfrac{-v}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\right)^2} = \sqrt{1 + \dfrac{u^2+v^2}{1-u^2-v^2}} =$
$\sqrt{\dfrac{1}{f^2(u,v)}} = \dfrac{1}{f(u,v)}$.

Donc $\mathcal{A}(S) = \displaystyle\iint_{u^2+v^2<1} \frac{1}{f(u,v)} d(u,v) =$
$= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} r\, dr d\theta = -2\pi(1-r^2)^{1/2}\Big|_0^1 = 2\pi.$

B Intégrale de surface

Définition Soit $\Phi : D \to \mathbb{R}^3$, $S = \Phi(D)$ une surface non dégénérée, et $f : S \to \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée. Alors

$\iint_S f d\sigma := \iint_D f\big(\Phi(u,v)\big) \underbrace{\|\Phi_u \times \Phi_v\| d(u,v)}_{d\sigma}$.

En particulier, si $f \equiv 1$, on obtient l'aire de la surface S.

C Théorèmes du calcul intégrale

Le premier résultat nous donne une formule de transformation d'une intégrale dans $\mathbb{R}^2$ en une intégrale curviligne.

Théorème 9.1. théorème de la divergence de Gauss-Ostrogradskii dans $\mathbb{R}^2$

Soit D un ouvert connexe par arcs (i.e. $\forall P, Q \in D, \exists$ une courbe dans D joignant P avec Q) tel que la frontière ∂D de D soit une réunion de n courbes de Jordan fermées, disjointes 2 à 2, et continûment différentiables. Supposons que ces courbes $\gamma_1, \cdots, \gamma_n$ soient orientées de telle façon que le domaine se trouve à *gauche* du sens de parcours. Soit $f = (f_1, f_2) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ un champ vectoriel continûment différentiable dans un voisinage Ω de $\overline{D}$ et soit div $f = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y}$ la <u>divergence</u> de f. Alors

$$\iint_D \operatorname{div} f \, d(x,y) = \int_{\partial D} f \cdot n ds = \sum_{j=1}^{n} \int_{\gamma_j} f \cdot n ds,$$

où n est la normale unitaire extérieure le long des courbes γ_j et ds est l'abscisse curviligne.

— — — — — — — — — — — —

Soit $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)$ une paramétrisation d'une de ces courbes orientées γ_j. Alors (Φ_1', Φ_2') est le vecteur directeur de la tangente à γ_j. En plus, $n = \dfrac{(\Phi_2', -\Phi_1')}{\|(\Phi_2', -\Phi_1')\|_2} = \left(\dfrac{\Phi_2'}{\sqrt{\Phi_1'^2 + \Phi_2'^2}}, -\dfrac{\Phi_1'}{\sqrt{\Phi_1'^2 + \Phi_2'^2}}\right)$ est la normale unitaire à γ_j.

Supposons que $\Gamma = \Phi([\alpha, \beta])$. Alors pour $f = (f_1, f_2)$ on obtient:

$\int_\Gamma f \cdot n \, ds =$
$= \int_\alpha^\beta \Big(f_1(\Phi(t)) \frac{\Phi_2'}{\sqrt{\Phi_1'^2+\Phi_2'^2}} + f_2(\Phi(t)) \frac{-\Phi_1'}{\sqrt{\Phi_1'^2+\Phi_2'^2}}\Big) \|\Phi'(t)\|_2 \, dt =$
$= \int_\alpha^\beta \Big(f_1(\Phi(t))\Phi_2'(t) - f_2(\Phi(t))\Phi_1'(t)\Big) dt =$
$= \int_\Gamma f_1 dy - f_2 dx$

où $dx = \Phi_1'(t)dt$ et $dy = \Phi_2'(t)dt$.

Corollaire 9.2 (formules de Green-Riemann)
Soit $D \subseteq \mathbb{R}^2$ un domaine comme dans le théorème 9.1 et soit $P, Q : \Omega \supseteq \overline{D} \to \mathbb{R}$ des fonctions réelles continûment différentiables dans un voisinage de $\overline{D}$. Alors

$$\int_{\partial D} P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) d(x, y).$$

Dém. Choisir $f = (-Q, P)$ dans le théorème 9.1:

$\int_{\partial D}(-Q dy - P dx) = \iint_D (-Q_x + P_y) d(x, y)$.

Corollaire 9.3

(1) Soit D un domaine dans $\mathbb{R}^2$ délimité par une courbe de Jordan, fermée et continûment différentiable. Alors l'aire de D est donée par:

$$\text{mes} D = \frac{1}{2} \int_{\partial D} x dy - y dx,$$

la courbe étant orientée positivement (=sens contraire d'une montre).

(2) Si un arc de Jordan Γ est donnée par les coordonnées polaires $r = r(\theta),\ \theta_0 \leq \theta \leq \theta_1$, alors l'aire de la figure D' ci-joint est donnée par

$$\text{mes} D' = \frac{1}{2} \int_{\theta_0}^{\theta_1} r^2(\theta) d\theta.$$

Dém (1) $\text{mes} D = \iint_D 1\ d(x, y)$. Posons $Q(x, y) = x$ et $P(x, y) = -y$.
Alors, en vue de 9.2:
$\iint_D 1\ d(x, y) = \frac{1}{2} \iint_D (\underbrace{1}_{Q_x} - \underbrace{(-1)}_{P_y}) d(x, y) =$
$= \frac{1}{2} \int_{\partial D} (-y dx + x dy)$.

(2) $x(\theta) = r(\theta) \cos\theta,\ y(\theta) = r(\theta) \sin\theta$. Donc $x dy - y dx = \Big(\big(r(\theta) \cos\theta\big)\big(r'(\theta) \sin\theta + r(\theta) \cos\theta\big)\Big)\ d\theta - \Big(\big(r(\theta) \sin\theta\big)\big(r'(\theta) \cos\theta - r(\theta) \sin\theta\big)\Big)\ d\theta = \big(r^2(\theta) \cos^2\theta + r^2(\theta) \sin^2\theta\big)\ d\theta = r^2(\theta) d\theta$. Ainsi

$\text{mes} D = \int_{\partial D} x dy - y dx = \Big(\int_\Gamma + \int_{[OA]} + \int_{[OB]}\Big)(x dy - y dx) = \int_{\theta_0}^{\theta_1} r^2(\theta) d\theta + 0 + 0$, car l'angle θ est constante sur les droites $[OA]$ et $[OB]$.

ex.• Calcul de l'aire du secteur $S = \{re^{i\theta} : 0 \leq r \leq R, \theta_0 \leq \theta \leq \theta_1\}$:
$\text{mes} S = \frac{1}{2} \int_{\theta_0}^{\theta_1} r^2(\theta) d\theta = \frac{1}{2} R^2 (\theta_1 - \theta_0)$.
Si $\theta_0 = 0$ et $\theta_1 = 2\pi$, on obtient l'aire du disque: πR^2.

•. Soit D le disque unité $x^2 + y^2 \leq 1$ et $f(x, y) = (x + y, x^2)$. Calculer de deux façons différentes $\iint_D \text{div} f(x, y) d(x, y)$.

i) $\iint_D \text{div} f(x, y) d(x, y) =$
$= \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}(x + y) + \frac{\partial}{\partial y} x^2\right) d(x, y) =$
$= \iint_D 1\ d(x, y) = \pi$.

ii) ∂D, le cercle unité, est paramétrisé par $\Phi(t) = (\cos t, \sin t), 0 \leq t \leq 2\pi$. La normale extérieure est donnée par: $(\frac{d}{dt}(\sin t), -\frac{d}{dt}(\cos t))$. Donc:

$\iint_D \operatorname{div} f(x,y)d(x,y) = \int_{\partial D} f \cdot n ds =$
$= \int_0^{2\pi} (\cos t + \sin t, \cos^2 t) \cdot (\cos t, \sin t) 1 dt =$
$= \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin t \cos t + \cos^2 t \sin t) dt =$
$= \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = \int_0^{2\pi} (\frac{1+\cos 2t}{2}) dt = \pi.$

•. Soit D la couronne

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

Calculer de deux façons différentes $\iint_D \operatorname{div} f(x,y)d(x,y)$.

i) $\iint_D \operatorname{div} f(x,y)d(x,y) = \iint_D 1 d(x,y) = \text{mes} D = 4\pi - \pi = 3\pi.$

ii) $\Gamma_1 : (2\cos t, 2\sin t)\ 0 \leq t \leq 2\pi,$
$\Gamma_2 : (\cos(2\pi - t), \sin(2\pi - t)) = (\cos t, -\sin t)\ 0 \leq t \leq 2\pi,$
(faites attention à l'orientation)
$n_1 = (\cos t, \sin t), \quad n_2 = (-\cos t, \sin t)$. Ainsi
$I = \iint_D \operatorname{div} f(x,y)d(x,y) = \int_{\partial D} f \cdot n ds =$
$$= (\underbrace{\int_{\Gamma_1} f \cdot n ds}_{I_1} + \underbrace{\int_{\Gamma_2} f \cdot n ds}_{I_2})$$
où
$I_1 = \int_0^{2\pi} (2\cos t + 2\sin t, 4\cos^2 t)(\cos t, \sin t) 2dt = 4\pi,$
$I_2 = \int_0^{2\pi} (\cos t - \sin t, \cos^2 t)(-\cos t, \sin t) dt = -\pi.$

Donc $I = I_1 + I_2 = 3\pi$.

Théorème 9.4. théorème de la divergence de Gauss-Ostrogradskii dans $\mathbb{R}^3$

Soit $V \subseteq \mathbb{R}^3$ un corps "solide" dans l'espace de surface S. Alors sous certaines conditions, on a pour tout champ vectoriel $f = (f_1, f_2, f_3)$ continûment différentiable dans un voisinage de V la formule

$$\iiint_V \operatorname{div} f \ d(x,y,z) = \iint_S f \cdot n \ d\sigma,$$

où n est la normale unitaire extérieure à la surface S.
Si $\Phi : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(u,v) \mapsto \Phi(u,v)$ est une paramétrisation de S, alors $n = \dfrac{\Phi_u \times \Phi_v}{\|\Phi_u \times \Phi_v\|_2}$. Ainsi

$$\iiint_V \operatorname{div} f \ d(x,y,z) =$$

$$= \iint_D f(\Phi(u,v)) \cdot \frac{\Phi_u \times \Phi_v}{\|\Phi_u \times \Phi_v\|_2} \big(\|\Phi_u \times \Phi_v\|_2\big) d(u,v) =$$

$= \iint_D f(\Phi(u,v)) \cdot (\Phi_u \times \Phi_v) d(u,v).$

— — — — — — — — — —

En d'autres mots, l'intégrale de surface de la composante normale d'un champ vectoriel f sur une surface S est égale à l'intégrale de la divergence de f prise dans le volume enclos par la surface.

ex. • Soit V la demi-boule $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 1, z \geq 0\}$, $f(x,y,z) = (x,y,z)$ et soit S la surface de V. S comprend deux parties:

$S_1 = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 = 1, z \geq 0\}$ et
$S_2 = \{(x,y,z) : x^2+y^2 \leq 1, z = 0\}$.

Donc
$\iiint_V \mathrm{div} f \; d(x,y,z) = \iiint_V 3d(x,y,z) = 3\mathrm{mesV} = 3(\frac{4}{3}\pi 1^3)\frac{1}{2} = 2\pi,$
$\iint_S f \cdot n d\sigma = \iint_{S_1} f \cdot n d\sigma + \iint_{S_2} f \cdot n d\sigma$ où
$\iint_{S_1} f \cdot n d\sigma = \iint_{u^2+v^2\leq 1} f(u,v,\sqrt{1-u^2-v^2}) \cdot$
$\left[(1,0,\frac{-u}{\sqrt{1-u^2-v^2}}) \times (0,1,\frac{-v}{\sqrt{1-u^2-v^2}})\right] d(u,v) =$
$= \iint_D (u,v,\sqrt{1-u^2-v^2}) \left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2-v^2}}, \frac{v}{\sqrt{1-u^2-v^2}}, 1\right) d(u,v) =$
$= \iint_D \left(\frac{u^2}{\sqrt{1-u^2-v^2}} + \frac{v^2}{\sqrt{1-u^2-v^2}} + \sqrt{1-u^2-v^2}\right) d(u,v) =$
$= \iint_{u^2+v^2\leq 1} \frac{1}{\sqrt{1-u^2-v^2}} d(u,v) = \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} r dr d\theta = -2\pi\sqrt{1-r^2}|_0^1 = 2\pi$ et

$\iint_{S_2} f \cdot n d\sigma = \iint_{u^2+v^2\leq 1} f(u,v,0) \cdot (0,0,-1) d(u,v) = 0.$

Définition Soit $f = (f_1, f_2, f_3)$ un champ vectoriel continûment différentiable sur un ouvert $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$. Alors le rotationel de f est le vecteur

$\mathrm{rot} f = \nabla \times f = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right).$

Ces coordonnées sont données par le schéma suivant:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix}.$$

Théorème 9.5. théorème de Stokes dans $\mathbb{R}^3$

Soit Γ une courbe de Jordan orientée, fermée et continûment différentiable dans $\mathbb{R}^3$ et donnée par la paramétrisation $\tau : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^3$. Soit S une surface non dégénérée dans $\mathbb{R}^3$, donnée par le paramétrage $\Phi : \overline{D} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, et dont le "bord" est égal à la courbe Γ. Supposons que D est un domaine dans $\mathbb{R}^2$ tel que la frontière de D soit une courbe γ de Jordan, fermée et C^1, donnée par la paramétrisation $\Psi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$ tel que que $\tau = \Phi \circ \Psi$.

Alors pour tout champ vectoriel $f : S \to \mathbb{R}^3,\ f = (f_1, f_2, f_3)$ continûment différentiable dans un voisinage de S, on a la formule:

$\int_\Gamma f \cdot (dx, dy, dz) = \int_\Gamma f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz =$
$= \iint_S \big(\mathrm{rot} f\big) \cdot n\ d\sigma,$
où $\mathrm{rot} f$ est le rotationel de f et où n est la normale unitaire "extérieure" à la surface S.

$-\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -$

En utilisant les paramétrisations, on obtient:

$\iint_S \Big((\mathrm{rot} f) \circ \Phi(u,v)\Big) \cdot \frac{\Phi_u \times \Phi_v}{\|\Phi_u \times \Phi_v\|}\ \|\Phi_u \times \Phi_v\|\ d(u,v) =$
$= \iint_S \Big((\mathrm{rot} f) \circ \Phi(u,v)\Big) \cdot \Big(\Phi_u \times \Phi_v\Big)\ d(u,v)$ et

$\int_\Gamma f \cdot (dx, dy, dz) = \int_\alpha^\beta f(\tau(t)) \cdot \tau'(t) dt.$

En d'autres mots, l'intégrale curviligne de la composante tangentielle d'un champ vectoriel f prise le long d'une courbe Γ de Jordan fermée est égale à l'intégrale de surface de la composante normale de $\mathrm{rot} f$ prise sur une surface *quelconque* S ayant pour bord la courbe Γ.

ex. • Soit Γ le cercle $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$ et soit S la demi-sphère $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$. Alors Γ est le bord de S. En se propose de vérifier le théorème Stokes pour cette surface S et le champ vectoriel $f(x,y,z) = (y, z, x)$.

Notons d'abord que S est paramétrisée par:
$\Phi(u,v) = (u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2}),\ u^2 + v^2 \leq 1.$

On a $\mathrm{rot} f = \begin{vmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix} = (-1, -1, -1).$

Donc $\iint_S \big(\mathrm{rot} f\big) \cdot n\ d\sigma =$
$= \iint_{u^2+v^2 \leq 1} (-1,-1,-1) \left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2-v^2}}, \frac{v}{\sqrt{1-u^2-v^2}}, 1\right) d(u,v) =$
$= \iint_{u^2+v^2 \leq 1} \left(\frac{-u-v}{\sqrt{1-u^2-v^2}} - 1\right) d(u,v) =$
$= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{1} \left[\frac{-r\cos\theta - r\sin\theta}{\sqrt{1-r^2}} - 1\right] r dr d\theta =$
$= \int_{r=0}^{1} \int_{\theta=0}^{2\pi} \left(\frac{-r^2}{\sqrt{1-r^2}}\right) (\cos\theta - \sin\theta) d\theta dr - \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{1} 1 r dr d\theta = 0 - \pi = -\pi.$

D'autre part $\int_\Gamma f \cdot (dx, dy, dz) = \int_\Gamma (y dx + z dy + x dz) = \int_0^{2\pi} [(\sin t)(-\sin t) + 0 + 0] dt = -\int_0^{2\pi} \sin^2 t dt = -\pi.$

• Considérons maintenant comme surface le cylindre semi-fermé $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, 0 \le z \le R\} \bigcup \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le 1, z = R\}$. Notons que le bord est la courbe Γ ci-dessus. On obtient

$$\iint_C \big(\mathrm{rot} f\big) \cdot n \, d\sigma = \iint_M + \iint_B,$$

oùM est le manteau du cylindre et B sa base supérieure.
$\iint_B \big(\mathrm{rot} f\big) \cdot n \, d\sigma = \iint_B (-1, -1, -1)(0, 0, 1) d\sigma = -\mathrm{mes}\, B = -\pi$.
Paramétrisation du manteau: $\Phi(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$,
$0 \le u \le 2\pi, 0 \le v \le R$. Comme $\Phi_u = (-\sin u, \cos u, 0)$ et $\Phi_v = (0, 0, 1)$, on a: $\Phi_u \times \Phi_v = (\cos u, \sin u, 0)$. Donc:

$$\iint_M \big(\mathrm{rot} f\big) \cdot n \, d\sigma =$$

$= \iint_{\substack{0 \le u \le 2\pi \\ 0 \le v \le R}} (-1, -1, -1) \cdot (\cos u, \sin u, 0) d(u, v) =$
$= -\int_{v=0}^{R} \left[\int_{u=0}^{2\pi} (\cos u + \sin u) du\right] dv = 0.$

Ainsi $= \iint_M + \iint_B = -\pi + 0 = -\pi$, donc de nouveau

$\int_\Gamma f \cdot (dx, dy, dz) = \iint_C \big(\mathrm{rot} f\big) \cdot n \, d\sigma$.

• Considérons finalement la demi-sphère $S_- = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \le 0\}$. Elle est paramétrisée par:
$\Phi(u, v) = (u, v, -\sqrt{1 - u^2 - v^2}),\ u^2 + v^2 \le 1.$

Comme dans ce cas la normale n à la surface est l'opposée de celle du premier cas, on obtient
$\iint_{S_-} \big(\mathrm{rot} f\big) \cdot n \, d\sigma = -\iint_S \big(\mathrm{rot} f\big) \cdot n \, d\sigma = \pi$. Calculons maintenant $\int_\Gamma f \cdot (dx, dy, dz)$, où Γ est le bord de S_-. Cette fois ci, il faut parcourir Γ dans le sens inverse, ce qui donne la paramétrisation suivante:

$\tau(t) = (\cos(2\pi - t), \sin(2\pi - t), 0)$ et $(dx, dy, dz) = (\sin(2\pi - t), -\cos(2\pi - t), 0)\ dt$.
On voit que $\tau(t) = (\cos t, -\sin t, 0)$ et $(dx, dy, dz) =$
$= (-\sin t, -\cos t, 0)\ dt$. Donc
$\int_\Gamma f \cdot (dx, dy, dz) = \int_\Gamma (y, z, x)(dx, dy, dz) = \int_\Gamma \sin^2 t dt = \pi$.

10 Formes différentielles

A Applications multilinéaires

Soit $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^q$ une application linéaire, i.e. $\varphi(\lambda u + \lambda' u') = \lambda\varphi(u) + \lambda'\varphi(u')$, où $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R},\ u, u' \in \mathbb{R}^n$.

D'après le théorème sur la représentation matricielle, il existe une matrice $A \in \mathcal{M}(q \times n, \mathbb{R})$ telle que $\varphi(u) = Au$. Si $q = 1$, on parle d'une <u>forme linéaire</u>. Dans ce cas on a:

$A = (a_1, \cdots, a_n),\ (a_j \in \mathbb{R})$ et $Au = (a_1, \cdots, a_n) \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^n a_j h_j$.

- *formes bilinéaires*: $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est dite <u>bilinéaire</u> si pour chaque $u \in \mathbb{R}^n$ fixe, l'application $\varphi(u, \cdot) : \begin{cases} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ v \mapsto \varphi(u, v) \end{cases}$ est linéaire, et si pour chaque $v \in \mathbb{R}^n$ fixe, l'application $\varphi(\cdot, v) : \begin{cases} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ u \mapsto \varphi(u, v) \end{cases}$ est linéaire.

- *formes multilinéaires*: $\varphi : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_{r\text{-fois}} \to \mathbb{R}$ est dite

<u>r-linéaire</u>, si pour tout $j \in \{1, \cdots, r\}$ et pour tous $u_1, \cdots, u_{j-1}, u_{j+1}, \cdots, u_r$ fixes, les r applications

$\varphi(u_1, \cdots, u_{j-1}, \bullet, u_{j+1}, \cdots, u_r) : \begin{cases} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ u \mapsto \varphi(u_1, \cdots, u_{j-1}, u, u_{j+1}, \cdots, u_r) \end{cases}$ sont linéaires.

On dit qu'une forme r-linéaire est <u>alternée</u>, si elle change de signe quand on permute deux de ses composantes:

$\varphi(\cdots, u_i, \cdots, u_j, \cdots) = -\varphi(\cdots, u_j, \cdots, u_i, \cdots)$.
(Notons que les u_j sont des vecteurs dans $\mathbb{R}^n$)

Notons aussi que ceci implique que si deux des variables u_j coïncident, alors $\varphi(\cdots, u, \cdots, u, \cdots) = 0$ (parce que, en permutant ces deux variables, cette image doit être son propre opposé).

ex. • Evidemment chaque forme linéaire est alternée.

- $r = n :\quad \varphi(u_1, \cdots, u_n) = \det(u_1, \cdots, u_n) =$

$$\begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \cdots & h_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ h_{n1} & h_{n2} & \cdots & h_{nn} \end{vmatrix}$$

- $1 \le r \le n :\quad 1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_r \le n$

$$\varphi(u_1, \cdots, u_r) = \begin{vmatrix} h_{i_1 1} & \cdots & \cdots & h_{i_1 r} \\ h_{i_2 1} & \cdots & \cdots & h_{i_2 r} \\ \vdots & & & \vdots \\ h_{i_r 1} & \cdots & \cdots & h_{i_r r} \\ \overset{u_1}{\uparrow} & & & \overset{u_r}{\uparrow} \end{vmatrix}.$$

Ceci sont des formes r-linéaires alternées sur $\mathbb{R}^n$. Elles sont notées par

$$dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_r}$$

$(1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leq n,\ 1 \leq r \leq n.$
$\wedge$ s'appelle le produit extérieur.

Proposition 10.1 (i) Supposons que $1 \leq r \leq n$. Alors chaque forme r-linéaire alternée Φ sur $\mathbb{R}^n$ est une combinaison linéaire de ces formes r-linéaires canoniques, i.e.
$(*)$ $\quad \Phi = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leq n} a_{i_1, \cdots, i_r} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_r}$,
$a_{i_1, \cdots, i_r} \in \mathbb{R}$.

(ii) Si $r > n$, alors la forme nulle est la seule forme r-linéaire alternée.

Remarques: (1) Les nombres $a_{i_1, \cdots, i_r}$, $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leq n$ s'appellent les coefficients de la forme alternée $(*)$.

(2) Si $r = 1$, on obtient donc qu'une forme linéaire Φ s'écrit comme
$\Phi = \sum_{j=1}^n a_j dx_j$, en d'autres mots $\Phi(u) = \Phi(\begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}) = \sum_{j=1}^n a_j h_j$.

Dém. de (ii): Soit $\{e_1, \cdots, e_n\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et supposons que $u_1, \cdots, u_r \in \{e_1, \cdots, e_n\}$, $r > n$. Alors au moins deux des r variables $u_1, \cdots, u_r$ coïncident. Donc $\Phi(u_1, \cdots, u_r) = 0$. Comme $\Phi : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_{r > n} \to \mathbb{R}$ est déterminée de façon unique par les images des bases canoniques $\{e_1, \cdots, e_n\}$ de $\mathbb{R}^n$, on conclut que $\Phi \equiv 0$.

Définition (1) Soit $1 \leq r \leq n$. Si les coefficients $a_{i_1, \cdots, i_r}$ d'une forme r-linéaire alternée Φ sur $\mathbb{R}^n$ sont des fonctions à n variables définies sur un domaine $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, alors on parle d'une forme différentielle de degré r sur Ω.

(2) Si $r = 0$, alors, par convention, chaque fonction réelle $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est considérée comme une forme différentielle de degré 0.

Récapitulatif • $a(y) :\ \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (forme différentielle de degré 0)
• $\omega_1 = a_1(y)dx_1 + a_2(y)dx_2 + \cdots + a_n(y)dx_n$ (forme différentielle de degré 1),
• $\omega_2 = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} a_{i_1, i_2}(y) dx_{i_1} \wedge dx_{i_2}$ (forme différentielle de degré 2)

Ici $a(y), a_j(y)$ et $a_{i_1,i_2}(y)$ sont des fonctions définies sur $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$.
Cas spéciaux:

n=2: $\omega_1 = Pdx + Qdy \quad (P, Q : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R})$
degré 1,

n=3: $\omega_1 = Pdx + Qdy + Rdz \quad (P, Q, R : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R})$ degré 1,
$\omega_2 = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy$ degré 2,
$\omega_3 = P(dx \wedge dy \wedge dz)$ degré 3 .

(Faites attention à l'ordre cyclique des variables).

Règles de calcul

(1) Deux formes différentielles ω et ω' sur $\mathbb{R}^n$ sont égales si elles ont le même degré et si leurs coefficients sont égaux.
(2) $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$, et $dx_i \wedge dx_i = 0$,
(3) produit de deux formes différentielles:
a) produit avec une fonction a (=forme différentielle de degré 0):
$a \cdot \omega = a \cdot \sum_{(i)} a_{i_1,i_2,\cdots,i_r} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_r} =$
$= \sum_{(i)} a\, a_{i_1,i_2,\cdots,i_r} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_r}$,

b) $\omega = \sum_{(i)} a_{i_1,i_2,\cdots,i_r} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_r}$, (deg r),
$\omega' = \sum_{(j)} b_{j_1,j_2,\cdots,j_q} dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_q}$, (deg q),
alors $\omega \wedge \omega' =$
$$\sum_{(i)} \sum_{(j)} a_{i_1,i_2,\cdots,i_r} b_{j_1,j_2,\cdots,j_q} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_r} \wedge dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_q},$$

où $\sum_{(i)}$ veut dire qu'on fait la sommation sur tous les multi-indices ordonnés $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leq n$; de même pour $(j):\ 1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_q \leq n$.

Le produit extérieur $\omega \wedge \omega'$ d'une forme différentielle de degré r avec une forme différentielle de degré q est donc une forme différentielle de degré $r + q$.

Attention: le produit extérieur n'est pas commutatif!

(4) $\omega \wedge \omega' = (-1)^{rr'} \omega' \wedge \omega$ si $\deg \omega = r$ et $\deg \omega' = r'$.
(5) $\omega \wedge (\omega' \wedge \omega'') = (\omega \wedge \omega') \wedge \omega''$ (associativité).

ex. Dans $\mathbb{R}^3$:

- $\omega = 2dx \wedge dy - (3x + y)dx \wedge dz + 5dy \wedge dx - e^x dz \wedge dy = (2 - 5)dx \wedge dy + e^x dy \wedge dz + (3x + y)dz \wedge dx$ (deg=2).

- $(Pdx + Qdy + Rdz) \wedge (P'dx + Q'dy + R'dz) = PQ'dx \wedge dy + PR'dx \wedge dz + QP'dy \wedge dx + QR'dy \wedge dz + RP'dz \wedge dx + RQ'dz \wedge dy =$

$= (PQ' - P'Q)dx{\wedge}dy + (QR' - Q'R)dy{\wedge}dz + (RP' - R'P)dz{\wedge}dx.$

Les coefficients de cette forme de degré 2 sont les coordonnées du produit vectoriel $(P, Q, R) \times (P', Q', R') = (QR' - Q'R, RP' - R'P, PQ' - P'Q)$.

- Dans $\mathbb{R}^2$:

$\omega = Pdx + Qdy,\ \omega' = P'dx + Q'dy \implies \omega{\wedge}\omega' = PQ'dx{\wedge}dy + QP'dy{\wedge}dx = (PQ' - P'Q)dx{\wedge}dy,$

Le coefficient de cette forme de degré 2 est égal au déterminant de $\begin{pmatrix} P & Q \\ P' & Q' \end{pmatrix}$.

$\omega'{\wedge}\omega = P'Qdx{\wedge}dy + Q'Pdy{\wedge}dx = (P'Q - PQ')dx{\wedge}dy = -\omega{\wedge}\omega'.$

Soit en plus $\omega'' = P''dx + Q''dy$. Alors $(\omega{\wedge}\omega'){\wedge}\omega'' = \Big((PQ' - P'Q)dx{\wedge}dy\Big){\wedge}(P''dx{\wedge}Q''dy) = (PQ' - P'Q)P''dx{\wedge}dy{\wedge}dx + (PQ' - P'Q)Q''dx{\wedge}dy{\wedge}dy = 0.$

B différentielle extérieure d'une forme différentielle

Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ et soit ω une forme différentielle de degré 0 sur Ω, donc $\omega = f$. Supposons que $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$. Rappelons que la différentielle de f en $x_0 \in \Omega$ est l'application linéaire $d_{x_0}f$ donnée par $u \in \mathbb{R}^n \mapsto \text{grad } f(x_0) \cdot u$ (produit matricielle), i.e.

$$\begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} \mapsto \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_j} h_j.$$

Donc $df = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j$.

Ceci est la *différentielle extérieure* de la forme différentielle ω de degré 0. Cette nouvelle forme différentielle à le degré $0 + 1 = 1$. En général:

Définition *Différentielle extérieure*
Soit

$$\omega = \sum_{(i)} a_{i_1, i_2, \cdots, i_r} dx_{i_1}{\wedge}dx_{i_2}{\wedge} \cdots {\wedge}dx_{i_r}$$

une forme différentielle de degré r sur $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Supposons que les coefficients $a_{i_1, i_2, \cdots, i_r}$ soient dans $C^1(\Omega, \mathbb{R})$. Alors la <u>différentielle extérieure</u> de ω est la forme différentielle

$$d\omega = \sum_{(i)} d\, a_{i_1, i_2, \cdots, i_r} \wedge dx_{i_1}{\wedge}dx_{i_2}{\wedge} \cdots {\wedge}dx_{i_r}.$$

Elle a le degré $r + 1$.

ex. • <u>$n = 2$</u>

$\omega = Pdx + Qdy \quad (\deg\omega = 1) \Longrightarrow d\omega = dP \wedge dx + dQ \wedge dy = \left(\frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy\right) \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}dx + \frac{\partial Q}{\partial y}dy\right) \wedge dy = \frac{\partial P}{\partial y}dy \wedge dx + \frac{\partial Q}{\partial x}dx \wedge dy = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx \wedge dy.$

- $\underline{n = 3}$

(i) $\omega = Pdx + Qdy + Rdz \quad (\deg \omega = 1) \Longrightarrow d\omega = dP \wedge dx + dQ \wedge dy + dR \wedge dz = \cdots = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dy \wedge dz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx \wedge dy + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dz \wedge dx.$

On voit que les coefficients de $d\omega$ sont les composantes du rotationel du champ vectoriel (P, Q, R), i.e. si $d\omega = Ady \wedge dz + Bdz \wedge dx + Cdx \wedge dy$ alors $(A, B, C) = \text{rot } (P, Q, R) = \nabla \times (P, Q, R)$, où$\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$.

(ii) $\omega = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy \quad (\deg \omega = 2) \Longrightarrow d\omega = dP \wedge dy \wedge dz + dQ \wedge dz \wedge dx + dR \wedge dx \wedge dy = \left(\frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy + \frac{\partial P}{\partial z}dz\right) \wedge dy \wedge dz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}dx + \frac{\partial Q}{\partial y}dy + \frac{\partial Q}{\partial z}dz\right) \wedge dz \wedge dx + \left(\frac{\partial R}{\partial x}dx + \frac{\partial R}{\partial y}dy + \frac{\partial R}{\partial z}dz\right) \wedge dx \wedge dy = \frac{\partial P}{\partial x}dx \wedge dy \wedge dz + \frac{\partial Q}{\partial y}dy \wedge dz \wedge dx + \frac{\partial R}{\partial z}dz \wedge dx \wedge dy = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dx \wedge dy \wedge dz = \text{div } (P, Q, R) \; dx \wedge dy \wedge dz.$

(Notons que $dy \wedge (dz \wedge dx) = dy \wedge (-dx \wedge dz) =$
$= (dy \wedge (-dx)) \wedge dz = dx \wedge dy \wedge dz$.

Proposition 10.1 Soient ω et ω' des formes différentielles sur $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ de classe C^1. Alors

(1) $d(\omega + \omega') = d\omega + d\omega'$ si ω et ω' ont le même degré,
(2) $d(\lambda\omega) = \lambda d\omega$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,
(3) $d(\omega \wedge \omega') = d\omega \wedge \omega' + (-1)^r \omega \wedge d\omega'$, où $r = \deg \omega$.

Proposition 10.2 Soit $F = (f_1, \cdots, f_n)$ un champ vectoriel continûment différentiable sur un ouvert $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Alors $df_1 \wedge \cdots \wedge df_n = \det J_F \; dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$.

Dém (cas $n = 2$):
$df \wedge dg = \left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right) \wedge \left(\frac{\partial g}{\partial x}dx + \frac{\partial g}{\partial y}dy\right) =$
$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}\right) dx \wedge dy = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} dx \wedge dy = \det J_{(f,g)} \; dx \wedge dy.$

C Différentielle extérieure double

Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un ouvert et soit (P, Q, R) un champ vectoriel de classe $C^2(\Omega, \mathbb{R})$. Considérons la forme différentielle $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$ de degré 1. Alors
$d\omega = Ady \wedge dz + Bdz \wedge dx + Cdx \wedge dy$, où $(A, B, C) = \text{rot } (P, Q, R)$ et
$d(d\omega) = dA \wedge dy \wedge dz + dB \wedge dz \wedge dx + dC \wedge dx \wedge dy = \text{div } (A, B, C) dx \wedge dy \wedge dz = \text{div rot } (P, Q, R) dx \wedge dy \wedge dz.$
Mais comme $A = R_y - Q_z$, $B = P_z - R_x$ et $C = Q_x - P_y$ on obtient: d'après Schwarz:

$\text{div}(A, B, C) = R_{yx} - Q_{zx} + P_{zy} - R_{xy} + Q_{xz} - P_{yz} = 0.$

donc div rot$(P,Q,R)=0$

Donc $d(d\omega)=0$.

Théorème 10.3 (Théorème de Poincaré I)
Soit ω une forme différentielle de degré r sur $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Supposons que les coefficients de ω soient dans $C^2(\Omega,\mathbb{R})$. Alors $dd\omega = 0$.

Définition Une forme différentielle ω est dite <u>fermée</u>, si $d\omega = 0$, ω est dite <u>exacte</u> s'il existe une forme différentielle ω' telle que $d\omega' = \omega$.

Remarque (1) Une condition nécessaire pour que ω de degré r, $0 < r \leq n$ soit exacte, est que $d\omega = 0$. <u>Preuve</u>: Soit ω' tq $d\omega' = \omega$. Alors d'après Poincaré: $0 = dd\omega' = d\omega$.

(2) ω exacte $\Longrightarrow$ ω fermée. La réciproque n'est pas vraie (voir ci-dessous).

<u>relations avec les primitives</u>

Soit $f = (P,Q,R)$ un champ vectoriel continûment différentiable sur un ouvert $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$. On suppose que f possède une primitive $F : \Omega \to \mathbb{R}$, i.e. grad $F = f$, donc

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P,\ \frac{\partial F}{\partial y} = Q,\ \frac{\partial F}{\partial z} = R.$$

Une condition nécessaire pour l'existence d'une primitive était que les conditions d'intégrabilités soient satisfaites, i.e

$$P_y = Q_x,\ P_z = R_x,\ Q_z = Ry$$

i.e. rot $(P,Q,R) = 0$. Les lignes suivantes vont montrer que ceci est une conséquence du théorème de Poincaré:

Notons que $dF = F_x dx + F_y dy + F_z dz = P dx + Q dy + R dz$ et que d'après Poincaré
$0 = ddF = (R_y - Q_z) dy{\wedge}dz + (P_z - R_x) dz{\wedge}dx + (Q_x - P_y) dx{\wedge}dy.$
Donc on obtient: rot f = rot grad $F = 0$.

Théorème 10.4 (Théorème de Poincaré II)
Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert qui est homéomorphe à une boule dans $\mathbb{R}^n$ (p. ex. un ouvert convexe). Soit ω une forme différentielle dans Ω à coefficients continûment différentiable. Supposons que ω soit fermée, i.e. $d\omega = 0$. Alors ω est exacte, i.e. il existe ω' tq. $d\omega' = \omega$.

Remarque Si ω est une forme différentielle de degré 1, on obtient notre ancienne assertion qu'un champ vectoriel C^1 posséde une primitive sur $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ si Ω est convexe et si les conditions d'intégrabilités sont vérifiées.

ex. • Soit $\omega = \big(2x + y\cos(xy)\big)dx + x\cos(xy)dy$ (sur $\mathbb{R}^2$, deg $\omega = 1$).
Q1. Est-ce que ω est fermée?
Q2. Est-ce que ω est exacte? Si oui, déterminer ω' tq $d\omega' = \omega$.

Dans ce cas cela revient à déterminer une primitive de $(2x + y\cos(xy), x\cos(xy))$.

R1. $d\omega = d(2x + y\cos(xy))\wedge dx + d(x\cos(xy))\wedge dy = (\cos(xy) - yx\sin(xy))dy\wedge dx + (\cos(xy) - xy\sin(xy))dx\wedge dy = 0$.
Donc ω est fermée.

R2. ω est exacte, car $\mathbb{R}^2$ est convexe et $d\omega = 0$.
Cherchons ω': D'abord on constate que le degré de ω' est 0, donc $\omega' = F$. Ainsi $d\omega' = \omega \Longleftrightarrow [F_x = 2x + y\cos(xy)$ et $F_y = x\cos(xy)]$.
Donc $F(x, y) = \sin(xy) + C(x) \Longrightarrow F_x = y\cos(xy) + C'(x) \overset{!}{=} 2x + y\cos(xy) \Longrightarrow C'(x) = 2x \Longrightarrow C(x) = x^2 + C$.

Donc $F(x, y) = \sin(xy) + x^2 + C$.

D Intégration de formes différentielles

Définition (1) Soit $\omega_1 = Pdx + Qdy$ une forme différentielle de degré 1 où P et Q sont continues sur $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ et soit Γ une courbe C^1 dans Ω donnée par la paramétrisation $\Phi(t) = (x(t), y(t)), \quad \alpha \leq t \leq \beta$. Alors

$\int_\Gamma \omega_1 = \int_\Gamma Pdx + Qdy = \int_\alpha^\beta \Big[P(x(t), y(t))\dot{x}(t) + Q(x(t), y(t))\dot{y}(t)\Big]dt$

(2) De même, si $\omega_1 = f_1dx_1 + \cdots f_ndx_n$ est une forme différentielle de degré 1 dans $\mathbb{R}^n$ ($f_j \in C(\Omega, \mathbb{R})$, et si Γ est une courbe dans Ω paramétrisée par $\Phi(t) = (x_1(t), \cdots, x_n(t)), \quad \alpha \leq t \leq \beta$, alors pour $f = (f_1, \cdots, f_n)$ et $dx = (dx_1, \cdots, dx_n)$ on a:

$\int_\Gamma \omega_1 = \int_\Gamma f(x) \cdot dx = \int_\Gamma \sum_{j=1}^n f_jdx_j =$
$= \int_\alpha^\beta \sum_{j=1}^n f_j(t)\dot{x}_j(t)dt.$

Définition (1) Soit $\omega_2 = Pdy\wedge dz + Qdz\wedge dx + Rdx\wedge dy$ une forme différentielle de degré 2 dans $\mathbb{R}^3$, $P, Q, R \in C(\Omega, \mathbb{R})$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$, et soit S la surface dans $\mathbb{R}^3$ donnée par la paramétrisation $\Phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in D$, D domaine mesurable dans $\mathbb{R}^2$. Alors on définit

$\int_S \omega_2 = \int_S Pdy\wedge dz + Qdz\wedge dx + Rdx\wedge dy =$
$= \iint_D \Big\{P(x(u, v), y(u, v), z(u, v))\det \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} +$
$Q(x(u, v), y(u, v), z(u, v))\det \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} +$
$R(x(u, v), y(u, v), z(u, v))\det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\Big\}d(u, v),$

où
$\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}$ est la matrice jacobienne de $(y(u,v), z(u,v))$.

(2) Soit $\omega_3 = f \; dx \wedge dy \wedge dz$ une forme différentielle de degré 3 dans $\mathbb{R}^3$ ($f \in C(\Omega, \mathbb{R})$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$). Supposons que V soit un corps solide dans $\mathbb{R}^3$ donnée par les coordonnées $(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))$, $\quad |u| \leq 1, |v| \leq 1, |w| \leq 1$.
Alors $\int_V \omega_3 = \int_V f dx \wedge dy \wedge dz =$
$\iiint f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) \det \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \, d(u,v,w)$,
où $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$ est la matrice jacobienne du champ vectoriel (x,y,z).

Définition Une variété V_p de degré p dans $\mathbb{R}^n$, où $1 \leq p \leq n$, est l'image d'une application (appellée paramétrisation de V_p) continûment différentiable
$\Phi(t_1, \cdots, t_p) = \begin{pmatrix} x_1(t_1, \cdots, t_p) \\ \vdots \\ x_n(t_1, \cdots, t_p) \end{pmatrix}$ de $\{(t_1, \cdots, t_p) : |t_j| < 1\}$ dans $\mathbb{R}^n$, tq la jacobienne de Φ a partout le rang p (Notons que $J_\Phi \in \mathcal{M}(n \times p, \mathbb{R})$).

Le bord de V_p, noté par ∂V_p, est l'image par rapport à Φ du bord du cube $\{(t_1, \cdots, t_p) : |t_j| < 1\}$.

Théorème 10.4 Théorème de Stokes (généralisé)
Soit V_p une variété de degré p dans $\mathbb{R}^n$ $(1 \leq p \leq n)$. et soit ω_{p-1} une forme différentielle de classe C^1 et de degré $p-1$ dans $\mathbb{R}^n$. Alors

$$\int_{\partial V_p} \omega_{p-1} = \int_{V_p} d\omega_{p-1}.$$

Conséquences: On retrouve le théorème de Gauss-Ostrogradskii, Stokes et les formules de Green-Riemann:

<u>n=2</u> deg $\omega = p - 1 = 1, V_2 \subseteq \mathbb{R}^2$: (Green-Riemann)
$\omega = Pdx + Qdy \Longrightarrow \int_{\partial V_2} Pdx + Qdy = \iint_{V_2} d(Pdx + Qdy) =$
$= \iint_{V_2} (P_x dx + P_y dy) \wedge dx + (Q_x dx + Q_y dy) \wedge dy =$
$= \iint_{V_2} \big(-P_y + Q_x\big) dx \wedge dy = \iint (Q_x - P_y) \det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \, d(u,v) = \iint_{V_2} (Q_x - P_y) d(x,y)$; la dernière égalité provenant du changement de variables.

<u>n=3</u> deg $\omega = p - 1 = 2, V_3 \subseteq \mathbb{R}^3$: (Gauss-Ostrogradskii)
$\omega = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy \Longrightarrow \iint_{\partial V_3} Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy =$
$= \iint P(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \det \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} \, d(u,v) +$
$+ \iint Q(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \det \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} \, d(u,v) +$
$+ \iint R(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \, d(u,v) =$

$= \iint f(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \cdot (\Phi_u \times \Phi_v) d(u,v) =$

$= \iint_{\partial V_3} f \cdot n \, d\sigma,$
où $\Phi(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ est une paramétrisation de ∂V_3
$f = (P,Q,R)$ et où n est la normale extérieure à la surface ∂V_3.

D'autre part:
$\iiint_{V_3} d\omega = \iiint_{V_3} d(Pdy{\wedge}dz + Qdz{\wedge}dx + Rdx{\wedge}dy) =$
$= \iiint_{V_3} \text{div } (P,Q,R) dx{\wedge}dy{\wedge}dz =$
$= \iiint_{V_3} \text{div } (P,Q,R) d(x,y,z).$

$\deg \omega = p - 1 = 1, V_2 \subseteq \mathbb{R}^3$: (Stokes)
$\omega = Pdx + Qdy + Rdz \Longrightarrow \int_{\partial V_2} \omega = \int_{\partial V_2} Pdx + Qdy + Rdz$
et $\iint_{V_2} d\omega = \iint_{V_2} Ady{\wedge}dz + Bdz{\wedge}dx + Cdy{\wedge}dz =$
$= \iint_{V_2} \text{rot } (P,Q,R) \cdot n \, d\sigma,$
où $(A,B,C) = \text{rot } (P,Q,R)$.

– – – – – – – – – – – – –

ex. Soit $f \in C^1(\mathbb{R}), f(0) = 1$ et $\omega(x,y,z) = 2xydy{\wedge}dz - f(y)dz{\wedge}dx + 2zdx{\wedge}dy$.

- Déterminer f tq ω soit fermée:

$d\omega = (2y - f'(y) + 2)dx{\wedge}dy{\wedge}dz \overset{!}{=} 0 \Longleftrightarrow f'(y) = 2 + 2y \Longleftrightarrow f(y) = C + 2y + y^2$.
Comme $f(0) = 1$, on a: $f(y) = (1+y)^2$.

- Montrer que dans ce cas pour tout $A \in C^1(\mathbb{R})$ il existe une forme différentielle ω' de degré 1 avec

$\omega' = A(x)dx + B(x,z)dy + C(x,y)dz$ et $d\omega' = \omega$.

Sol.: Notons que Poincaré nous dit qu'il existe dans le cas où ω est fermée une forme différentielle Ω de la forme
$\Omega = \alpha(x,y,z)dx + \beta(x,y,z)dy + \gamma(x,y,z)dz$
tq $d\Omega = \omega$. Ce qu'on veut ici, c'est que A ne dépend que de x, que B ne dépend pas de la variable y et C ne dépend pas de la variable z.

$d\omega' = B_x dx{\wedge}dy - B_z dy{\wedge}dz + (-C_x dz{\wedge}dx + C_y dy{\wedge}dz) =$
$= B_x dx{\wedge}dy - C_x dz{\wedge}dx + (C_y - B_z) dy{\wedge}dz \overset{!}{=} \omega =$
$= 2zdx{\wedge}dy - (1+y)^2 dz{\wedge}dx + 2xydy{\wedge}dz$
$\Longleftrightarrow \begin{cases} B_x = 2z & (1) \\ C_x = (1+y)^2 & (2) \\ C_y - B_z = 2xy & (3) \end{cases}.$
(système d'équations différentielles partielles.)

(1) $\Longrightarrow B(x,z) = 2zx + M(z)$
(2) $\Longrightarrow C(x,y) = x(1+y)^2 + K(y) = x + 2xy + xy^2 + K(y)$
Dans (3): $(2x + 2xy + K'(y)) - (2x + M'(z)) = 2xy \Longleftrightarrow K'(y) - M'(z) \equiv 0$.
Comme K' ne dépend pas de z et M' ne dépend pas de y, ceci n'est vrai que si $K' \equiv 0$ et $M' \equiv 0$, i.e. K et M sont des fonctions constantes. Choisissons ces constantes comme étant égales à 0. Donc:

$A(x)$ quelconque, $B(x,z) = 2zx$, $C(x,y) = x(1+y)^2$.

Preuve: $d\Big(A(x)dx + 2zxdy + x(1+y)^2dz\Big) = \omega$.

• Calculer dans le cas où ω est fermée l'intégrale $\int_S \omega$, où S est la sphère $\{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 = r^2\}$.

Sol.: Soit V la boule $\{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \leq r^2\}$. Alors $S = \partial V$. Ainsi Stokes implique que $I = \int_S \omega = \int_V d\omega$. Comme ω est fermée, on voit que $d\omega = 0$. Donc $I = 0$.

• Calculer dans le cas où ω est fermée et $A(x) = 2x$, l'intégrale $\iint_S (A,B,C)\cdot n d\sigma$, n étant la normale extérieure à la sphère S.

Sol.: Gauss: $\iint_S (A,B,C)\cdot n d\sigma = \iiint_V \operatorname{div}(A,B,C) d(x,y,z) = \iiint_V (2+0+0) d(x,y,z) = 2\text{mes } V = 2\frac{4}{3}\pi r^3$.

ex• Soit $u \in C^2(\mathbb{R}^3)$. Montrer que div grad $u = \Delta u$ et que pour chaque boule ou cube V de surface S on a:

$\iiint_V \Delta u d(x,y,z) = \iint_S \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma$,
où n est la normale unitaire extérieure à V.

Sol.: grad $u = (u_x, u_y, u_z) \Longrightarrow$ div grad $u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = \Delta u$.

$\iiint_V \Delta u d(x,y,z) = \iiint_V \text{div grad } u d(x,y,z)$
$\overset{Gauss}{=} \iint_S \text{grad } u \cdot n \, d\sigma = \iint_S \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma$.

Remarque: Si u est une fonction harmonique, alors $\iint_S \text{grad } u \cdot n \, d\sigma = 0$.