Chapitre I

Espaces Topologiques

I - NOTIONS FONDAMENTALES

Définition 1.1
$X \neq \emptyset$, $\mathcal{T} \subseteq P(X)$ (= ens. des parties ou puissances de X). Alors $\mathcal{T}$ est une *topologie* sur X si :

O1 : $\emptyset, X \in \mathcal{T}$

O2 : $U_\lambda \in \mathcal{T}$ ($\lambda \in \Lambda$ ensemble d'indices, pas nécessairement fini ou dénombrable) $\Rightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in \mathcal{T}$

O3 : $U_1, U_2 \in \mathcal{T} \Rightarrow U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$

$(X, \mathcal{T})$est un espace topologique si O1,O2,O3 satisfaits.
Les éléments de $\mathcal{T}$ s'appellent les *ouverts* de $((X, \mathcal{T})$ (ou de X).

- Exercice

- $X \neq \emptyset$, $\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, X\}$ topologie triviale ou grossière.
- $\mathcal{T}_2 = P(X)$ topologie discrète.
- X infini, $\mathcal{T}_{co} = \{E \subseteq X : X \setminus E \text{ fini }\} \bigcup \{\emptyset\}$ (topologie cofinie)
- (X, d) espace métrique, $\mathcal{T}_d$ l'ensemble des ouverts de X est un espace topologique (topologie métrique) ($O \subseteq X$ ouvert si $\forall x \in O$, $\exists$ boule $B(x, \varepsilon_x) \subseteq O$)

Définition 1.2
Un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est dit *métrisable* s'il existe une distance d sur X t.q. $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}$.

Définition 1.3
$(X, \mathcal{T})$ est dit *séparé* (espace de Hausdorff, satisfait axiome $T2$)

$$\text{si} \quad \forall x, y \in X, \exists U, V \in \mathcal{T} \ \ t.q. \ \ x \in U, y \in V, \text{et} \, U \cap V = \emptyset$$

- Ex. Chaque espace métrique (X, d) est séparé.

$$(U = B(x, \delta/3), V = B(y, \delta/3)$$

- $(X, \mathcal{T}_1)$ n'est pas séparé.
- $(X, \mathcal{T}_{co})$ n'est pas séparé.

Définition 1.4
$(X, \mathcal{T})$ espace topologique. $E \subseteq X$ *fermé* si $E^c = X \setminus E \in \mathcal{T}$; c'est à dire si E^c est ouvert.
E est *dense* (dans X) si $\forall U \in \mathcal{T}$, $U \cap E \neq \emptyset$.

Définition 1.5 $(X, \mathcal{T})$ espace topoloqique

i) $E \subseteq X$. On appelle $x \in X$ *point adhérent* à E si $\forall U \in \mathcal{T}$ avec $x \in U$ on a $U \cap E \neq \emptyset$.

$$\overline{E} = \text{l'ens. de tous les points adhérents à } E = \left| \begin{array}{l} \text{l'adhérence} \\ \text{la fermeture} \end{array} \right. \text{de } E.$$

ii) $S \subseteq X$, $x \in S$ *point intérieur* de S s'il $\exists U \in \mathcal{T}$ *t.q.* $x \in U \subseteq S$
S°= l'ens. des points intérieurs de S = l'intérieur de S

iii) $S \subseteq X$, $x \in X$ *point frontière* de S si $\forall U \in \mathcal{T}$

$$x \in U \ : U \cap S \neq \emptyset \,, U \cap S^c \neq \emptyset$$

∂S = ens. des points frontière de S = la frontière de S.

Proposition 1.1 *Soient $(X, \mathcal{T})$ esp. top. $A, B, E \subseteq X$. Alors*

1) $E^\circ \subseteq E \subseteq \overline{E}$

2) $\partial E = \overline{E} \setminus E^\circ = \overline{E} \cap \overline{E^c}$

3) $(A^\circ)^c = \overline{A^c}$ $\qquad \left(\overline{A}\right)^c = (A^c)^\circ$

4) $\overline{E} = \displaystyle\bigcap_{\substack{A: E \subseteq A \\ A \text{ fermé}}} A$

5) Kuratowski :

- $\overline{\emptyset} = \emptyset \qquad \overline{\overline{A}} = \overline{A}$
  $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
- $X^\circ = X \qquad A^{\circ\circ} = A^\circ$
  $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$

6) La réunion quelquonque d'ouverts est un ouvert, l'intersection d'un nombre fini de fermés est un fermé.

Démonstration

4) • Soit $D = \displaystyle\bigcap_{\substack{A: E \subseteq A \\ A \text{ fermé}}} A$ Montrons que $D^c \subseteq (\overline{E})^c$

$x \in D^c \Rightarrow \exists$ fermé F , $E \subseteq F$, $x \notin F$

$\Rightarrow F^c \in \mathcal{T}$, $x \in F^c$. Comme $F^c \cap E = \emptyset$ on a $x \notin \overline{E}$

• $\overline{E}^c \subseteq D^c \quad x \in (\overline{E})^c \Rightarrow \exists U \in \mathcal{T}, x \in U , U \cap E = \emptyset$

U^c fermé, $E \subseteq U^c \qquad x \notin U^c \Rightarrow x \notin D$ *i.e.* $x \in D^c$.

1) 2) 3) 5) exo. $\square$

Définition 1.6

$(X, \mathcal{T})$ esp. top., $x \in X$. Alors $\quad V \subseteq X$ s'appelle *voisinage* de x, s'il existe $U \in \mathcal{T}$: $x \in U \subseteq V$.
$\mathcal{U}(x)$ = ens. des voisinages de x.

On remarque que $U \subseteq X$ est un ouvert si et seulement si U est voisinage de tous ses points.

Proposition 1.2 *Soit* $(X, \mathcal{T})$ *esp. top.* $x \in X$.

$U1\ : \mathcal{U}(x) \neq \emptyset\ ;\ \forall U \in \mathcal{U}(x)\,,\ x \in U$

$U2\ : U \in \mathcal{U}(x)\,,\ V \supseteq U \Rightarrow V \in \mathcal{U}(x)$

$U3\ : U\,,\ V \in \mathcal{U}(x) \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{U}(x)$

$U4\ : \forall U \in \mathcal{U}(x)\,,\ \exists V \in \mathcal{U}(x)\ \ t.q.\ \ \forall v \in V : U \in \mathcal{U}(v)$

Démonstration $U1 - U2$ claire. $\underline{U3}$: $x \in G_u \subseteq U\,,\ G_u \in \mathcal{T}$

$x \in G_v \subseteq V\,,\ G_v \in \mathcal{T}$

$$G = G_u \cap G_v \Rightarrow x \in G\,,\ G \in \mathcal{T} \quad \text{et} \quad x \in G \subseteq U \cap V \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{U}(x)\,.$$

$\underline{U4}$: $U \in \mathcal{U}(x) \Rightarrow \exists G \in \mathcal{T}\ :\ x \in G \subseteq U$

Posons $V = G \Rightarrow$ assertion.

Théorème 1.3

$X \neq \emptyset$. Associons à tout $x \in X$ un système $\widetilde{\mathcal{U}}(x) \subseteq P(X)$ satisfaisant $U1, U2, U3, U4$; alors il existe une et une seule topologie $\mathcal{T}$ sur X t.q. $\mathcal{U}(x) = \widetilde{\mathcal{U}}(x) \quad \forall x \in X$.

Démonstration

Définissons $\mathcal{T}$ par

$$G \in \mathcal{T} \Longleftrightarrow [\forall z \in G\,,\ \exists A \in \widetilde{\mathcal{U}}(z)\ :\ z \in A \subseteq G].$$

Alors on voit que

$$G \in \mathcal{T} \Longleftrightarrow [\forall z \in G\ :\ G \in \widetilde{\mathcal{U}}(z)].$$

- Il est facile de voir que $\mathcal{T}$ est une topologie sur X.
- Montrons que $\forall x \in X$ on a: $\widetilde{\mathcal{U}}(x) = \mathcal{U}(x)$.

$*\ U \in \mathcal{U}(x) \overset{\text{voisinage}}{\Longrightarrow} \exists G \in \mathcal{T}\ :\ x \in G \subseteq U$

$\Rightarrow G \in \widetilde{\mathcal{U}}(x) \overset{U2}{\Longrightarrow} U \in \widetilde{\mathcal{U}}(x) \Longrightarrow \mathcal{U}(x) \subseteq \widetilde{\mathcal{U}}(x)$

$*\ U \in \widetilde{\mathcal{U}}(x)$. Posons $G = \{y \in X\ :\ U \in \widetilde{\mathcal{U}}(y)\}$

$\Rightarrow x \in G\,,\ G \subseteq U \quad (U_1)$

Montrons que $G \in \mathcal{T}$. Soit $z \in G \overset{\text{déf. G}}{\Longrightarrow} U \in \widetilde{\mathcal{U}}(z)$.

$\overset{U4}{\Longrightarrow} \exists A \in \widetilde{\mathcal{U}}(z)\ \ t.q.\ \ U \in \widetilde{\mathcal{U}}(a) \quad \forall a \in A$

$\underset{\text{déf G}}{\overset{U1}{\Longrightarrow}} z \in A \subseteq G \overset{\text{déf. T}}{\Longrightarrow} G \in \mathcal{T}$. Ainsi: $x \in G \subseteq U \Longrightarrow U \in \mathcal{U}(x)$.

- unicité : Soit $\widetilde{\mathcal{T}}$ topologie sur X t.q. $\mathcal{U}_{\widetilde{\mathcal{T}}}(x) = \widetilde{\mathcal{U}}(x)$.

On a $\widetilde{\mathcal{U}}(x) = \mathcal{U}_{\mathcal{T}}(x)$ donc $\mathcal{U}_{\widetilde{\mathcal{T}}}(x) = \mathcal{U}_{\mathcal{T}}(x) \quad \forall x \in X$.
Soit $G \in \mathcal{T}$, $x \in G \Rightarrow G \in \mathcal{U}_{\mathcal{T}}(x) = \mathcal{U}_{\widetilde{\mathcal{T}}}(x)$
$\Rightarrow G \in \widetilde{\mathcal{T}} \Rightarrow \mathcal{T} \subseteq \widetilde{\mathcal{T}}$.
analogue pour $\widetilde{\mathcal{T}} \subseteq \mathcal{T}$.

- Comparaison de 2 topologies

$X \neq \emptyset$. $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ deux topologies sur X.
En général, ni $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$, ni $\mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{T}_1$.

Définitions 1.7
$\mathcal{T}_2$ est dite *plus fine* que $\mathcal{T}_1$ si $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ (ou $\mathcal{T}_1$ moins fine que $\mathcal{T}_2$ ou $\mathcal{T}_1$ plus grossière que $\mathcal{T}_2$).

Proposition 1.4
$X \neq \emptyset$, $\quad \mathcal{T}_\lambda$ *topologie sur* X $(\lambda \in \Lambda) \Rightarrow \bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{T}_\lambda =: \mathcal{T}$ *topologie sur* X

Démonstration

01 : $\emptyset, X \in \mathcal{T}$.
02 : $G_\alpha \in \mathcal{T}\,(\alpha \in I) \Rightarrow G_\alpha \in \mathcal{T}_\lambda \quad \forall \lambda \in \wedge, \forall \alpha \in I$

$$\Longrightarrow \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha \in \underbrace{\mathcal{T}_\lambda}_{\text{topologie}} \quad \forall \lambda \Longrightarrow \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha \in \bigcap_{\lambda \in \wedge} \mathcal{T}_\lambda = \mathcal{T}$$

03 : analogue □

Remarque la réunion, même de deux topologies sur X n'est pas une topologie (en général).

Corollaire 1.5 $X \neq \emptyset$, $\quad \mathcal{S} \subseteq P(X)$, $\quad \mathcal{S} \neq \emptyset$. *Alors* $\mathcal{T} = \bigcap\limits_{\substack{\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}' \\ \mathcal{T}' \text{topologie sur } X}} \mathcal{T}'$ *est la topologie la moins fine qui contient* $\mathcal{S}$.

Démonstration claire.

- Exemple Soient d et d' des distances sur $E \neq \emptyset$. $\mathcal{T}_d$ et $\mathcal{T}_{d'}$ topologies métriques sous-jacentes à d resp. á d'. Alors $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_d'$ si seulement et si chaque boule B_d dans E_d contient une boule $B_{d'}$ avec le même centre dans $E_{d'}$ et réciproquement. Dans ce cas on dit que d est équivalente à d'.

Notons que d équivalente à d' n'implique pas (en général) qu'il existe des constantes c et c' telles que $d \leq c\,d'$ et/ou $d' \leq c'\,d$.

Proposition+ Définition 1.6 *(sous-espace topologique)*
Soit $(X, \mathcal{T})$ espace topologique et $X_1 \subseteq X, X_1 \neq \emptyset$. Alors $\mathcal{T}_1 := \{U \cap X_1 : U \in \mathcal{T}\}$ (trace des éléments de $\mathcal{T}$ dans X_1) est une topologie sur X_1, appelée *topologie induite* par $\mathcal{T}$ sur

X_1. On dit que $(X_1\,,\,\mathcal{T}_1)$ est un *sous-espace topologique* de X (on écrit $\mathcal{T}_{X_1}=\mathcal{T}_1$)

Théorème 1.8 *$(X,\mathcal{T})$ esp. top., $X_1\subseteq X$. Alors*

1) *Les fermés de X_1 sont exactement les intersections avec X_1 des fermés de X.*
2) *Si X_1 lui-même est fermé alors $A\subseteq X_1$ est fermé dans X_1 si seulement et si A est fermé dans X.*
3) *$A\subseteq X_1\subseteq X\Rightarrow \overline{A}\cap X_1$ est la fermeture de A dans $(X_1\,,\,\mathcal{T}_{X_1})$.*

Démonstration

1) • Soit $A\subseteq X_1$ fermé dans $X_1\Rightarrow X_1\setminus A$ ouvert dans X_1, i.e. $X_1\setminus A\in\mathcal{T}_{x_1}\overset{\text{déf}}{\Longrightarrow}$ $X_1\setminus A=G\cap X_1\,,\,G\in\mathcal{T}$. On a

$$A=X_1\setminus(G\cap X_1)=X_1\cap\underbrace{G^c}_{\substack{\text{fermé}\\ \text{dans } X}}\quad (G^c=X\setminus G)$$

• Soit $A=F\cap X_1\,,\,F$ fermé dans X.

$\Longrightarrow\ X_1\setminus A=X_1\setminus(F\cap X_1)=X_1\cap(\underbrace{F^c}_{\in\mathcal{T}})\in\mathcal{T}_{X_1}$

$\Longrightarrow\ A$ fermé dans X_1.

2) • X_1 fermé dans X, $A\subseteq X_1$ fermé dans X_1

$\overset{1)}{\Longrightarrow}\ A=\underbrace{F\cap X_1}_{\text{fermé dans } X}$ fermé dans X

• $A\subseteq X_1\,,\,A$ fermé dans X.

$A=A\cap X_1\overset{1)}{\Longrightarrow}A$ fermé dans X_1.

3) On sait que la fermeture de A dans X_1 coïncide avec $\displaystyle\bigcap_{\substack{E\subseteq X_1\\ A\subseteq E\\ E \text{ fermé dans } X_1}} E=\overline{A}^{X_1}$

$\overset{1)}{\Longrightarrow}\ E=F\cap X_1\,,\,F$ fermé dans X.

$$\Longrightarrow \overline{A}^{X_1}=\bigcap_{\substack{F\subseteq X\\ A\subseteq F\\ F \text{ fermé dans } X}}(F\cap X_1)=\overline{A}^{X}\cap X_1$$ □

Remarque on n'a pas d'analogie pour les intérieurs

II - BASES-SUBBASES

Définition 2.1

$(X,\mathcal{T})$ espace toplogique, $x\in X$, $\mathcal{U}(x)$ système de voisinages. $\mathcal{B}(x)\subseteq\mathcal{U}(x)$ s'appelle base de voisinage ou système fondamental de voisinages si

$$1)\quad \mathcal{B}(x)\neq\emptyset\qquad\qquad 2)\quad U\in\mathcal{U}(x)\Rightarrow\exists\,B\in\mathcal{B}(x)\ \ t.q.\ \ B\subseteq U$$

- Exemple (X,d) esp. métrique. Alors $\mathcal{B}(x) = \left\{B_d(x, \frac{1}{n}) \, , \, n = 1, 2 \ldots\right\}$ est un système fondamental ou une base de voisinage qui en plus est dénombrable.

Proposition 2.1
$(X, \mathcal{T})$ esp. top., $x \in X$, $\mathcal{B}(x)$ système fondamental de voisinages. Alors

(1) $U \, , \, V \in \mathcal{B}(x) \Rightarrow \exists \, W \in \mathcal{B}(x)$ t.q. $W \subseteq U \cap V$
(2) $\emptyset \notin \mathcal{B}(x)$.

Démonstration

(1) utiliser $U3$ de la proposition 1.2.
(2) $x \in U \, , \, \forall \, U \in \mathcal{U}(x)$

Définition 2.2
$(X \, , \, \mathcal{T})$ espace topologique. $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ s'appelle base (topologique) de $\mathcal{T}$ si :

$$\forall \, G \in \mathcal{T} \, , \, \exists \, B_\alpha \in \mathcal{B} \, , \, \alpha \in I \quad t.q. \quad G = \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha .$$

(I n'est pas dénombrable en général).

En particulier, $\emptyset \in \mathcal{T} \Longrightarrow \emptyset \in \mathcal{B}$.

- Convention

$$\bigcup_{\alpha \in \emptyset} B_\alpha = \emptyset$$
$$\bigcap_{\alpha \in \emptyset} B_\alpha = X$$

- Exemple (X, d) esp. métrique, $\mathcal{T}$ topologie métrique sous-jacente. Alors
$\mathcal{B} = \{\emptyset\} \bigcup \left\{B_d \, (x, \varepsilon) \, , \, x \in X \, , \, \varepsilon > 0\right\}$ base topologique (en général pas dénombrable).

Remarque

1 - Une topologie $\mathcal{T}$ sur X possède en général plusieures bases.
2 - $\mathcal{T}$ est déterminée de façon unique par $\mathcal{B}$: en effet, soient
$\mathcal{T}_1 \, , \, \mathcal{T}_2 \supseteq \mathcal{B}$ deux topologies ayant pour base $\mathcal{B}$.

$$G \in \mathcal{T}_1 \Rightarrow G = \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha \, , \, B_\alpha \in \mathcal{B} \overset{(\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}_2)}{\Longrightarrow} G \in \mathcal{T}_2$$

$\Longrightarrow \; \mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$.
De même: $\mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{T}_1$
$\Longrightarrow \; \mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$

3 - $\forall \, \mathcal{B}' \supseteq \mathcal{B}$, $\mathcal{B}$ base de $(X, \mathcal{T})$, on a $\mathcal{B}'$ base de $(X, \mathcal{T})$.

4 - $\mathcal{T}$ est une base de $\mathcal{T}$.

Proposition 2.2
$(X,\mathcal{T})$ esp. top., $\emptyset \in \mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ base $\Longleftrightarrow \forall x \in X \quad \mathcal{B}(x) := \{B \in \mathcal{B}, x \in B\}$ base de voisinage de $\mathcal{U}(x)$.

Démonstration

« $\Longrightarrow$ » : $\mathcal{B}$ base de $\mathcal{T}$, $x \in X$

$$U \in \mathcal{U}(x) \underset{\text{déf. vois.}}{\Longrightarrow} \exists G \in \mathcal{T} \ \ t.q. \ \ x \in G \subseteq U \underset{\text{déf. base}}{\Longrightarrow} \exists B_\alpha \in \mathcal{B}: \quad G = \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha$$

$\Longrightarrow \ \exists \alpha \ \ t.q. \ \ x \in B_\alpha \in \mathcal{B} \Longrightarrow B_\alpha \in \mathcal{B}(x)$. En plus $x \in B_\alpha \subseteq U$.

$\Longrightarrow \ \mathcal{B}(x)$ système fondamental de voisinages.

« $\Longleftarrow$ » : $\mathcal{B}(x)$ base de voisinage $\forall x \in X$

$$\widetilde{\mathcal{B}} := \{\emptyset\} \cup \bigcup_{x \in X} \mathcal{B}(x) \Longrightarrow \widetilde{\mathcal{B}} \subseteq \mathcal{B}.$$

Soit $B \in \mathcal{B}, B \neq \emptyset$. Alors $\exists x_0 \in B \Rightarrow B \in \mathcal{B}(x_0)$

$\Longrightarrow \ \mathcal{B} \subseteq \widetilde{\mathcal{B}}$ et ainsi $\mathcal{B} = \widetilde{\mathcal{B}}$.

$\mathcal{B}$ base : $G \in \mathcal{T}$, $x \in G$. D'après la déf. de $\mathcal{B}(x)$:

$$\exists B_x \in \mathcal{B} \ \ t.q. \ \ x \in B_x \subseteq G \Longrightarrow G = \bigcup_{x \in G} B_x$$

$\Longrightarrow \ \mathcal{B}$ base $\square$

Proposition 2.3

a) $(X,\mathcal{T})$ espace topologique, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ base. Alors :

$$B1 \qquad \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = X$$

$$B2 \qquad B \text{ et } B' \in \mathcal{B} \Longrightarrow B \cap B' = \bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha\,,\ B_\alpha \in \mathcal{B}$$

b) $X \neq \emptyset$. Supposons que $\emptyset \in \mathcal{B} \subseteq P(X)$ satisfait $B1$ et $B2$. Alors il existe une topologie $\mathcal{T}$ unique sur X t.q. $\mathcal{B}$ soit une base de $(X,\mathcal{T})$.

Démonstration

a) clair

b) Posons $\mathcal{T} := \{G \subseteq X \ : \ \exists\, B_\alpha \in \mathcal{B} \ : \ G = \bigcup\limits_{\alpha \in I} B_\alpha\}$ (I dépend de G).

$\mathcal{T}$ topologie car les axiomes O1,O2,O3 vérifiés:

- $\emptyset \in \mathcal{T}$ et $X \in \mathcal{T}$ par B1.
- O2 claire.
- Pour O3 on utilise B2.

$*$ $\mathcal{B}$ base (claire d'après la déf. de $\mathcal{T}$).

Unicité : déjà fait (car une base détermine une topologie de façon unique) $\square$

Remarque

1) Pas tous les systèmes $\mathcal{B} \subseteq P(X)$ forment une base d'un espace topologique :

$$X = \{a, b, c\} \qquad \mathcal{B} = \{\{a, b\}, \{b, c\}, X\}$$

Ici B2 n'est pas satisfait, car $\{a, b\} \cap \{b, c\} = \{b\}$ mais $\{b\}$ n'est pas réunion d'éléments de $\mathcal{B}$.

Définition 2.3

$(X, \mathcal{T})$ esp. top., $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$ s'appelle subbase de $\mathcal{T}$ si les intersections finies d'éléments de $\mathcal{S}$ forment une base de $\mathcal{T}$.

- Exemple Soit $(\mathbb{R}, |\ \ |)$ l'espace topolgique euclidien, où $d(x, y) = |x - y|$. Alors

$$\{\emptyset\} \cup \big\{]x_0 - \varepsilon\,,\, x_0 + \varepsilon[\,,\, \varepsilon > 0\,,\, x_0 \in \mathbb{R}\big\} \quad \text{base}$$
$$\{\emptyset\} \cup \big\{]-\infty\,,\, c[\ ;\ c \in \mathbb{R}\big\} \cup \big\{]d\,,\, +\infty[\ ;\ d \in \mathbb{R}\big\} \quad \text{subbase}$$

car $]a, b[=]-\infty\,,\, b[\cap]a\,,\, +\infty[$

Proposition 2.4

a) *$(X, \mathcal{T})$ esp. top., $\mathcal{S}$ subbase, $\widetilde{\mathcal{S}} \supseteq \mathcal{S} \Rightarrow \widetilde{\mathcal{S}}$ subbase.*
$\mathcal{B}$ base $\Longrightarrow \mathcal{B}$ subbase.
La réciproque est fausse.

b) *$X \neq \emptyset\,,\, \mathcal{S} \subseteq P(X)$. Supposons que $\emptyset \in \mathcal{S}$ et que $\bigcup_{Q \in \mathcal{S}} Q = X$. Alors il existe une seule topologie $\mathcal{T}$ sur X t.q. $\mathcal{S}$ soit subbase de $\mathcal{T}$.*

(notation : $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathcal{S})$, topologie engendrée par $\mathcal{S}$). De plus, $\mathcal{T}(\mathcal{S})$ est la topologie la moins fine qui contient $\mathcal{S}$.

Démonstration

a) Clair.

b) $*$ $\mathcal{B} = \Big\{\bigcap\limits_{j=1}^{n} S_j\,,\, n \in \mathbb{N},\ S_j \in \mathcal{S}\Big\} \Longrightarrow \mathcal{B}$ satisfait les axiomes B1 et B2 car :

- $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B \Longrightarrow$ d'où B1.
- $B_1\,,\, B_2 \in \mathcal{B} \Longrightarrow B_1 \cap B_2 = \left(\bigcap_{j=1}^{n} S_j \right) \cap \left(\bigcap_{j=1}^{m} \widetilde{S}_j \right) \in \mathcal{B}$.

Donc $\mathcal{B}$ base d'une topologie $\mathcal{T}$ sur X et $\mathcal{S}$ est subbase de $\mathcal{T}$.

$*$ Unicité : claire

$*$ $\mathcal{T}(\mathcal{S}) = \bigcap_{\substack{\widetilde{\mathcal{T}} \supseteq \mathcal{S} \\ \widetilde{\mathcal{T}} \text{topol.}}} \widetilde{\mathcal{T}}$ « $\supseteq$ » : clair

« $\subseteq$ » : Soit $A \in \mathcal{T}(\mathcal{S})$ et $\widetilde{\mathcal{T}} \supseteq \mathcal{S} \Longrightarrow$

$$A = \bigcup_{\lambda \in I} B_\lambda\,,\, B_\lambda \in \mathcal{B} \qquad A = \bigcup_{\lambda \in I} \underbrace{\bigcap_{j=1}^{n(\lambda)} \underbrace{S_{j,\lambda}}_{\in \mathcal{S} \subseteq \widetilde{\mathcal{T}}}}_{\in \widetilde{\mathcal{T}}} \in \widetilde{\mathcal{T}}$$

$\square$

III - CONVERGENCE, SUITES GÉNÉRALISÉES, FILTRES

A - Convergence et suites

Définition 3.1
$(X\,,\,\mathcal{T})$ esp. top., $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite dans X $\Big($ie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une appl. de $\mathbb{N}$ dans X. Notation

$$\left.(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}\right).$$

(x_n) converge vers $x \in X$ si $\forall\, U \in \mathcal{U}(x)\,,\, \exists\, n_0 = n_0(U) \in \mathbb{N}$ *t.q.* $x_n \in U \quad \forall\, n \geq n_0$.
On dit que $x_n \in U$ pour presque tous les n.

Notation $\lim_{n\to+\infty} x_n = x\,,\, x_n \to x$.

Remarques

1) (X, d) esp. métrique, $\mathcal{T}_d$ topologie métrique sous-jacente. Alors $x_n \underset{n}{\to} x_n \Longleftrightarrow d(x_n\,,\,x) \to 0$
2) Dans la déf. de la convergence, on peut se restreindre à des U d'un système fondamental de voisinages de x.
3) La limite n'est pas unique en général.

- Exemple $X \neq \emptyset$, $\mathcal{T} = \{\emptyset\,,\, X\}$. Alors chaque suite converge vers chaque élément de X.

- Remarque Si $(X, \mathcal{T})$ est un espace de Hausdorff, les limites sont uniques.

Démonstration Supposons que $x, y,\ x \neq y$ soient des limites de x_n. $(X, \mathcal{T})$ T2 $\Rightarrow$ $\exists\, U, V \in \mathcal{T}$ *t.q.* $U \cap V = \emptyset\,,\, x \in U\,,\, y \in V$. Comme $x_n \to x$ et $x_n \to y$, on a:

$$x_n \in U \quad \forall\, n \geq n_0 \quad , \quad x_n \in V \quad \forall\, n \geq n_1 .$$

Contradiction. □

- Exemple $X \neq \emptyset, \quad \mathcal{T} = P(X)$ topologie discrète.
Alors (x_n) converge vers $x \Longleftrightarrow x_n = x \quad \forall\, n \geq n_0$ (suite stationnaire)

Définition 3.2
$(X, \mathcal{T})$ esp. top., $(x_n)_n \in X^{\mathbb{N}}$. Alors $x \in X$ s'appelle valeur d'adhérence de (x_n) si $\forall\, U \in \mathcal{U}\,(x)\,,\, \exists$ une infinité d'indices n pour lesquels $x_n \in U$, i.e.

$$\forall\, U \in \mathcal{U}(x)\,,\, \forall\, n \in \mathbb{N},\, \exists\, m = m\,(n, U) \geq n \ \ t.q. \ \ x_m \in U\,.$$

Remarque Si x est une limite de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, alors x est aussi une valeur d'adhérence de (x_n).

Proposition 3.1
$(X\,,\, \mathcal{T})$ esp. top., $A \subseteq X$, (x_n) suite dans A et x une valeur d'adhérence de (x_n). Alors $x \in \overline{A}$ (i.e. x point adhérent à A)

Démonstration
Soit $U \in \mathcal{U}(x)$. Hypothèse $\Rightarrow \forall n\ \exists\, m \geq n \ \ t.q. \ \ x_m \in U \Rightarrow A \cap U \neq \emptyset\,.$ □

Rappel
Soit $f : \mathbb{N} \to X, n \mapsto x_n := f(n)$ une suite. Soit $I \subseteq \mathbb{N}$ un sous-ensemble infini. Alors $f|_I$ est dite sous-suite de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
Notation: $(x_j)_{j \in I}$ ou si $I = \{n_k \ : \ k \in \mathbb{N}\}$, $n_k < n_{k+1}$, alors $f|_I \sim (x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$.
Remarque

(1) La récriproque de 3.1 n'est pas vraie en général (voir TD) $(\mathbb{N} \times \mathbb{N},\ \mathcal{T})$

(2) L'assertion suivante n'est pas vraie non plus en général: Si x val. d'adhérence de (x_n) alors $\exists$ sous-suite (x_{n_k}) qui converge vers x.

Pour des réponses positives à (1) et (2) : ou bien condition supplémentaire à $\mathcal{T}$, ou bien généraliser le concept de suite.

Définition 3.3
$(X\,,\, \mathcal{T})$ espace topologique du type $\boxed{A1}$, si chaque point $x \in X$ possède un système fondamental *dénombrable* de voisinages $\left[\mathcal{B}(x) = \{B_1\,,\, B_2\,, \ldots\}\right]$.

- Exemple

- (X,d) esp. métrique $\Rightarrow X$ est $\boxed{A1}$
- $(X,\mathcal{T})$, $\mathcal{T}$ topologie grossière $\Rightarrow$ X est $\boxed{A1}$ (mais pas métrisable si $\# X \geq 2$)
- $(X\,,\,P(X))$ est $\boxed{A1}$

Remarque $(X,\mathcal{T})$ espace $\boxed{A1}$, $Y \subseteq X$ alors $(Y,\mathcal{T}_Y)$ est $\boxed{A1}$.

Théorème 3.2 *$(X,\mathcal{T})$ espace topologique $\boxed{A1}$. Alors*

(1) $A \subseteq X\,,\, x \in \overline{A} \Longleftrightarrow \exists\,(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ *t.q.* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = x$

(2) x *val. d'adhérence de* $(x_n) \in X^{\mathbb{N}} \Longleftrightarrow \exists$ *sous-suite* (x_{n_k}) *t.q.* $x_{n_k} \to x$.

Démonstration

(1) " $\Rightarrow$ " $\mathcal{B}(x) = \{B_1, B_2, \ldots\}$ système fondamental de voisinages de x. En considérant, si nécessaire, le système

$$\mathcal{B}' = \{B_1^0\,,\, B_1^0 \cap B_2^0\,,\, B_1^0 \cap B_2^0 \cap B_3^0\,,\, \ldots\},$$

on peut supposer, sans perte de généralité, que $B_{n+1} \subseteq B_n$, $\forall n$.
(Notons que $\mathcal{B}'$ est de nouveau un système fondamental de voisinages)
Soit $x \in \overline{A}$. Comme B_n est un voisinage de x, on a : $B_n \cap A \neq \emptyset$.

$\Rightarrow\ \exists\, a_n \in B_n \cap A \Rightarrow a_n \to x$, car: si $B_{n+1} \subseteq B_n$, on obtient:
$\forall U \in \mathcal{U}(x) \underset{\text{base}}{\Longrightarrow} \exists\, B_{n_0} \subseteq U \Rightarrow a_n \in B_{n_0} \quad \forall\, n \geq n_0$.
" $\Leftarrow$ " déjà vu (prop. 3.1).

(2) " $\Rightarrow$ " x val. d'adhérence de $(x_n) \Longrightarrow\ \forall\, U \in \mathcal{U}(x)\,,\, \forall\, n \in \mathbb{N},\, \exists\, m \in \mathbb{N} \quad m \geq n\ :\ x_m \in U$.
X $\boxed{A1} \Rightarrow \exists$ base dénombrable $\{B_1\,,\, B_2\,,\ldots\}$ de $\mathcal{U}(x)$, $B_{j+1} \subseteq B_j$

$$n = 1\ :\ U \leftrightarrow B_1\ :\ \exists\, m_1 \in \mathbb{N}\ \ t.q.\ \ x_{m_1} \in B_1$$

$n = m_1 + 1\ :\ U \leftrightarrow B_2\ :\ \exists\, m_2 \in \mathbb{N},\ m_2 \geq m_1 + 1\ \ t.q.\ \ x_{m_2} \in B_2$

$\vdots$

$n = m_k + 1\ :\ U \leftrightarrow B_{k+1}\ :\ \exists\, m_{k+1} \in \mathbb{N},\ m_{k+1} \geq m_k + 1\ \ t.q.\ \ x_{m_{k+1}} \in B_{k+1}$

$\Rightarrow$ (x_{m_k}) sous-suite de (x_n) (car (m_k) strictement $\nearrow$ en k). Montrons que $x_{m_k} \to x$.
Soit $U \in \mathcal{U}(x) \Rightarrow \exists\, k_0\,,\, x \in B_{k_0} \subseteq U$

$$\forall\, k \geq k_0\ :\ x_{m_k} \in B_k \underset{(\nearrow)}{\subseteq} B_{k_0} \subseteq U$$

" $\Leftarrow$ " Supposons qu'il existe une sous-suite (x_{x_k}) de (x_n) *t.q.*
$\lim\limits_{k} x_{n_k} = x$. Montrons que x est une val. d'adhérence de (x_n).

Soit $U \in \mathcal{U}(x) \Rightarrow$ presque tous les x_{n_k} se trouvent dans U, en particulier un nombre infini d'éléments de la suite $(x_n) \overset{\text{déf.val.}}{\underset{\text{adh.}}{\Longrightarrow}}$ x val. d'adhérence de (x_n). $\square$

Corollaire 3.3 *Les assertions de 3.2 sont vraies dans les espaces métriques.*

Démonstration (X,d) esp. métrique $\Rightarrow X \boxed{A1}$. $\square$

B - Suites généralisées

Définition 3.4
$I \neq \emptyset$ (ens. d'indices). I est *filtrant* s'il existe une relation notée " $\leq$ " sur I *t.q.*

i) $\alpha \leq \alpha$ (réflexive)
ii) $\alpha \leq \beta\,,\, \beta \leq \gamma \Rightarrow \alpha \leq \gamma$ (transitive)
iii) $\forall\, \alpha\,,\, \beta \in I\,,\, \exists\, \gamma \in I$ *t.q.* $\alpha \leq \gamma\,,\, \beta \leq \gamma$.

(**Notation** $\alpha \leq \beta \Longleftrightarrow \beta \geq \alpha$) On dit que " $\leq$ " est une *direction.*

Remarque si on a une relation d'ordre total, alors iii) toujours vérifié.

- Exemple

- $(\mathbb{N}, \leq)$ ens. filtrant : $n \leq m$ (ordre naturel)
- $(\mathbb{R}^n\,, \leq)$ ens. filtrant si $x \leq y \Longleftrightarrow x_i \leq y_i \quad (i = 1 \ldots n), \quad x = (x_1, \ldots, x_n)$
- $X \neq \emptyset$, $(P(X)\,, \leq)$ ens filtrant si $A \leq B \Longleftrightarrow A \subseteq B \quad (\gamma = A \cup B$ pour iii).)
- $(X\,, \mathcal{T})$ espace topologique, $x \in X$, $(\mathcal{U}(x)\,, \leq)$ ens filtrant si $U \leq V \Longleftrightarrow V \subseteq U$ $(\gamma = U \cap V$ pour iii).)
- $[a,b] \subseteq \mathbb{R}, \quad \mathcal{Z} = \big\{Z = (x_0, x_1, \ldots, x_n\,;\, \xi_0, \ldots, \xi_{n-1})$ *t.q.* $a = x_0 < x_1 \ldots < x_n = b, \quad \xi_i \in [x_i\,,\, x_{i+1}], \quad i = 0\,, \ldots, n-1\big\}$
  $(\mathcal{Z}\,, \leq)$ ens. filtrant pour $Z_1 \leq Z_2 \Longleftrightarrow Z_2$ plus fine que Z_1 i.e. pour $|Z| := \max\limits_{j=0,\ldots,n-1}$ $|x_{j+1} - x_j|$ on a: $|Z_2| \leq |Z_1|$

Définition 3.5

1) $(X, \mathcal{T})$ esp. top., I ens. filtrant. Chaque appl. $I \to X$, $\alpha \mapsto x_\alpha$ s'appelle *suite généralisée* (sg) (ou suite de Moore-Smith). Notation $(x_\alpha)_{\alpha \in I} \in X^I$
2) Suite généralisée $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ converge vers $x \in X$ si

$$\forall\, U \in \mathcal{U}\,(x)\,,\, \exists\, \alpha_0 \in I\; (\alpha_0 = \alpha_0\,(U)) \;\; t.q.$$

$$\forall \alpha \in I:\; \alpha \geq \alpha_0 \Rightarrow x_\alpha \in U\,.$$

Notation $\lim\limits_{\alpha}\, x_\alpha = x$

3) $x \in X$ s'appelle val. d'adhérence de $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ si

$$\forall U \in \mathcal{U}(x) \, \forall \alpha \in I \,, \exists \beta \geq \alpha \, (\beta \in I) \;\; t.q. \;\; x_\beta \in U \,.$$

- Exemple

- si $I = \mathbb{N}$ est muni avec l'ordre naturel, on obtient la notion de suite.
- si $I =]-\infty \,, x_0[$ est muni avec l'ordre naturel, alors on obtient la notion de limite à gauche de fonctions: $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = A$.
- $f \,:\, [a,b] \to \mathbb{R}$ bornée

$$Z \in \mathcal{Z} \,,\, F_Z = \sum_{j=0}^{n-1} f\left(\xi_j\right) \left(x_{j+1} - x_j\right) \quad \text{(somme de Riemann)}$$

$$(F_Z)_{Z \in \mathcal{Z}} \quad \text{suite généralisée} \quad (\in \mathbb{R}^{\mathcal{Z}})$$

$\lim\limits_{Z} F_Z$ existe $\Longleftrightarrow f \in R\,[a,b]$ (fonctions intég. au sens de Riemann) et $\lim\limits_{Z} F_Z = \int_a^b f(x)\, dx$.

Théorème 3.4

$(X, \mathcal{T})$ esp. top., $A \subseteq X$. Alors $x \in \overline{A} \Longleftrightarrow \exists$ suite généralisée $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$, $x_\alpha \in A$ t.q. $\lim\limits_{\alpha} x_\alpha = x$.

Démonstration

" $\Rightarrow$ " : $x \in \overline{A} \Longrightarrow \forall U \in \mathcal{U}(x) \,, U \cap A \neq \emptyset$

Posons $I = (\mathcal{U}(x) \,, \leq)$ (voir exemple)

$$\forall \, \underline{U} \in I \,, \exists x_{\underline{U}} \in U \cap A$$

$\overset{\text{axiome du choix}}{\Longrightarrow} \;\; (x_{\underline{U}})_{\underline{U} \in I} \in X^I$ suite généralisée.

Montrons que $\lim\limits_{\underline{U}} x_{\underline{U}} = x$.

Soit $U \in \mathcal{U}(x)$, $\forall \; V \subseteq U, \; V \in \mathcal{U}(x)$ on a

$$x_{\underline{V}} \in V \cap A \subseteq V \subseteq U$$

donc $\forall \; \underline{V} \geq \underline{U}$ on a $x_{\underline{V}} \in U$ *i.e.* $x_{\underline{U}} \to x$

" $\Leftarrow$ " $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$, $x_\alpha \in A$, $\lim\limits_{\alpha} x_\alpha = x$

$$\Rightarrow \;\; \forall \; U \in \mathcal{U}(x) \quad \exists \alpha_0 \in I \;\; t.q. \;\; \alpha \geq \alpha_0 \Rightarrow x_\alpha \in U$$

En particulier $x_{\alpha_0} \in U \cap A$

$\overset{\text{déf.}}{\underset{}{\overset{\text{pt ad.}}{\Longrightarrow}}} \; x \in \overline{A}$ $\square$

Théorème 3.5
$(X, \mathcal{T})$ esp. top., $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ suite généralisée dans X. Pour $\beta \in I$, soit

$$E_\beta = \{x_\alpha \,,\, \alpha \geq \beta\}$$

Alors x val. d'adhérence de $(x_\alpha)_{\alpha\in I} \Longleftrightarrow x \in \bigcap\limits_{\beta\in I} \overline{E}_\beta$

Démonstration

« $\Rightarrow$ » : x val. d'adhérence de $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$. Soit $\beta \in I$, $U \in \mathcal{U}(x)$

$$\overset{\text{déf.}}{\overset{\text{pt ad.}}{\Longrightarrow}} \; \forall\, \alpha \in I \,,\, \exists\, \gamma_\alpha \in I \,,\, \gamma_\alpha \geq \alpha \;\; t.q. \;\; x_{\gamma_\alpha} \in U$$

Cela est vrai en particulier pour $\alpha = \beta$; donc

$$\forall\, U \in \mathcal{U}(x) \,,\, \exists\, x_{\gamma_\beta} \in U \cap E_\beta \Rightarrow x \in \overline{E}_\beta$$

« $\Leftarrow$ » Soit $x \in \bigcap\limits_{\beta\in I} \overline{E}_\beta$, $U \in \mathcal{U}(x)$, $\alpha \in I \Rightarrow x \in \overline{E}_\alpha$

$$\overset{\text{déf. } \overline{A}}{\Longrightarrow} \; U \cap E_\alpha \neq \emptyset \; \overset{\text{déf. } E_\alpha}{\Longrightarrow} \; \exists\, \beta \geq \alpha \;\; t.q. \;\; x_\beta \in E_\alpha \cap U \subseteq U$$

$\Rightarrow$ x val. d'adhérence de $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ $\square$

Remarque: $\bigcap\limits_{\alpha\in I} \overline{E}_\alpha$ peut-être vide.

Théorème 3.6 *(unicité de la limite)*
$(X, \mathcal{T})$ séparé $(T2) \Longleftrightarrow$ chaque suite généralisée possède au plus une limite.

Démonstration

« $\Rightarrow$ » $\lim x_\alpha = x$, $\lim x_\alpha = y$, $x \neq y$,

$$T2 \Rightarrow \exists\, U \in \mathcal{U}(x) \,,\, \exists\, V \in \mathcal{U}\,(y) \,,\, U \cap V = \emptyset$$

déf. lim $\Rightarrow \exists\, \alpha_0 \;:\; \forall\, \alpha \geq \alpha_0 \,,\, x_\alpha \in U$

$\exists\, \alpha_1 \;:\; \forall\, \alpha \geq \alpha_1 \,,\, x_\alpha \in V$

I ens. filtrant $\Longrightarrow \exists\, \alpha_2 \geq \alpha_0 \,,\, \alpha_2 \geq \alpha_1$ *tq* $\forall\, \alpha \geq \alpha_2 \,:\; x_\alpha \in U \cap V = \emptyset$; contradiction.

" $\Leftarrow$ " Supposons l'unicité de la limite. Supposons X pas séparé. Alors
$\Rightarrow \exists\, x \neq y \in X$, *tq* $\forall\, U \in \mathcal{U}(x)$, $\forall\, V \in \mathcal{V}\,(y)$, on a $U \cap V \neq \emptyset$.

Pour I on choisit $I = \mathcal{U}(x) \times \mathcal{U}(y)$. Alors $(I, \leq)$ ens. filtrant pour $(\underline{U}, \underline{V}) \leq (\underline{U}', \underline{V}') \Longleftrightarrow U \supseteq U', V \supseteq V'$.
Pour $(\underline{U}, \underline{V}) \in I$, soit $x_{(\underline{U}, \underline{V})}$ un élément fixé de $U \cap V$.
Montrons que $\lim x_{(\underline{U}, \underline{V})} = x$ et $\lim x_{(\underline{U}, \underline{V})} = y$

- $U \subseteq \mathcal{U}(x)$, $\underline{U}_0 := \underline{U}$, $\underline{V}_0 := \underline{X}$

$$(\underline{U}', \underline{V}') \geq (\underline{U}_0, \underline{V}_0) \Rightarrow U' \subseteq U_0, V' \subseteq V_0$$
$$\text{et} \quad x_{(\underline{U}', \underline{V}')} \in U' \cap V' \subseteq U_0 \cap V_0 \subseteq U_0 = U$$

$\Rightarrow \lim x_{(\underline{U}, \underline{V})} = x$; de même pour y. □

Définition 3.6

1) Une suite généralisée $(y_\beta)_{\beta \in J} \in X^J$ s'appelle *sous-suite généralisée (ssg)* d'une suite généralisée $(x_\alpha)_{\alpha \in I} \in X^I$, s'il $\exists$ une application $\varphi : J \to I$ avec
   i) $y_\beta = x_{\varphi(B)} \quad \forall \beta \in J$
   ii) $\forall \alpha \in I, \exists \beta \in J$ *t.q.* $\forall \beta' \in J$ on a: $\beta' \geq \beta \Longrightarrow \varphi(\beta') \geq \alpha$.
2) Un sous-ensemble I_0 de I, où I ens. filtrant s'appelle *cofinal* si

$$\forall \alpha \in I, \exists \alpha' \in I_0 \;\; t.q. \;\; \alpha' \geq \alpha .$$

La restriction d'une suite généralisée $(x_\alpha)_{\alpha \in I} \in X^I$ à un sous-ensemble cofinal I_0 de I s'appelle sous-suite généralisée cofinale.

Remarque • Une sous-suite généralisée cofinale est une sous-suite généralisée. En effet Soit $I_0 \subseteq I$ cofinal . Posons $J := I_0$ et soit $\varphi : I_0 \to I$, $\beta \mapsto \beta$ l'identité (immergement).

1) Soit $y_\beta = x_{\varphi(\beta)}$
2) $\alpha \in I \overset{\text{cof}}{\Longrightarrow} [\exists \beta \in I_0 \;\; t.q. \;\; \beta \geq \alpha]$. Soit , $\beta' \in I_0, \beta' \geq \beta$
   $\Rightarrow \beta' \geq \alpha$; donc $\varphi(\beta') \geq \alpha$.

- La récriproque n'est pas vraie.

- Exemple $I = \mathbb{N}$, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X^I$ (suite généralisée).
$J = \mathbb{Z}$, $(y_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in X^J$ définie par:

$$y_k = \begin{cases} x_0 \text{ si } k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} \\ x_k \text{ si } k \in \mathbb{N} . \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $(y_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ sous-suite généralisée de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, mais pas de sous-suite généralisée cofinale de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Théorème 3.8

$(X,\mathcal{T})$ esp. top., $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ suite généralisée $\in X^I$. Alors $x \in X$ est val. d'adhérence de $(x_\alpha)_{\alpha\in I} \Longleftrightarrow \exists$ sous-suite généralisée $(y_\beta)_{\beta\in J}$ de $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ t.q. $\lim\limits_{\beta} y_\beta = x$

Démonstration

" $\Leftarrow$ " • Supposons que x n'est pas une val. d'adhérence de $(x_\alpha)_{\alpha\in I} \Rightarrow \exists U \in \mathcal{U}(x)$,

$$\exists \alpha_0 \in I \ : \ \alpha \geq \alpha_0 \Rightarrow x_\alpha \notin U \qquad (i)$$

- Comme $\lim\limits_{\beta} y_\beta = x$, il existe pour cet U un $\beta_0 \in J$ *t.q.* $\forall \beta \geq \beta_0$ on a $y_\beta \in U$ $\qquad (ii)$
- La 2ème propriété dans la définition d'une sous-suite généralisée nous donne: Pour α_0, $\exists \beta_0' \in J$ *t.q.* $[\forall \beta \in J,\ \beta \geq \beta_0' \Rightarrow \varphi(\beta) \geq \alpha_0]$ $\qquad (iii)$
- La 1ère propriété dans la définition d'une sous-suite généralisée donne :

$$y_\beta = x_{\varphi(\beta)} \qquad (iv)$$

- J filtrant $\Rightarrow \exists \beta_0'' \in J$ *t.q.* $\beta_0'' \geq \beta_0$ et $\beta_0'' \geq \beta_0'$. Donc d'après (ii) et (iv) $y_{\beta_0''} \in U$ et $y_{\beta_0''} \underset{(iv)}{=} x_{\varphi(\beta_0'')}$.
Ainsi on a trouvé un indice $\varphi(\beta_0'') \geq \alpha_0$ tq $x_{\varphi(\beta_0'')} \in U$. Contradiction à (i).
" $\Rightarrow$ " Soit x val. d'adhérence de $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$.
Posons $J = \{(\alpha, \underline{U}) \ : \ \alpha \in I, U \in \mathcal{U}(x), x_\alpha \in U\} \subseteq I \times \mathcal{U}(x)$

- Soit $(\alpha, \underline{U}) \leq (\alpha', \underline{U'}) \Longleftrightarrow \alpha \underset{I}{\leq} \alpha'$ et $U' \subseteq U$

  $\Rightarrow$ $(J, \leq)$ ensemble filtrant car :

  1) $(\alpha, \underline{U}) \leq (\alpha, \underline{U})$
  2) $\left.\begin{array}{l}(\alpha, \underline{U}) \leq (\alpha', \underline{U'})\\ (\alpha', \underline{U'}) \leq (\alpha'', \underline{U''})\end{array}\right\} \Rightarrow (\alpha, \underline{U}) \leq (\alpha'', \underline{U''})$
     car vrai pour I et $\mathcal{U}(x)$.
  3) Soient $(\alpha, \underline{U})$, $(\alpha', \underline{U'})$ donnés.

Posons $(\beta, \underline{V}) = (\beta, \underline{U \cap U'})$, où $\beta \in I$ est choisi comme suit: pour

$$\alpha, \alpha' \in I \quad \exists \beta_0 \in I \ \textit{ t.q. } \ \beta_0 \geq \alpha, \beta_0 \geq \alpha'$$

Comme $U \cap U' \in \mathcal{U}(x)$, on obtient:
x val. d'adhérence de $(x_\alpha)_{\alpha\in I} \Rightarrow \exists \beta \geq \beta_0$ *t.q.* $x_\beta \in U \cap U'$.

$\Rightarrow$ $(\beta, \underline{V}) \geq (\alpha, \underline{U})$ et $(\beta, \underline{V}) \geq (\alpha', \underline{U'})$

- Soit $(y_{(\alpha,\underline{U})})_{(\alpha,\underline{U})\in J}$ définie par $y_{(\alpha,\underline{U})} := x_\alpha$

Posons $\varphi(\alpha, \underline{U}) = \alpha \Rightarrow \varphi \ : \ J \to I$ satisfait

i) $y_{(\alpha,\underline{U})} = x_\alpha = x_{\varphi\,(\alpha,\underline{U})}$

ii) Soit $\alpha \in I$ et $U \in \mathcal{U}(x)$ tq $\quad x_\alpha \in U$.

Posons $\beta = (\alpha, \underline{U})$. Alors $\beta \in J$ et

$(\alpha' \,, \underline{U}') \underset{J}{\geq} \beta \Rightarrow \alpha' \geq \alpha \Rightarrow \varphi\,(\alpha' \,, \underline{U}') = \alpha' \geq \alpha$

$\Rightarrow \quad (y_{(\alpha,\underline{U})})_{(\alpha,\underline{U})\in J}$ sous-suite généralisée de $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$.

- Montrons qu'elle converge vers x.

Soit $U_0 \in \mathcal{U}(x)$. $\quad x$ val. d'adhérence de $(x_\alpha)_{\alpha\in I} \Longrightarrow$

$$\exists\, \alpha_0 \in I \quad t.q. \quad x_{\alpha_0} \in U_0 \overset{\text{déf } J}{\Longrightarrow} (\alpha_0 \,, \underline{U}_0) \in J.$$

Pour $(\alpha, \underline{U}) \geq (\alpha_0 \,, \underline{U}_0)$ on a: $\alpha \geq \alpha_0$ et $U \subseteq U_0$

$\Rightarrow y_{(\alpha,\underline{U})} = x_\alpha \in U \subseteq U_0\,.$ $\square$

C - Filtres

Définition 3.7

$X \neq \emptyset\,,\, \emptyset \neq \mathcal{F} \subseteq P(X)\,.\ \mathcal{F}$ *filtre* si :

F1 : $\emptyset \notin \mathcal{F}$

F2 : $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$

F3 : $A \subseteq B \subseteq X\,,\, A \in \mathcal{F} \Rightarrow B \in \mathcal{F}\,.$

- Exemple $\quad (X, \mathcal{T})$ espace topologique $\Rightarrow \mathcal{U}(x)$ filtre sur X, appelé filtre des voisinages de x.

Définition 3.8

$(X, \mathcal{T})$ esp. top., $\mathcal{F}$ *filtre* sur X. $\mathcal{F}$ *converge* vers $x \in X$ si $\mathcal{U}(x) \subseteq \mathcal{F}$.

Notation $\quad \lim \mathcal{F} = x$

- Relation entre filtres et suites généralisées

$*$ $(x_\alpha)_{\alpha\in I} \in X^I$ suite généralisée

$$\mathcal{F} := \{F \subseteq X \,,\, \exists\, \alpha_0 \in I \text{ avec } : \alpha \geq \alpha_0 \Rightarrow x_\alpha \in F\},$$

alors $\mathcal{F}$ filtre sur X (c'est le filtre de Fréchet associé à $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$).

Notation: $\quad \mathcal{F} = \mathcal{F}\,(x_\alpha)\,.$

Démonstration

- $\mathcal{F} \neq \emptyset$ car $X \in \mathcal{F}$; $\ F \in \mathcal{F} \overset{\text{déf}}{\Longrightarrow} F \neq \emptyset$
- $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow \begin{cases} \exists\, \alpha_0 \in I \quad t.q. \quad \alpha \geq \alpha_0 \Rightarrow x_\alpha \in A \\ \exists\, \beta_0 \in I \quad t.q. \quad \beta \geq \beta_0 \Rightarrow x_\beta \in B \end{cases}$

I filtrant $\Rightarrow \exists\, \gamma_0 \in I$ *t.q.* $\alpha_0 \leq \gamma_0$ et $\beta_0 \leq \gamma_0$. Alors $\forall\, \gamma \geq \gamma_0$, on a $x_\gamma \in A \cap B$. Ainsi $A \cap B \in \mathcal{F}$.

- clair

$*$ Réciproquement :

Soit $(X, \mathcal{T})$ espace topologique et $\mathcal{F}$ filtre sur X.
On définit $J = \{(a, F)\,,\, F \in \mathcal{F}\,,\, a \in F\}$

$$(J\,,\,\leq) \text{ filtrant pour } (a, F) \leq (b, G) \iff F \supseteq G$$

alors $x_{(a,F)} := a \in X$ définit une suite généralisée sur X.
On a $\mathcal{F}\,(x_{(a,F)}) = \mathcal{F}$ (*exo*).

Proposition 3.9

1) $(X, \mathcal{T})$ *esp. top.*, $x \in X$. *Alors* $(x_\alpha)_{\alpha \in I} \in X^I$ *converge vers* $x \iff$ *le filtre de Fréchet associé* $\mathcal{F}(x_\alpha)$ *converge vers* x.
2) $(X, \mathcal{T})$ *esp. top.*, $\mathcal{F} \subseteq P(X)$ *filtre,* $x \in X$. *Alors* $\mathcal{F}$ *converge vers* $x \iff (x_\alpha)_{\alpha \in I}$ *déf par* $I = \{(a, F)\,,\, F \in \mathcal{F}\,,\, a \in F\}$, « $\leq$ » *ci-dessus,* $x_{(a,F)} := a$ *converge vers* x.

Démonstration

1) $(x_\alpha)_{\alpha \in I} \to x$; à dém : $\mathcal{U}(x) \subseteq \mathcal{F}\,(x_\alpha)$.
En effet : $U \in \mathcal{U}(x) \Rightarrow \Big[\exists\, \alpha_0 \in I \,:\, \alpha \geq \alpha_0 \Rightarrow x_\alpha \in U\Big]$
$\overset{\text{déf.}}{\Longrightarrow}\; U \in \mathcal{F}\,(x_\alpha)$.

Réciproquement : $\lim\, \mathcal{F}(x_\alpha) = x \overset{\text{déf.}}{\Longrightarrow} \mathcal{U}(x) \subseteq \mathcal{F}\,(x_\alpha)$

Soit $U \in \mathcal{U}(x) \Rightarrow U \in \mathcal{F}\,(x_\alpha) \overset{\text{déf.}}{\Longrightarrow} [\exists\, \alpha_0 \in I \,:\, \alpha \geq \alpha_0 \Rightarrow x_\alpha \in U] \Rightarrow \lim x_\alpha = x$ $\square$

2) exo.

Définition 3.9
$X \neq \emptyset\,,\, \mathcal{F} \subseteq P(X)$ filtre sur X. $\emptyset \neq \mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$ s'appelle *base du filtre* si $\forall\, F \in \mathcal{F}\,,\, \exists\, B \in \mathcal{B}$ *t.q.* $B \subseteq F$.

Proposition 3.10
$X \neq \emptyset\,,\, \mathcal{B} \subseteq P(X)$ *est base d'un filtre* $\mathcal{F}$ *sur* X *si seulement et si*

B1 : $\emptyset \notin \mathcal{B}\,,\, \mathcal{B} \neq \emptyset$
B2 : $\forall\, A, B \in \mathcal{B}\,,\, \exists\, C \in \mathcal{B} \,:\, C \subseteq A \cap B$

$\mathcal{F}$ *est alors déterminé de façon unique par* $\mathcal{B}$
Notation: $\mathcal{F} = \mathcal{F}\,(\mathcal{B})$.

Démonstration

« $\Rightarrow$ » : • $\emptyset \notin \mathcal{B}$ car $\emptyset \notin \mathcal{F}$ et $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$.

$\mathcal{B} \neq \emptyset$ clair $\quad \Rightarrow B1$

• $A, B \in \mathcal{B} \subseteq \mathcal{F} \stackrel{F2}{\Longrightarrow} A \cap B \in \mathcal{F}$

$\stackrel{\substack{\text{déf.}\\ \text{base}}}{\Longrightarrow} \quad \exists\, C \in \mathcal{B}\,,\; C \subseteq A \cap B \Rightarrow B2$

« $\Rightarrow$ » : $\mathcal{B} \subseteq P(X)$ satisfaisant $B1$ et $B2$.

Posons $\mathcal{F} = \{F \subseteq X \,:\, \exists\, B \in \mathcal{B} \;\; t.q. \;\; F \supseteq B\}$

$\Rightarrow \mathcal{F}$ filtre car :

• $\mathcal{F} \neq \emptyset$ car $X \in \mathcal{F}$, $\emptyset \notin \mathcal{F}$ car $\emptyset \notin \mathcal{B}$.

• $F_1\,,\, F_2 \in \mathcal{F} \stackrel{\text{déf. } \mathcal{F}}{\Longrightarrow} \exists\, B_1, B_2 \in \mathcal{B}\,,\; B_j \subseteq F_j$

$\Rightarrow B_1 \cap B_2 \subseteq F_1 \cap F_2$

$$B2 \Rightarrow \exists\, C \in \mathcal{B} \;\; t.q. \;\; C \subseteq B_1 \cap B_2$$

$\Rightarrow C \subseteq F_1 \cap F_2 \stackrel{\text{déf. } \mathcal{F}}{\Longrightarrow} F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$

• $F \in \mathcal{F}\,,\; \widetilde{F} \supseteq F \stackrel{\text{déf. } \mathcal{F}}{\Longrightarrow} \widetilde{F} \in \mathcal{F}$.

$\mathcal{B}$ base de $\mathcal{F}$: clair

unicité: clair.

Remarque Pas tous les systèmes $\mathcal{B} \subseteq P(X)$ déterminent un filtre.

Proposition 3.11
$X, Y \neq \emptyset$, $\quad f \,:\, X \to Y$ appl., $\mathcal{B}$ base d'un filtre $\mathcal{F}$ sur X. Alors $f\,(\mathcal{B}) = \{f(B) \,:\, B \in \mathcal{B}\}$ est base d'un filtre sur Y

Démonstration
B1 : $f(\mathcal{B}) \neq \emptyset$ car $\mathcal{B} \neq \emptyset$. $B \in \mathcal{B} \underset{B_1}{\Longrightarrow} B \neq \emptyset \Longrightarrow f(B) \neq \emptyset \Longrightarrow \emptyset \notin f(\mathcal{B})$.

B2 : $C_1\,,\, C_2 \in f\,(\mathcal{B}) \Rightarrow \exists\, B_1\,,\, B_2 \in \mathcal{B} \;\; tq \;\; f(B_j) = C_j$

$\Rightarrow f(B_1) \cap f(B_2) \supseteq f(B_1 \cap B_2) \underset{(\mathcal{B} \text{ base})}{\supseteq} f(B)$ où $B \in \mathcal{B} \;\; tq \;\; B \subseteq B_1 \cap B_2$

$\Rightarrow C_1 \cap C_2 \supseteq \underset{\substack{\uparrow \\ \in f(\mathcal{B})}}{f(B)}$; donc $B2$. $\square$

Définition 3.10 X esp. top., $\mathcal{F}$ filtre sur X, $\mathcal{B}$ base de $\mathcal{F}$. Alors $\mathcal{B}$ converge vers $x \in X$ si $\mathcal{F}\,(\mathcal{B})(= \mathcal{F})$ converge vers x.
(notation : $\lim \mathcal{B} = x$)

Corollaire 3.12 *$\mathcal{B}$ base d'un filtre sur X. Alors $\lim \mathcal{B} = x \Longleftrightarrow \forall\, U \in \mathcal{U}(x)\,,\; \exists\, B \in \mathcal{B}\,,\; B \subseteq U$.*

Notons que ce B ne contient pas x en général.

Exemple 3.13
Soit X esp. top., $(x_\alpha) \in X^I$ une suite généralisée. Soit $S_\beta = \{x_\alpha : \alpha \geq \beta\}$ et $\mathcal{B} = \{S_\beta : \beta \in I\}$. Alors $\mathcal{B}$ est une base du filtre de Fréchet $\mathcal{F}(x_\alpha)$ associé à (x_α) et $x_\alpha \to x \Longleftrightarrow \lim \mathcal{B} = x$.

IV - FONCTIONS CONTINUES

Définition 4.1
$(X, \mathcal{T}_1)$, $(Y, \mathcal{T}_2)$ espaces topologiques. $f : X \to Y$ s'appelle *$(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$-continue* en $x \in X$ si et seulement si $\forall\, V \in \mathcal{U}(f(x)) \quad \exists\, U \in \mathcal{U}(x) \;\; t.q. \;\; f(U) \subseteq V$.

$f : X \to Y$ est *continue* (sur X), si f est continue en chaque point de X. Not.: $f \in C(X, Y)$.

Remarque f continue en $x \Longleftrightarrow$ l'image réciproque d'un voisinage de $f(x)$ est un voisinage de x.

- Exemple

- $id : (X, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{T})$ continue,
- $f : (X, \mathcal{T}_1) \to (Y, \mathcal{T}_2)$, $f \equiv const.$ continue.

Remarques

1) $(X, \mathcal{T}_1)$, $(Y, \mathcal{T}_2)$, $\quad f : X \to Y$, $x \in X$. Supposons que f soit $(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$-continue, alors f est $(\widetilde{\mathcal{T}}_1, \mathcal{T}_2)$-continue $\quad \forall\, \widetilde{\mathcal{T}}_1 \supseteq \mathcal{T}_1$.
De même f est $(\mathcal{T}_1, \widetilde{\mathcal{T}}_2)$-continue $\quad \forall\, \widetilde{\mathcal{T}}_2 \subseteq \mathcal{T}_2$.
En particulier : chaque appl. $f : (X, P(X)) \to (Y, \mathcal{T})$ est continue en tout point de X.
De même $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \{\emptyset, Y\})$
2) $f : X \to Y$, $\quad g : Y \to Z$, $\quad f$ continue en x, g continue en $f(x) \;\Rightarrow g \circ f$ continue en x.
3) $(X, \mathcal{T}_1)$, $(Y, \mathcal{T}_2)$, $\quad S \subseteq X$, $\quad f : X \to Y \quad (\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$ continue en $x \in S \Rightarrow f|_S : S \to Y$ est $(\mathcal{T}_1|_S, \mathcal{T}_2)$ continue en x.
De même $Q \subseteq Y$, $\quad f : X \to Y$, $f(X) \subseteq Q$, $f \;\; (\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$-continue en $x \Rightarrow f$ est $(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2|_Q)$-continue en x.

Proposition 4.1
$(X, \mathcal{T}_1)$, $(Y, \mathcal{T}_2)$ esp. top., $f : X \to Y$. Alors sont équivalentes :

(1) f continue (en tout point de X)
(2) $\forall\, A \subseteq X : f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$
(3) les images réciproques des fermés dans Y sont des fermés dans X
(4) les images réciproques des ouverts dans Y sont des ouverts dans X
(5) $\forall\, B \subseteq Y : f^{-1}(B^0) \subseteq (f^{-1}(B))^0$

Démonstration

- (1) $\Rightarrow$ (2) : $y \in f(\overline{A}) \Rightarrow \exists\, x \in \overline{A} \;\; t.q. \;\; f(x) = y$

$$\overset{f\in C(X,Y)}{\Longrightarrow} \;\; \forall V \in \mathcal{U}(y), \exists U \in \mathcal{U}(x) \;\; t.q. \;\; f(U) \subseteq V.$$

déf $\overline{A} \Longrightarrow U \cap A \neq \emptyset$.

$$f(U \cap A) \subseteq f(U) \cap f(A) \Longrightarrow \;\; \emptyset \neq f(U \cap A) \subseteq V \cap f(A) \Rightarrow y \in \overline{f(A)}$$

- (2) $\Rightarrow$ (3) : E fermé dans Y. $H := f^{-1}(E)$

$$\Longrightarrow f(H) = f(f^{-1}(E)) \subseteq E \overset{(2)}{\Longrightarrow} f(\overline{H}) \subseteq \overline{f(H)} \subseteq \overline{E} = E$$

$$\Longrightarrow \overline{H} \subseteq f^{-1}(f(\overline{H})) \subseteq f^{-1}(E) = H$$

$$\Longrightarrow H \text{ fermé}$$

- (3) $\Rightarrow$ (4) : $O \subseteq Y$ ouvert $G = f^{-1}(O) \Rightarrow G^c = [f^{-1}(O)]^c = f^{-1}(\underbrace{\quad O^c \quad}_{\text{fermé dans Y}})$ fermé dans X d'après (3) $\Rightarrow G$ ouvert.

- (4) $\Rightarrow$ (5) : $B \subseteq Y \overset{(4)}{\Rightarrow} f^{-1}(B^0)$ ouvert

$$f^{-1}(B^0) \subseteq f^{-1}(B) \Rightarrow f^{-1}(B^0) \subseteq \underbrace{\left(f^{-1}(B)\right)^0}_{\text{le plus grand ouvert inclus dans } f^{-1}(B)}$$

- (5) $\Rightarrow$ (1) : $x \in X$. $V \in \mathcal{U}(f(x)) \Rightarrow \exists\, O \in \mathcal{T}_2 \;\; t.q.$

$$f(x) \in O \subseteq V \Rightarrow f(x) \in V^0 \text{ (car } O \text{ ouvert)}$$

$$\Longrightarrow x \in f^{-1}(V^0) \underset{(5)}{\subseteq} (f^{-1}(V))^0 := U$$

U ouvert dans X; donc $U \in \mathcal{U}(x)$ et $f(U) \subseteq f(f^{-1}(V))$ car $U = (f^{-1}(V))^0 \subseteq f^{-1}(V)$

$$f(U) \subseteq V \Rightarrow (1) \qquad \square$$

Théorème 4.2

X, Y espaces topologiques, $f : X \to Y$, $x_0 \in X$. Sont équivalentes:

(1) f *continue en* x_0

(2) $\underbrace{f(\mathcal{U}(x_0))}_{\text{base d'un filtre}}$ *converge vers* $f(x_0)$

(3) Si $\mathcal{B}$ *base d'un filtre, alors* $\left[\lim \mathcal{B} = x_0 \Rightarrow \lim \underbrace{f(\mathcal{B})}_{\text{base d'un filtre}} = f(x_0)\right]$

(4) Si $(x_\alpha)_{\alpha \in I} \in X^I$ *est une suite généralisée t.q.* $\lim\limits_{\alpha} x_\alpha = x_0$*, alors* $\lim\limits_{\alpha} f(x_\alpha) = f(x_0)$.

Démonstration

- (1) $\Rightarrow$ (2) : f continue en $x_0 \Rightarrow \forall\, V \in \mathcal{U}(f(x_0))\,,\, \exists\, U \in \mathcal{U}\,(x_0)\;\; t.q.\;\; f(U) \subseteq V \underset{3.12}{\Longrightarrow}$ (2)

- (2) $\Rightarrow$ (3) : à montrer $\forall\, V \in \mathcal{U}\,(f(x_0)) \Rightarrow \exists\, B \in \mathcal{B}\;\; t.q.\;\; f(B) \subseteq V$.

Soit $V \in \mathcal{U}\,(f(x_0)) \underset{3.12}{\overset{(2)}{\Rightarrow}} \exists\, U \in \mathcal{U}\,(x_0)\; :\; f(U) \subseteq V$

$$\lim \mathcal{B} = x_0 \Rightarrow \forall\, U \in \mathcal{U}\,(x_0) \qquad \exists\, B \in \mathcal{B}\; :\; \mathcal{B} \subseteq U$$

$\Longrightarrow\;\; f(B) \subseteq f(U) \subseteq V$.

- (3) $\Rightarrow$ (4) : Soit $(x_\alpha)_{\alpha\in I} \in X^I$, $x_\alpha \to x_0$

$\mathcal{B} = \{\{x_\alpha\; :\; \alpha \geq \alpha_0\}\,,\, \alpha_0 \in I\}$ base du filtre de Fréchet $\mathcal{F}(x_\alpha)$. De plus, $\lim\, \mathcal{B} = x_0$ car $\mathcal{F}(\mathcal{B}) \supseteq \mathcal{U}\,(x_0)$ (voir 3.13).

$\overset{(3)}{\Rightarrow} \lim f(\mathcal{B}) = f(x_0)$,

$\forall\, V \in \mathcal{U}\,(f(x_0))\,,\, \exists\, B \in \mathcal{B}\,,\, f(B) \subseteq V \Rightarrow \exists\, \alpha_0 \in I$, tel que $B = \{x_\alpha\; :\; \alpha \geq \alpha_0\}$ et $V \supseteq\; \{f(x_\alpha)\; :\; \alpha \geq \alpha_0\}$

$\Longrightarrow \lim\limits_{\alpha}\; f(x_\alpha) = f(x_0)$.

- (4) $\Rightarrow$ (1) : Supposons que f n'est pas continue en $x_0 \Rightarrow \exists\, V_0 \in \mathcal{U}\,(f(x_0))\;\; t.q.$ pour aucun $U \in \mathcal{U}\,(x_0)$ on ait $f(U) \subseteq V_0$.

$$ie \quad \exists\, V_0 \in \mathcal{U}\,(f(x_0))\;\; t.q.\;\; \forall\, U \in \mathcal{U}\,(x_0)\,,\, \exists\, a_U \in U\;\; t.q.\;\; f(a_u) \notin V_0\,.$$

Posons $J = \mathcal{U}\,(x_0)$. On sait que $(J, \leq)$ est filtrant pour $\underline{U} \leq \underline{U}' \iff U' \subseteq U$. Ainsi $(a_{\underline{U}})_{\underline{U}\in J}$ est une suite généralisée (axiome du choix!). Montrons que $\lim a_{\underline{U}} = x_0$. Soit $U_0 \in \mathcal{U}\,(x_0) \Rightarrow \underline{U}_0 \in J$. Soit $\underline{U} \geq \underline{U}_0$. Alors $a_{\underline{U}} \in U \subseteq U_0 \Rightarrow \lim a_{\underline{U}} = x_0$.

$\overset{(4)}{\Rightarrow}\;\; \lim f(a_{\underline{U}}) = f(x_0)$. Mais dans $V_0 \in \mathcal{U}\,(f(x_0))$ ne se trouvent pas d'éléments de la forme $f(a_u)$. Contradiction. $\square$

Proposition 4.3

$(X, \mathcal{T}_1)\,,\, (Y, \mathcal{T}_2)$ esp. top, $\mathcal{S}_2$ subbase de $\mathcal{T}_2$, $f\; :\; X \to Y$. Alors :

(1) f continue $\iff$ (2) $\;\forall\, S \in \mathcal{S}_2\,,\, f^{-1}(S) \in \mathcal{T}_1$

Démonstration

- (1) $\Rightarrow$ (2) : prop. 4.1 $\;\; \mathcal{S}_2 \subseteq \mathcal{T}_2$

- (2) $\Rightarrow$ (1) : $x_0 \in X$, $V \in \mathcal{U}\,(f(x_0))$.

les intersection finies d'éléments de $\mathcal{S}_2$ forment une base pour $\mathcal{T}_2$. i.e.

$$\exists\, B := S_1 \cap \ldots \cap S_n \quad (S_j \in \mathcal{S}_2)\;\; t.q.\;\; f(x_0) \in B \subseteq V$$

$$x_0 \in f^{-1}(B) = f^{-1}(S_1 \cap \ldots \cap\, S_n) = \underbrace{f^{-1}(S_1)}_{\in \mathcal{T}_1} \cap \ldots \cap \underbrace{f^{-1}(S_n)}_{\in \mathcal{T}_1}$$

$\Longrightarrow U := f^{-1}(B) \in \mathcal{T}_1 \Longrightarrow U \in \mathcal{U}(x_0)$..
De plus $f(U) = f(f^{-1}(B)) \subseteq B \subseteq V$

$\Longrightarrow f$ continue en x_0. $\square$

V - TOPOLOGIES INITIALES ET FINALES

Proposition 5.1 + définition
$X \neq \emptyset$, $(Y, \mathcal{T}_2)$ esp. top., $f : X \to Y$.
Alors $\mathcal{T} = \{f^{-1}(T) : T \in \mathcal{T}_2\}$ est la topologie la plus grossière sur X t.q. f soit continue. C'est la topologie initiale pour f.

Démonstration
-$\mathcal{T}$ topologie: clair
-f est $(\mathcal{T}, \mathcal{T}_2)$-continue: clair
-$\widetilde{\mathcal{T}}$ topologie sur X *t.q.* f soit $(\widetilde{\mathcal{T}}, \mathcal{T}_2)$-continue $\Longrightarrow$

$$\forall T \in \mathcal{T}_2 : f^{-1}(T) \in \widetilde{\mathcal{T}} \Rightarrow \mathcal{T} \subseteq \widetilde{\mathcal{T}} \qquad \square$$

Exemple $\emptyset \neq X_0 \subseteq X$, $i : X_0 \to X$ immergement (identité) $(X, \mathcal{T})$ esp. top.. Alors la topologie initiale sur X_0 pour i coïncide avec la topologie $\mathcal{T}|_{X_0}$ (topologie induite).

Proposition 5.2
$X \neq \emptyset$, $\{(X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda), \lambda \in \Lambda\}$ esp. top., $f_\lambda : X \to X_\lambda$.
Alors $\mathcal{S} = \{f_\lambda^{-1}(T_\lambda) : T_\lambda \in \mathcal{T}_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ est subbase de la topologie la plus grossière $\mathcal{T}$ sur X t.q. $\forall \lambda \in \Lambda$ f_λ soit $(\mathcal{T}, \mathcal{T}_\lambda)$ -continue. C'est la *topologie initiale* associée à la famille $\{f_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$, notée par ${}_i\mathcal{T}$.

Démonstration
- 2.4 $\Longrightarrow \mathcal{S}$ subbase d'une topologie sur X.
- f_λ est $(\mathcal{T}, \mathcal{T}_\lambda)$-continue (notons que $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$).
- Soit $\widetilde{\mathcal{T}}$ topologie sur X *t.q.* $\forall \lambda \in \Lambda$, f_λ soit $(\widetilde{\mathcal{T}}, \mathcal{T}_\lambda)$-continue

$$\Rightarrow \underbrace{f_\lambda^{-1}(T_\lambda)}_{\in \mathcal{S}} \in \widetilde{\mathcal{T}} \Rightarrow \mathcal{S} \subseteq \widetilde{\mathcal{T}} \Rightarrow \mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathcal{S}) \subseteq \widetilde{\mathcal{T}} \qquad \square$$

Proposition 5.3 + Définition
sous les hypothèses de 5.2: Soient
$f_\lambda : X \to X_\lambda$ $\lambda \in \Lambda$, $(X, {}_i\mathcal{T})$ muni de la topologie initiale ${}_i\mathcal{T}$ associée, $(Y, \mathcal{T})$ esp. top.,

$$\begin{array}{ccc} g : Y & \longrightarrow & X \\ & \searrow & \big\downarrow f_\lambda \\ f_\lambda \circ g & & X_\lambda \end{array}$$

Alors g est $(\mathcal{T}, {}_i\mathcal{T})$ continue si et seulement si $\forall\, \lambda \in \Lambda$, $f_\lambda \circ g \,:\, Y \to X_\lambda$ est $(\mathcal{T}, \mathcal{T}_\lambda)$ continue.

Démonstration

" $\Rightarrow$ " g continue $\underset{f_\lambda cont.}{\overset{(IV)}{\Longrightarrow}}$ $f_\lambda \circ g$ continue.

" $\Leftarrow$ " Supposons $\forall\,\lambda$ que $f_\lambda \circ g$ continue. Soit $S \in \mathcal{S}$. ($\mathcal{S}$ étant la subbase de ${}_i\mathcal{T}$ de 5.2).

$\Longrightarrow$ $S = f_\lambda^{-1}(T_\lambda)$ pour un $\lambda \in \Lambda$, $T_\lambda \in \mathcal{T}_\lambda$.

$\Longrightarrow$ $g^{-1}(S) = g^{-1}(f_\lambda^{-1}(T_j)) = (f_\lambda \circ g)^{-1}(T_\lambda)$ ouvert

$\overset{4.3}{\Longrightarrow}$ g continue $\square$

Proposition 5.4 + définition

Soient $(X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$, esp. top., $Y \neq \emptyset$, $f_\lambda : X_\lambda \to Y$.

Alors $\mathcal{T}_{fi} = \{T \subseteq Y \,:\, \forall\,\lambda \in \Lambda,\, f_\lambda^{-1}(T) \in \mathcal{T}_\lambda\}$ est la topologie la plus fine sur Y t.q. $\forall\,\lambda \in \Lambda$, f_λ soit $(\mathcal{T}_\lambda, \mathcal{T}_{fi})$-continue.

$\mathcal{T}_{fi}$ est la topologie finale pour (associée à, induite par) la famille $\{f_\lambda \,:\, \lambda \in \Lambda\}$.

Démonstration - Il est clair que $\mathcal{T}_{fi} = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \left\{T \subseteq Y \,:\, f_\lambda^{-1}(T) \in \mathcal{T}_\lambda\right\}$ est une topologie.

-Soit $\widetilde{\mathcal{T}}$ topologie sur Y *t.q.* $\forall\lambda$: f_λ soit $(\mathcal{T}_\lambda, \widetilde{\mathcal{T}})$- continue

$\Rightarrow \forall\, O \in \widetilde{\mathcal{T}}$, $f_\lambda^{-1}(O) \in \mathcal{T}_\lambda \Rightarrow O \in \mathcal{T}_{fi} \Rightarrow \widetilde{\mathcal{T}} \subseteq \mathcal{T}_{fi}$. $\square$

Proposition 5.5

(sous les hypothèses de 5.4). $(Z, \widetilde{\mathcal{T}})$

$$\begin{array}{ccc} X_\lambda & \xrightarrow{f_\lambda} & Y \\ & \searrow & \downarrow h \\ h \circ f_\lambda & & Z \end{array}$$

$(Y, \mathcal{T}_{fi})$ topologie finale pour $\{f_\lambda \,:\, \lambda \in \Lambda\}$
Alors h est $(\mathcal{T}_{fi}, \widetilde{\mathcal{T}})$ continue $\Longleftrightarrow$
$\forall\,\lambda \in \Lambda$, $h \circ f_\lambda$ est $(\mathcal{T}_\lambda, \widetilde{\mathcal{T}})$ – continue.

Démonstration

- exo -

Proposition 5.6

$(X, \mathcal{T}_1)$, $(Y, \mathcal{T}_2)$ esp. top., $f : X \to Y$ surjective.

Supposons que f soit continue et ouverte (ie $f(U)$ ouvert, $\forall\, U$ ouvert). Alors $\mathcal{T}_2$ coïncide avec la topologie finale pour f.

Démonstration

Soit $\mathcal{T}$ topologie sur Y *t.q.* f soit $(\mathcal{T}_1, \mathcal{T})$-continue $(*)$.

Soit $U \in \mathcal{T} \Rightarrow f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_1$. Or $U \underset{f \text{ surj.}}{=} \underbrace{f(\underbrace{f^{-1}(U)}_{\in\mathcal{T}_1})}_{\in\mathcal{T}_2 \text{ car } f \text{ ouverte}}$

$\Longrightarrow \mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_2$. Comme $\mathcal{T}_{fi}$ est la topologie la plus fine satisfaisant $(*)$, on voit que $\mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_{fi}$.

VI - ESPACES PRODUITS - ESPACES QUOTIENTS

6.1 - Axiome du choix

Soit $\mathcal{X}$ un système non vide d'ensembles non vides. Alors il existe une fonction Φ :
$\begin{cases} \mathcal{X} \to \bigcup\limits_{E \in \mathcal{X}} E \\ E \mapsto x \in E \end{cases}$ qui associe à chaque ensemble E de $\mathcal{X}$ un de ses éléments x.

Définition : *produits infinis*

$$\mathcal{X} = \{X_\lambda \,:\, \lambda \in \Lambda\}, \qquad X_\lambda \neq \emptyset$$

$X := \prod\limits_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ est l'ensemble de toutes les applications $x : \Lambda \to \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ *t.q.* à $\lambda \in \Lambda$ on associe un $x_\lambda \in X_\lambda$. C'est le produit des ensembles X_λ.

Notation $\quad x = (x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$

Remarque L'axiome du choix est équivalent à ce que $X = \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \neq \emptyset$ si $\forall \lambda :\ X_\lambda \neq \emptyset$.

- un élément de $\Pi\, X_\lambda$ est donc une famille $(x_\lambda \,:\, \lambda \in \Lambda)$
- pour $X_\lambda = Z \quad \forall\, \lambda \in \Lambda$, on note $\prod\limits_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda = Z^\Lambda$, (voir suite généralisée).

Définition $\pi_\alpha \,:\, X = \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \to X_\alpha \quad (\alpha \in \Lambda)$, définie par $x = (x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \mapsto x_\alpha$ (coordonnée d'ordre α) s'appelle la $\alpha^{\text{ième}}$ *projection* du produit infini $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ sur X_α.

6.2 - Règles

Soient $\mathcal{X} = \{X_\lambda \,:\, \lambda \in \Lambda\}$, $\emptyset \neq A_\lambda\,,\, B_\lambda \subseteq X_\lambda$

1) $\pi_\alpha\,(\prod\limits_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda) = A_\alpha$
2) $\pi_\alpha\left(\pi_\alpha^{-1}\,(A_\alpha)\right) = A_\alpha$
3) $\prod_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda} \pi_\lambda^{-1}\,(A_\lambda)\,.$

En particulier, si $\alpha_1, \cdots, \alpha_k \in \Lambda$, posons $Z_{\alpha_j} := A_{\alpha_j}$, $Z_\lambda := X_\lambda \quad \lambda \notin \{\alpha_1, \cdots, \alpha_k\}$. Alors

$$\pi_{\alpha_1}^{-1}\,(A_{\alpha_1}) \cap \ldots \cap \pi_{\alpha_k}^{-1}\,(A_{\alpha_k}) = \prod_{\lambda \in \Lambda} Z_\lambda$$

Définition $\quad (X_\lambda\,, \mathcal{T}_\lambda)$ esp. top., $(\lambda \in \Lambda)$, $\quad X = \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$
La topologie initiale ${}_i\mathcal{T}$ sur X induite par $\{\pi_\alpha \,:\, \alpha \in \Lambda\}$ s'appelle la *topologie produit de* X.

Notation $\quad {}_i\mathcal{T} := \prod_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{T}_\lambda$

Remarques

1) La famille des ensembles $\pi_\lambda^{-1}(G_\lambda)\quad (\lambda \in \Lambda\,, G_\lambda \in \mathcal{T}_\lambda)$ forme une subbase de $\prod_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{T}_\lambda$, (subbase naturelle).
On a $\pi_\lambda^{-1}(G_\lambda) = \prod_{\mu\in\Lambda} G_\mu$ où $G_\mu = X_\mu \quad \mu \neq \lambda$.

2) La famille des ensembles $\pi_{\alpha_1}^{-1}(G_{\alpha_1}) \cap \ldots \cap \pi_{\alpha_n}^{-1}(G_{\alpha_n}) = \prod_{\mu\in\Lambda} G_\mu$ avec $G_\mu = X_\mu \quad \forall\, \mu \notin \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ et $G_{\alpha_j} \in \mathcal{T}_{\alpha_j}\ (j = 1, \ldots, n)\big]$ forme une base de $\prod \mathcal{T}_\lambda$.
On l'appelle la *base naturelle* de $\prod X_\lambda$.

Proposition 6.3

$(X_\lambda\,, \mathcal{T}_\lambda)$ *esp. top.,* $\quad X = (\prod X_\lambda\,, \prod \mathcal{T}_\lambda)$.
Si $\mathcal{B}_\lambda$ est un système fondamental de voisinages de $x_\lambda \in X_\lambda$, alors la famille des ensembles

$$\pi_{\alpha_1}^{-1}(B_{\alpha_1}) \cap \ldots \cap \pi_{\alpha_n}^{-1}(B_{\alpha_n}) = \prod_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda$$

(où $B_\lambda \in \mathcal{B}_\lambda$ et $B_\lambda = X_\lambda$ pour $\lambda \notin (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$) forme une base de voisinages de $x = (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$.

Démonstration

Soit $U \in \mathcal{U}(x) \Rightarrow \exists\, G \in \prod_\lambda \mathcal{T}_\lambda$ *t.q.* $x \in G \subseteq U$.

$\Rightarrow \exists\, B$ élément de la base naturelle de $\prod \mathcal{T}_\lambda$ *t.q.* $x \in B \subseteq G \subseteq U$.

On a $B = \prod_\lambda G_\lambda$ où $G_\lambda = X_\lambda, \quad \forall\, \lambda \notin \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}, \quad G_{\alpha_j} \in \mathcal{T}_{\alpha_j}\ (j = 1, \ldots, n)$.

En plus, $x \in B \Rightarrow x_\lambda \in G_\lambda \in \mathcal{T}_\lambda \overset{\substack{\mathcal{B}_\lambda \\ \text{base} \\ \text{vois.}}}{\Longrightarrow} \exists\, B_\lambda \in \mathcal{B}_\lambda$ *t.q.* $x_\lambda \in B_\lambda \subseteq G_\lambda$.

Ainsi $\widetilde{B} := \prod_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda$ contient x et $\widetilde{B} \subseteq B \subseteq G \subseteq U$. □

Remarques

1) $X = X_1 \times \ldots \times X_n = \underset{j=1}{\overset{n}{\pi}} X_j$ (produit cartésien). Les ens. de la forme $\prod_{j=1}^n G_j\,, G_j \in \mathcal{T}_j\,(j = 1, \ldots, n)$ forment une base de $\prod_{j=1}^n \mathcal{T}_j$.

2) La topologie euclidienne sur $\mathbb{R}^n$ coïncide avec la topologie produit de $\mathbb{R} \times \underset{n\text{-fois}}{\ldots} \times \mathbb{R}$, car la famille des ensembles $G_1 \times \ldots \times G_n$, où G_j est un intervalle dans $\mathbb{R}$, forme une base pour ces deux topologies.

Proposition 6.5

$(X_\lambda\,, \mathcal{T}_\lambda)$ *esp. top.,* $E_\lambda \subseteq X_\lambda$ *muni de* $\mathcal{T}_\lambda|_{E_\lambda}$

$\Rightarrow E := \prod_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda \subseteq X := \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ *et*

$\Big(\prod_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{T}_\lambda\Big)|_E = \prod\limits_{\lambda\in\Lambda} (\mathcal{T}_\lambda|_{E_\lambda})$

Démonstration

Soit $\mathcal{S}$ subbase naturelle de la topologie du produit pour $\prod \mathcal{T}_\lambda \Rightarrow \mathcal{S}_E = \{S \cap E\, :\, S \in \mathcal{S}\}$ est une subbase pour $\prod_\lambda (\mathcal{T}_\lambda|_{E_\lambda})$ car :

Soit $G_\lambda = X_\lambda$ si $\lambda \neq \lambda_0$ et $G_{\lambda_0} \in \mathcal{T}_{\lambda_0}$. Alors $\prod_\lambda G_\lambda = \pi_{\lambda_0}^{-1}(G_{\lambda_0}) \in \prod_\lambda \mathcal{T}_\lambda$. En plus $G_{\lambda_0} \cap E_{\lambda_0} \in \mathcal{T}_{\lambda_0}|_{E_{\lambda_0}}$ et $\prod\limits_{\lambda} (E_\lambda \cap G_\lambda) = (\underset{\substack{\shortparallel \\ E}}{\prod E_\lambda}) \cap (\underbrace{\prod G_\lambda}_{\in \mathcal{S}}) \in \mathcal{S}_E$. $\square$

Proposition 6.6

- $X = \prod X_\lambda$, $\emptyset \neq A_\lambda \subseteq X_\lambda$ $(\lambda \in \Lambda)$. *Alors* $\overline{\prod A_j} = \prod \overline{A}_\lambda$
- $\prod A_\lambda$ *fermé* $\Longleftrightarrow \forall \lambda \in \Lambda$, A_λ *fermé.*

Notons qu'il existe des fermés de X qui n'ont pas cette forme.

Proposition 6.7

$X = (\prod X_\lambda , \prod \mathcal{T}_\lambda)$. *Alors* $\forall \alpha$

$\pi_\alpha : X \to X_\alpha$ *continue et ouverte.*

Démonstration

- π_α continue d'après la définition de la topologie $\prod \mathcal{T}_\lambda$.
- Soit $B = \prod B_\lambda$ élément de la base naturelle $\mathcal{N}$ de $\prod \mathcal{T}_\lambda$ *ie* $B_\lambda = X_\lambda \quad \forall \lambda \notin \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ et $B_{\alpha_j} \in \mathcal{T}_{\alpha_j} \quad (j = 1, \dots, n)$.

$\Longrightarrow \pi_\alpha(B) = B_\alpha \in \mathcal{T}_\alpha$. Si $U \in \prod \mathcal{T}_\lambda$, alors $U = \bigcup G_{i \in I}$, $G_i \in \mathcal{N} \Longrightarrow \pi_\alpha(U) = \bigcup_i \underbrace{\pi_a(G_i)}_{ouvert} \in \prod \mathcal{T}_\lambda$ $\square$.

Proposition 6.8

$X = (\prod X_\lambda , \prod \mathcal{T}_\lambda)$, $(x^\beta)_{\beta \in I} \in X^I$ *suite généralisée. Soit* $x^\beta = (x^\beta_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ *et* $x = (x_\lambda)$. *Alors :*

$(x^\beta)_{\beta \in I} \to x \Longleftrightarrow \lim_\beta x^\beta_\lambda = x_\lambda \quad \forall \lambda \in \Lambda$.

Démonstration

" $\Rightarrow$" $\lim\limits_\beta x^\beta = x$, $\qquad \pi_\alpha : X \to X_\alpha$ continue

$$\Rightarrow \; x^\beta_\alpha = \pi_\alpha(x^\beta) \xrightarrow{\beta} \pi_\alpha(x) \quad \forall \alpha \in \Lambda .$$

" $\Leftarrow$" $(x^\beta)_{\beta \in I} \in X^I$. Supposons $\lim\limits_\beta x^\beta_\alpha = x_\alpha$, $\forall \alpha \in \Lambda$. A montrer $(x^\beta)_{\beta \in I} \to x = (x_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$.

Soit B élément de la base naturelle de $\prod\limits_\lambda \mathcal{T}_\lambda$ *t.q.* $x \in B$; donc $B = \prod\limits_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$ où $G_\lambda = X_\lambda \quad \forall \lambda \notin \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, $G_{\alpha_j} \in \mathcal{T}_{\alpha_j} \quad (j = 1, \dots, n)$ avec $x_\alpha \in G_\alpha$.

(∗) pour α_1 , $\exists \beta_1 \in I$ *t.q.* $x^\beta_{\alpha_1} \in G_{\alpha_1} \quad \forall \beta \geq \beta_1$

$\vdots$

pour α_n , $\exists \beta_n \in I$ *t.q.* $x^\beta_{\alpha_n} \in G_{\alpha_n} \quad \forall \beta \geq \beta_n$

I filtrant $\Rightarrow \exists\, \widetilde{\beta} \in I,\ \widetilde{\beta} \geq \beta_j\ (j = 1 \ldots n)$. Alors $\forall\, \beta \geq \widetilde{\beta}\ :\ x^\beta = (x_\alpha^\beta)_{\alpha\in\Lambda} \in \prod_{\alpha\in\Lambda} G_\alpha = B\Box$

Rappel $\{(\alpha, 0) : \alpha \in \mathbb{R}\} \simeq \mathbb{R}$; donc on peut identifier $\mathbb{R}$ à une partie de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. On généralise:

Proposition 6.9

$\{X_\lambda\ :\ \lambda \in \Lambda\}$ esp. top., $X = \left(\prod_\lambda X_\lambda\ ,\ \prod_\lambda \mathcal{T}_\lambda\right)$, $z = (z_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in X$ fixé.

$$\emptyset \neq \Delta \subseteq \Lambda, \qquad E_\lambda = \begin{cases} X_\lambda & si \quad \lambda \in \Delta \\ \{z_\lambda\} & si \quad \lambda \in \Lambda \setminus \Delta \end{cases}$$

alors $E := E\,(\Delta) = \prod_\lambda E_\lambda \subseteq X$ et,
comme partie de X, E est homéomorphe à $Y = \prod_{\lambda\in\Delta} X_\lambda$.
Comme homéomorphisme, on peut prendre l'application

$$\Phi\ :\ \begin{cases} E \to Y \\ (x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \mapsto (x_\mu)_{\mu\in\Delta} \end{cases}$$

Démonstration

Soient $\pi_\lambda : X \to X_\lambda \qquad \tau_\lambda\ :\ Y \to X_\lambda \quad (\lambda \in \Delta)$ les projections naturelles, et $f\ :\ X \to Y$ définie par $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \mapsto (x_\mu)_{\mu\in\Delta}$. Alors
$\tau_\lambda \circ f = \pi_\lambda \quad \forall\, \lambda \in \Delta \quad \stackrel{5.3}{\Longrightarrow} f$ continue.

$\Phi := f|_E\ :\ E \to Y \stackrel{6.5}{\Longrightarrow} \Phi$ continue et bijective.

$\pi_\lambda \circ \Phi^{-1}\ :\ Y \to X_\lambda$ satsisfait:
$\pi_\lambda \circ \Phi^{-1} = \begin{cases} \tau_\lambda & \text{si } \lambda \in \Delta, \\ \equiv\ cste \quad z_\lambda & \text{si } \lambda \in \Lambda \setminus \Delta. \end{cases}$

$\Longrightarrow \pi_\lambda \circ \Phi^{-1}$ continue $\forall\, \lambda \in \Lambda$

$\stackrel{5.3}{\Longrightarrow} \Phi^{-1} \in C(Y, X)$ $\Box$

Remarque

En particulier, si $\Delta = \{\alpha\}$ on a que X_α est homéomorphe à une partie de $X = \prod X_\lambda$, à savoir la partie
"$(\{z_\lambda\}, \ldots, \{z_\mu\}, X_\alpha, \{z_\nu\} \ldots)$" $= \prod_\lambda E_\lambda$ où $E_\alpha = X_\alpha$ et $E_\lambda = \{z_\lambda\}$ pour $\lambda \neq \alpha$.

B - Espaces quotients

$X \neq \emptyset$. Relation d'équivalence $\sim$ sur X.

$$\boxed{\text{R}} \quad x \sim x \qquad \boxed{\text{S}} \quad x \sim y \Rightarrow y \sim x$$
$$\boxed{\text{T}} \quad x \sim y\,,\, y \sim z \Rightarrow x \sim z$$

Classes d'équivalences : $\{y \in X \,:\, y \sim x\} =: [x] = \widetilde{x} \quad [x] \neq \emptyset$.
On a $[x] = [y]$ ou bien $[x] \cap [y] = \emptyset$ et $X = \bigsqcup\limits_{\substack{x \\ \text{représ.}}} [x]$ (réunion disjointe)

$X/_\sim = \widetilde{X} = \{[x] \,:\, x \in X\}$ est appellé *l'ensemble quotient*
L'application $\nu : \begin{cases} X \to X/_\sim \\ x \mapsto [x] \end{cases}$ est appellée *la surjection canonique.*

Définition
Soit $(X, \mathcal{T})$ esp. top., , $\sim$ relation d'équivalence sur X. Alors la *topologie du quotient* $\mathcal{T}_\sim$ est la topologie finale sur $X/_\sim$ par rapport à ν (= la topologie la plus fine sur $X/_\sim$ *t.q.* ν soit encore continue.) $(X/_\sim\,, \mathcal{T}_\sim)$ est l' espace quotient (associé à $\sim$).

Remarque

1) $\widetilde{G} \subseteq \widetilde{X}$ ouvert $\Longleftrightarrow \nu^{-1}(\widetilde{G})$ ouvert dans X.
2) $\widetilde{F} \subseteq \widetilde{X}$ fermé $\Longleftrightarrow \nu^{-1}(\widetilde{F})$ fermé dans X.

Proposition 6.10 *(voir 5.6)*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g\circ\nu} & Y \\ \nu\downarrow & \nearrow g & \\ \widetilde{X} & & \end{array}$$

$(X, \mathcal{T}_1)$, $(Y\,, \mathcal{T}_2)$ espaces top., $\sim$ rel. d'eq. sur X
$g \,:\, \widetilde{X} \to Y, \qquad (\widetilde{X}\,, \mathcal{T}_{1\sim})$.
Alors $g$continue $\Longleftrightarrow g \circ \nu$ continue.

Application Soit X, Y esp. top., $f \,:\, X \to Y$.

On déf. une relation d'équivalence $\sim$ sur X par: $x_1 \sim x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$. Soit $\nu \,:\, X \to \widetilde{X}$ la surjection canonique.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \nu\downarrow & \nearrow \widetilde{f} & \\ \widetilde{X} & & \end{array}$$

Alors
$\widetilde{f}$ donnée par $\widetilde{f}([x]) = f(x)$
est une application bien déf.

Proposition 6.11
X, Y esp. top. Alors $f \,:\, X \to Y$ continue $\Longleftrightarrow \widetilde{f}$ continue

Démonstration

$\Leftarrow$ trivial.
$\Rightarrow$: Utiliser que $f = \widetilde{f} \circ \nu$ et 6.10.

Proposition 6.12

X, Y esp. top., $f \,:\, X \to Y$ surjective, continue.

1) *Si Y est muni de la topologie finale associée à f, alors $\widetilde{f}$ est un homéomorphisme.*
2) *Si f est une appl. ouverte, alors $\widetilde{f}$ est un homéomorphisme.*

Démonstration

(1) $\underbrace{X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{\widetilde{f}^{-1}} \widetilde{X}}_{\nu}$ $\quad$ *ie* $\quad \nu = \widetilde{f}^{-1} \circ f$

5.5 nous donne la continuité de $\widetilde{f}^{-1}$.

(2) $f \in C(X,Y)$, f ouverte, f surj.) $\underset{5.7}{\Rightarrow}$ Y est déjà muni de la topologie finale pour $f \overset{(1)}{\Longrightarrow} \widetilde{f}^{-1}$ continue.

VII - ESPACES COMPACTS

Définition

Soit $(X, \mathcal{T})$ espace topologique.

- Un système $\{A_\lambda \,:\, \lambda \in \Lambda\}$, $A_\lambda \subseteq X$, s'appelle *recouvrement* de $A \subseteq X$ si $A \subseteq \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$. Il est *ouvert* si A_λ est ouvert $\forall\, \lambda \in \Lambda$.
- $A \subseteq X$ est *compact* si de chaque recouvrement ouvert de A, on peut extraire un recouvrement fini *i.e.* $A \subseteq \underset{\lambda\in\Lambda}{\cup} A_\lambda$, A_λ ouvert $\Rightarrow \exists\, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \Lambda$ *t.q.* $A \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} A_{\lambda_j}$.

Remarque

1) Heine-Borel-Lebesgue : $A \subseteq \mathbb{R}^n$ compact (topologie euclidienne) $\Longleftrightarrow$ A fermée et bornée.
2) Les ensembles finis dans $(X, \mathcal{T})$ sont toujours compacts.
3) Dans $(X\,,\,\{\emptyset\,,\,X\})$ toutes les parties sont compactes, mais si $\#\,X > 1$, alors il existe des parties compactes $A \subseteq X$ qui ne sont pas fermées.

Proposition 7.1

La compacité est un "propriété absolue", i.e. X esp. top., E sous-espace top., alors $A \subseteq E$ compact dans $E \Longleftrightarrow A \subseteq E$ compact dans X.

Démonstration

« $\Rightarrow$ » $A \subseteq E$ compact dans E. Soit $A \subseteq \underset{\lambda\in\Lambda}{\cup} G_\lambda$, G_λ ouvert dans X

$$\Longrightarrow \; A = A \cap E \subseteq \big(\underset{\lambda\in\Lambda}{\cup} G_\lambda\big) \cap E = \underset{\lambda\in\Lambda}{\cup} \underbrace{(G_\lambda \cap E)}_{\substack{\text{ouvert}\\ \text{dans } E}}$$

$$\overset{\substack{A\text{compact}\\ \text{dans } E}}{\Longrightarrow} \; A \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} (G_{\lambda_j} \cap E) \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} G_{\lambda_j}$$

$\Longrightarrow$ A compact dans X.

« $\Leftarrow$ » exo.

Remarque

La propriété d'être fermé n'est pas un propriété absolue.

Théorème 7.2

X espace topologie. Sont équivalentes :

1) *X compact*
2) *$A_\lambda \subseteq X$, A_λ fermé, $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \emptyset \Rightarrow \exists\{\lambda_1,\dots,\lambda_j\} \subseteq \Lambda$ t.q. $\bigcap_{j=1}^n A_{\lambda_j} = \emptyset$. (prop. de l'intersection finie).*
3) *Chaque filtre $\mathcal{F}$ sur X possède un point adhérent, i.e. $\exists\, x \in X$ t.q. $x \in \overline{F}$ pour tout $F \in \mathcal{F}$.*
4) *Pour chaque filtre $\mathcal{F}$ sur X, il existe un filtre $\mathcal{F}_1$ plus fin (ie $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}_1$) qui converge.*
5) *Chaque suite généralisée possède une valeur d'adhérence.*
6) *Chaque suite généralisée possède une sous-suite généralisée qui converge.*

Démonstration

- (1) $\Longrightarrow$ (2)

A_λ fermé $X = \left(\bigcap\limits_\lambda A_\lambda\right)^c = \bigcup\limits_\lambda \overbrace{A_\lambda^c}^{\text{ouvert}}$

X compact $\Rightarrow X = \bigcup\limits_{j=1}^n A_{\lambda_j}^c \Longrightarrow \emptyset = \bigcap\limits_{j=1}^n A_{\lambda_j}$

- (2) $\Longrightarrow$ (3)

$\mathcal{F}$ filtre $\underset{F3}{\Longrightarrow} \{\overline{F} \,:\, F \in \mathcal{F}\} \subseteq \mathcal{F}$

$\overset{(2)}{\Longrightarrow} \bigcap_{F\in\mathcal{F}} \overline{F} \neq \emptyset$ $\Big($car sinon $\bigcap\limits_{j=1}^{n} \overline{F}_j = \emptyset \underset{\overline{F}_j\in\mathcal{F}}{\Longrightarrow}$ contradiction à $F2$ et $F1\Big)$

$\Longrightarrow \exists\, x \in X$ *t.q.* $x \in \overline{F} \quad \forall F \in \mathcal{F}$.

- (3) $\Longrightarrow$ (4)

$\mathcal{F}$ filtre, x point adhérent à $\mathcal{F} \Longrightarrow \forall F \in \mathcal{F}\, \forall U \in \mathcal{U}(x) : U \cap F \neq \emptyset$.

Posons $\mathcal{F}_1 = \{U \cap F \,:\, U \in \mathcal{U}(x)\,,\, F \in \mathcal{F}\} \overset{U=X}{\Longrightarrow} \mathcal{F}_1 \supseteq \mathcal{F}$ et $\mathcal{F}_1$ base d'un filtre.

On a $\mathcal{U}(x) \subseteq \mathcal{F}_1$ $(F = X \in \mathcal{F}) \overset{\text{déf.}}{\Longrightarrow} \lim \mathcal{F}_1 = x$

Notons que d'après 3.8, on a (5) $\Longleftrightarrow$ (6).

- (4) $\Longrightarrow$ (5)

Soit $(x_\alpha)_{\alpha\in I} \in X^I$ suite généralisée. Soit $\mathcal{F} = \mathcal{F}\,(x_\alpha)$ le filtre de Fréchet associé.
$(\mathcal{B} = \{\{x_\alpha \,:\, \alpha \geq \alpha_0\}\,,\, \alpha_0 \in I\}$ base de $\mathcal{F})$.
(4) $\Longrightarrow \exists x \in X\, \exists\, \mathcal{F}_1 \supseteq \mathcal{F}$, $\mathcal{F}_1$ qui converge vers $x \in X$ *i.e.* $\mathcal{U}(x) \subseteq \mathcal{F}_1$.
Soit $U \in \mathcal{U}(x) \Rightarrow U \in \mathcal{F}_1$ et soit $A_0 = \{x_\alpha \,:\, \alpha \geq \alpha_0\} \in \mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}_1$

$\overset{\mathcal{F}_1\,\text{filtre}}{\Longrightarrow} \underbrace{U \cap A_0}_{\neq\emptyset} \in \mathcal{F}_1$ *ie* $\underset{(\alpha_1\in I)}{\exists\, \alpha_1 \geq \alpha_0}$ *t.q.* $x_{\alpha_1} \in U \Longrightarrow$ (5).

- (5) $\Longrightarrow$ (1)

Soit $X = \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$ recouvrement ouvert *t.q.* aucun système fini $\{G_{\lambda_j} \,:\, \lambda_j \in \Lambda\,,\, j = 1\ldots n\}$ ne recouvre X.

Posons $J = \{\Omega \,:\, \Omega \subseteq \Lambda\,,\, \Omega \text{ fini}\}$

$(J\,,\,\le)$ filtrant pour $\Omega \le \Omega' \Longleftrightarrow \Omega \subseteq \Omega'$.

On définie $(x_\Omega)_{\Omega\in J} \in X^J$ suite généralisée par : à chaque Ω on associe un élément de $X \setminus \bigcup_{\lambda\in\Omega} G_\lambda$, noté par x_Ω (axiome du choix).

(6) $\Rightarrow$ $\exists x_0 \in X\ \exists$ sous suite généralisée $(y_\beta)_{\beta\in\tilde{J}}$ *t.q.* $\lim\limits_\beta y_\beta = x_0$.

On a $x_0 \in X = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda \ \Rightarrow \exists\,\lambda_0\ \ t.q.\ \ x_0 \in G_{\lambda_0} \in \mathcal{U}\,(x_0)$

$(y_\beta)_{\beta\in\widetilde{J}}$ converge vers $x_0 \Rightarrow \exists\,\beta_0 \in \widetilde{J}\ \ t.q.\ \ y_\beta \in G_{\lambda_0} \quad \forall\,\beta \ge \beta_0\,.$

Notons qu'il existe $\varphi :\, \widetilde{J} \to J\ \ tq\ \ [\Omega_0\ := \varphi\,(\beta_0) \Rightarrow y_{\beta_0} = x_{\varphi(\beta_0)} = x_{\Omega_0}\,]$.

Posons $\Omega_1 = \Omega_0 \cup \{\lambda_0\} \Longrightarrow\ \Omega_1 \in J$.

Pour cet Ω_1, il $\exists\,\overline{\beta}\ \ t.q.\ \ [\beta \ge \overline{\beta} \Rightarrow \varphi\,(\beta) \ge \Omega_1]$.

On a $\Omega_1 \ge \Omega_0$. Choisir $\beta' \ge \overline{\beta}, \beta' \ge \beta_0\,,\, \beta' \in \widetilde{J} \Longrightarrow\ \ y_{\beta'} \in G_{\lambda_0} \quad (*)$

Mais $y_{\beta'} = x_{\varphi(\beta')} \notin \bigcup\limits_{\lambda\in\varphi(\beta')} G_\lambda \supseteq \bigcup\limits_{\lambda\in\Omega_1} G_\lambda$

$\Longrightarrow\ \ y_{\beta'} \notin G_{\lambda_0}$. Contradiction à $(*)$. $\square$

Proposition 7.3

X espace séparé. Alors $A \subseteq X$ compact $\Rightarrow$ A fermé.

Démonstration

i) Soit $A \subseteq X$ compact, $x_0 \in X \setminus A$.

Montrons: $\exists\,U\,,\,V$ ouverts *t.q.* $U \cap V = \emptyset\,,\, A \subseteq U\,,\, x_0 \in V$.

X séparé $\Rightarrow \forall\,a \in A \quad \exists\ \underset{\text{ouvert}}{Q_a} \in \mathcal{U}\,(a)$ *et* $\underset{\text{ouvert}}{U_a} \in \mathcal{U}\,(x_0)$ *t.q.* $Q_a \cap U_a = \emptyset \Longrightarrow\ A \subseteq \bigcup\limits_{a\in A} Q_a$

A compact $\Rightarrow$ $A \subseteq \bigcup\limits_{j=1}^{n} Q_{a_j} = Q \Rightarrow Q$ *ouvert*, $A \subseteq Q$ *et*

$Q \cap \big(\bigcap\limits_{j=1}^{n} U_{a_j}\big) = \emptyset$

ii) Montrons que $A = \overline{A}$. Soit $x \notin A \overset{i)}{\Longrightarrow} \exists U \in \mathcal{U}(x)$ avec $U \cap A = \emptyset \Rightarrow x \notin \overline{A}$ $\square$

Proposition 7.4

X compact, $A \subseteq X$ fermé $\Rightarrow A$ compact.

Démonstration

$A \subseteq \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda, \quad G_\lambda$ ouvert

$\Longrightarrow\ \big(\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda\big) \cup \underbrace{A^c}_{\text{ouvert}}$ recouvrement de X

X compact $\Rightarrow X = A^c \cup \big(\bigcup\limits_{j=1}^{n} G_{\lambda_j}\big)$

$$\Longrightarrow A \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} G_{\lambda_j} \Rightarrow A \text{ compact.} \qquad \square$$

Proposition 7.5

X, Y espaces top., $f : X \to Y$ continue.
$A \subseteq X$ compact $\Rightarrow f(A)$ compact.

Démonstration

Soit $\mathcal{G}$ recouvrement ouvert de $f(A)$ dans Y.

$$A \subseteq f^{-1}(f(A)) \subseteq f^{-1}\Big(\bigcup_{G\in\mathcal{G}} G\Big) = \bigcup_{G\in\mathcal{G}} \underbrace{f^{-1}(G)}_{\substack{\text{ouvert}\\ \text{car f continue}}}$$

A compact $\Rightarrow A \subseteq \bigcup\limits_{j=1}^{n} f^{-1}(G_j), \quad G_j \in \mathcal{G}$

$$A \subseteq f^{-1}\Big(\bigcup_{j=1}^{n} G_j\Big)$$

$$\Rightarrow f(A) \subseteq f\Big(f^{-1}\Big(\bigcup_{j=1}^{n} G_j\Big)\Big) \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} G_j$$

$$\Longrightarrow f(A) \text{ compact.} \qquad \square$$

Corollaire 7.6

X esp. top. compact, $f : X \to \mathbb{R}$ continue, $\Rightarrow f$ prend son maximum et son minimun sur X, i.e. $\exists\, a, b \in X$ t.q. $\forall x \in X \quad f(a) \leq f(x) \leq f(b)$

Démonstration

7.5 $\Rightarrow f(X)$ compact dans $\mathbb{R} \Rightarrow f(X)$ borné et fermé (Bolzano-Weierstrass)

$$\overset{\exists\, a,b}{\Longrightarrow} \max_{x\in X} f(x) = f(b) \text{ et } \inf_{x\in X} f(x) = f(a) \qquad \square$$

Proposition 7.7

X espace compact, Y espace séparé (T2), $f : X \to Y$ bijective, continue. Alors f^{-1} continue (donc f homéomorphisme).

Démonstration

Montrons que $f(A)$ est fermé $\forall\, A \subseteq X$, A fermé. En effet, $A \subseteq X$, A fermé, X compact $\overset{7.4}{\Longrightarrow} A$ compact $\underset{f \text{ cont.}}{\overset{7.5}{\Longrightarrow}} f(A)$ compact $\underset{T2}{\overset{7.3}{\Longrightarrow}} f(A)$ fermé $\underset{4.1}{\Rightarrow} f^{-1}$ continue. $\square$

7.8 - Lemme d'Alexandre

$(X, \mathcal{T})$ esp. top., $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$ subbase. Alors X compact $\Leftrightarrow$ chaque recouvrement de X avec des éléments de $\mathcal{S}$ admet une recouvrement fini.

Démonstration

" $\Rightarrow$" clair.

“ $\Leftarrow$” Supposons X pas compact

$\Longrightarrow \exists\, G_\lambda \in \mathcal{T}$, $X = \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$ *t.q.* $\widetilde{\mathcal{G}} := \{G_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ n'admet pas de système-fini qui recouvre X. Lemme de Zorn : $\exists$ un tel système $\mathcal{G}$ qui est maximal.

Soit $x \in X \Rightarrow \exists\, G_0 \in \mathcal{G}$ *t.q.* $x \in G_0$.
$\mathcal{S}$ subbase $\Rightarrow \exists\, S_1, \ldots, S_n \in \mathcal{S}$ *t.q.* $x \in \bigcap\limits_{j=1}^{n} S_j \subseteq G_0$

- Assertion $\exists\, j \in \{1, \ldots, n\}$ *t.q.* $S_j \in \mathcal{G}$ $\quad (*)$.

- Démonstration de $(*)$

Supposons que ceci n'est pas vrai, i.e. $\forall\, j \in \{1, \ldots, n\}$ *on a* $S_j \notin \mathcal{G}$. *Soit* $j_0 \in \{1, \ldots, n\} \Longrightarrow$
$X = \bigcup\limits_{G\in\mathcal{G}} G \cup \underbrace{S_{j_0}}_{\text{ouvert}}$.

Soit $\mathcal{G}_{j_0} := \mathcal{G} \cup \{S_{j_0}\}$. *C'est un recouvrement ouvert de* X. *Maximalité de* $\mathcal{G} \Rightarrow \mathcal{G}_{j_0}$ *admet un recouvrement de* X *fini.*

$X = \bigcup\limits_{l=1}^{m(j_0)} G_l^{(j_0)} \cup S_{j_0}$, $G_l^{(j_0)} \in \mathcal{G}$

$$\Longrightarrow M := \bigcup_{j_0=1}^{n} \bigcup_{l=1}^{m(j_0)} G_l^{(j_0)} \in \mathcal{T} \text{ avec } M \cup S_{j_0} = X$$

$$\Longrightarrow G_0 \cup M \cup S_{j_0} = X$$

$$\overset{j_0 \text{ arbit.}}{\Longrightarrow} X = \bigcap_{j_0=1}^{n} (G_0 \cup M \cup S_{j_0}) = G_0 \cup M \cup \underbrace{\Big(\bigcap_{j_0=1}^{n} S_{j_0}\Big)}_{\subseteq G_0}$$

$$= G_0 \cup M$$

$\Longrightarrow$ $\exists$ *un recouvrement fini de* X *avec des éléments de* $\mathcal{G}$. *Contradiction. Donc* $(*)$ *est correct.*

En utilisant $(*)$: $x \in X$, $x \in S_{j(x)} \Rightarrow X = \bigcup\limits_{x\in X} \underbrace{S_{j(x)}}_{\in\mathcal{G}\cap\mathcal{S}}$

$\underset{\text{déf. } \mathcal{G}}{\overset{\text{hypothèse.}}{\Longrightarrow}}$ ce recouvrement de X avec des éléments de $\mathcal{S}$ n'admet pas de recouvrement fini $\square$

Théorème 7.9 : *théorème de Tychonov*

Soit $\{X_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ *système d'espaces top. non vide,* $\mathcal{T}_\lambda$ *topologie sur* X_λ, $\quad X_\lambda \neq \emptyset$

$$X = \left(\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \,,\, \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{T}_\lambda\right)$$

Alors X *compact* $\Leftrightarrow \forall\, \lambda \in \Lambda$, X_λ *compact.*

Démonstration

“ $\Rightarrow$ ” X compact. $\pi_\lambda : X \to X_\lambda$ continue $\overset{7.5}{\Longrightarrow} \pi_\lambda(X) = X_\lambda$ compact.

“ $\Leftarrow$ ” Utilisons le lemme d'Alexandre

Soit $\mathcal{S}$ subbase naturelle de X et $X = \bigcup_{S\in\mathcal{G}} S$, $\mathcal{S} \supseteq \mathcal{G}$.
Fixons $\alpha \in \Lambda$. Considérons $\mathcal{U}_\alpha = \{U \in \mathcal{T}_\alpha , \pi_\alpha^{-1}(U) \in \mathcal{G}\} \Longrightarrow \mathcal{U}_\alpha \neq \emptyset$. (Notons que chaque élément $S \in \mathcal{S}$ a la forme $S = \pi_\lambda^{-1}(G_\lambda)$ pour un certain $\lambda \in \Lambda$ et $G_\lambda \in \mathcal{T}_\lambda$).

<u>Assertion</u> $\exists\, \alpha_0 \in \Lambda$ *t.q.* $\displaystyle\bigcup_{U\in\mathcal{U}_{\alpha_0}} U = X_{\alpha_0}$ $(*)$

- Démonstration de $(*)$: par l'absurde.

Sinon $\forall\, \alpha \in \Lambda \quad \exists\, x_\alpha \in X_\alpha \setminus \bigcup_{U\in\mathcal{U}_\alpha} U \qquad (1)$
$\Longrightarrow x = (x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} \in X$ (axiome du choix).

Soit $S \in \mathcal{G} \Rightarrow S = \pi_{\alpha_1}^{-1}(G_{\alpha_1})$ pour un $\alpha_1 \in \Lambda$ et $G_{\alpha_1} \in \mathcal{T}_{\alpha_1} \overset{\text{déf.}\ \mathcal{U}_{\alpha_1}}{\Longrightarrow} G_{\alpha_1} \in \mathcal{U}_{\alpha_1}$

Notons que $\pi_{\alpha_1}(x) = x_{\alpha_1}$; mais $x \notin S \qquad (2)$
(sinon, $x \in S \Rightarrow \pi_{\alpha_1}(x) = x_{\alpha_1} \in G_{\alpha_1} \in \mathcal{U}_{\alpha_1}$, contradiction à (1)).
Mais (2) est une contradiction à ce que $\mathcal{G}$ est un recouvrement de X (car $x \notin S \Rightarrow x \notin \bigcup\limits_{s\in\mathcal{G}} S$). Donc $(*)$ est satisfait.

Prenons cet α_0 donné par $(*)$, X_{α_0} compact $\Rightarrow$ $X_{\alpha_0} = \bigcup\limits_{j=1}^{n} U_j$, $U_j \in \mathcal{U}_{\alpha_0}$

$$\Rightarrow \; X = \pi_{\alpha_0}^{-1}(X_{\alpha_0}) = \pi_{\alpha_0}^{-1}\Big(\bigcup_{j=1}^n U_j\Big) = \bigcup_{j=1}^n \underbrace{\pi_{\alpha_0}^{-1}(U_j)}_{\in\mathcal{G}} \qquad \square$$

Proposition 7.11
Un produit $\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ *d'espaces top.* $X_\lambda \neq \emptyset$ $(\Lambda \neq \emptyset)$ *est séparé* $\Longleftrightarrow \forall\, \lambda \in \Lambda$: X_λ *séparé.*

Démonstration

" $\Leftarrow$ " $x = (x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$, $y = (y_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$, $x \neq y$

$\Longrightarrow \alpha_0 \in \Lambda$ *t.q.* $x_{\alpha_0} \neq y_{\alpha_0}$

$\overset{X_{\alpha_0}\ T2}{\Longrightarrow} \exists\, U_{\alpha_0} \in \mathcal{U}(x_{\alpha_0})$, U_{α_0} ouvert dans X_{α_0} et $V_{\alpha_0} \in \mathcal{U}(y_{\alpha_0})$, V_{α_0}ouvert dans X_{α_0} t.q. $U_{\alpha_0} \cap V_{\alpha_0} = \emptyset$.

Posons $U = \pi_{\alpha_0}^{-1}(U_{\alpha_0}) = \prod\limits_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$, où $U_\lambda = \begin{cases} X_\lambda \text{ si } \lambda \neq \alpha_0 \\ U_{\alpha_0} \text{ si } \lambda = \alpha_0 \end{cases}$ et $V = \pi_{\alpha_0}^{-1}(V_{\alpha_0}) = \prod\limits_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda$ où $V_\lambda = \begin{cases} X_\lambda \text{ si } \lambda \neq \alpha_0 \\ V_{\alpha_0} \text{ si } \lambda = \alpha_0 \end{cases}$

$\Longrightarrow U$ et V ouverts dans X (car élts de la subbase naturelle).
De plus, $x \in U$, $y \in V$, $U \cap V = \emptyset$ car :

$$U \cap V = \pi_{\alpha_0}^{-1}(U_{\alpha_0}) \cap \pi_{\alpha_0}^{-1}(V_{\alpha_0}) = \pi_{\alpha_0}^{-1}(U_{\alpha_0} \cap V_{\alpha_0}) = \emptyset.$$

" $\Rightarrow$ " $X = \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ séparé. Fixons $\alpha \in \Lambda$. On définit $E = \prod_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda \subseteq X$ par

$$E_\lambda = \begin{cases} X_\lambda \text{ si } \lambda = \alpha \\ \{z_\lambda\} \text{ si } \lambda \neq \alpha \end{cases}$$

où $z = (z_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in X$

$\overset{6.9}{\Longrightarrow}$ E homéomorphe à X_α (noté par h). Comme E est séparé, on a $h(E)$ séparé $\square$

Définition

X esp. top. *localement compact* si $\forall\, x \in X$ il existe un voisinage compact C de x.

- Exemple

- $(\mathbb{R}^n\,,\, \|\cdot\|_2)$ localement compact.
- $\mathbb{Q}$ muni de la trace de la topologie euclidienne de $\mathbb{R}$ n'est pas localement compact (exo.)

Définition

Un espace top. X est dit *séquentiellement compact* (s-compact), si toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ de X admet une sous-suite convergente.

Remarque

(1) $\exists\, X$ compact, X pas s-compact.

(2) $\exists\, X$ s-compact, X pas compact (non élémentaire).

- Exemple pour (1):

$\Lambda = \{$l'ens. de toutes les sous-suites de 1 2 3 4 5 6 ...$\}$,

$X_\lambda = [0,1]$, $X = \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda\,,$

$X = I^\Lambda \overset{\text{Tychonv}}{\Longrightarrow} X$-compact. X n'est pas s-compact car : soit $\lambda = (n_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \Lambda$.

On définit $z_m = (x_\lambda^{(m)})_{\lambda\in\Lambda} \in X$ par

$$x_\lambda^{(k)} = \begin{cases} 1 & \text{pour } k = n_0\,,\, n_2\,,\, n_4\,,\, \ldots \\ 0 & \text{pour } k \in \mathbb{N} \setminus \{n_0\,,\, n_2\,,\, \ldots\}. \end{cases}$$

Alors $(z_m)_m$ n'admet pas de sous-suite convergente dans X car : supposons le contraire, *i.e.* $(z_{m_j})_{j\in\mathbb{N}}$ converge dans X.

$\Longrightarrow$ $\forall\,\lambda \in \Lambda\,,\, (x_\lambda^{(m_j)})_j$ converge dans I; mais pour $\lambda_0 = m_0, m_1, \ldots \in \Lambda$ on a

$$(x_{\lambda_0}^{(m_0)}\,,\, x_{\lambda_0}^{(m_1)}\,,\, x_{\lambda_0}^{(m_2)}\,,\, \ldots)$$

$= (1, 0, 1, 0\ldots)$ diverge !!

Théorème 7.12
(E, d) esp. métrique. Alors les assertions suivantes sont équivalentes:

1) *E compact.*
2) *chaque suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ admet une valeur d'adhérence (dans E).*
3) *E s-compact.*
4) *E est complet et $\forall\, \varepsilon > 0$ ε-précompact*
   (ie $\forall\, \varepsilon > 0\,, \exists\, x_1, \ldots, x_n \in E \quad E = \bigcup\limits_{j=1}^{n} B(x_j\,,\varepsilon)$)

Démonstration

- (1) $\Longrightarrow$ (2) proposition 7.2 : (1) $\Longrightarrow$ (5)

- (2) $\Longleftrightarrow$ (3) théorème 3.2

- (3) $\Longrightarrow$ (4)

- E complet : soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de Cauchy; (3) $\Longrightarrow$ (x_n) admet sous-suite convergente $\overset{\text{licence}}{\Longrightarrow}$ (x_n) converge.
- Supposons que E ne soit pas ε-précompact. Alors $\exists\ \varepsilon > 0$ *t.q.* E ne peut pas être recouvert par un nombre fini de boules de rayon ε.
  Donc $x_1 \in E \Rightarrow B(x_1\,,\varepsilon) \neq E \Rightarrow \exists\, x_2 \in E \setminus B\,(x_1\,,\varepsilon)$
  $B\,(x_1\,,\varepsilon) \cup B\,(x_2\,,\varepsilon) \neq E \Rightarrow \exists\, x_3 \in E \setminus (B(x_1\,,\varepsilon) \cup B\,(x_2\,,\varepsilon))$
  $\vdots$
  La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi construite satisfait $d\,(x_n, x_{n+k}) \geq \varepsilon \ \ \forall\, k = 1, 2 \ldots$ donc n'admet pas de sous-suite de Cauchy. Contradiction à (3).

- (4) $\Longrightarrow$ (1) Supposons E pas compact $\Rightarrow \exists$ recouvrement $\mathcal{G} = \{U_\lambda\,:\,\lambda \in \Lambda\}$ de E, U_λ ouvert, dont on ne peut extraire aucun sous-recouvrement fini.

- Posons $B_0 := E$, (4) $\Rightarrow B_0 = \bigcup_{j=1}^{N} B_{(j)}$, $B_{(j)}$ boule de rayon $\varepsilon = 1$. Au moins une de ces boules ne peut pas être recouverte par un nombre fini de U_λ. On l'appelle B_1.
- On recouvre E par des boules $B'_{(j)}$ $(j = 1 \ldots N')$ de rayon $\varepsilon = \frac{1}{2}$.
  Soit $J = \{j : B'_{(j)} \cap B_1 \neq \emptyset\}$.
  $\Longrightarrow \ B_1 \subseteq \bigcup_{j\in J} B'_{(j)}$.
  Parmi ces boules $B'_{(j)}$ il y en a au moins une qui ne peut pas être recouverte par un nombre fini de U_λ. On l'appelle B_2.
  On construit ainsi un suite B_n de boules dans E *t.q.*

$$\begin{cases} (i) \quad \text{rayon de } B_n \text{ est égal à } \dfrac{1}{2^n}\,. \\ (ii) \quad B_n \cap B_{n-1} \neq \emptyset \\ (iii) \quad \text{aucune sous-famille finie de } \mathcal{G} \text{ ne recouvre } B_n \ (n \in \mathbb{N})\,. \end{cases}$$

Soit $B_n = B\left(x_n \, , \, \frac{1}{2^n}\right)$. Alors (x_n) est une suite de Cauchy car :

$$\begin{aligned} d\left(x_n \, , \, x_{n+k}\right) &\leq d\left(x_n \, , \, x_{n+1}\right) + d\left(x_{n+1} \, , \, x_{n+2}\right) + \ldots + d\left(x_{n+k-1} \, , \, x_{n+k}\right) \\ &\underset{(i)}{\overset{(ii)}{\leq}} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}\right) + \left(\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2^{n+k-1}} + \frac{1}{2^{n+k}}\right) \\ &\leq 2 \sum_{j=n}^{+\infty} \frac{1}{2^j} = \frac{4}{2^n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

E complet $\Rightarrow x = \lim x_n$ existe $\Longrightarrow \exists \, \lambda_0 \in \Lambda \;\; t.q. \;\; x \in U_{\lambda_0}$. $\exists \, r > 0 \;\; t.q. \;\; B(x, r) \subseteq U_{\lambda_0}$.
Comme $d(x_p, x) \to 0$, $\exists p :\quad B_p = B\left(x_p \, , \, \frac{1}{2^p}\right) \subseteq B(x, r) \subseteq U_{\lambda_0}$ Contradiction à (iii). $\square$

Remarque

X espace A_1, X compact $\Rightarrow$ X s-compact.

VIII - LES ESPACES TOPOLOGIQUES T_j $(j = 1, 2, 3, 4)$

Définition

- Un espace topologique X est dit <u>$T1$</u> si $\forall \, x, y \in X$, $x \neq y$, $\exists$ des ouverts U, V *t.q.*

$$x \in U \, , \, y \notin U$$
$$y \in V \, , \, x \notin V$$

- Un espace topologique X est dit <u>$T2$</u> si $\forall \, x, y \in X$, $x \neq y$, $\exists$ ouverts U, V *t.q.*

$$x \in U \, , \, y \in V \, , \, U \cap V = \emptyset \, .$$

1) Remarque

- $X \quad T_1 \Longleftrightarrow$ les singletons sont fermés (exo.).
- $T_2 \Rightarrow T_1$ mais $T_1 \not\Rightarrow T_2$: $(X, \mathcal{T}_{co})$, X infini.

Définition

- $(X, \mathcal{T})$ esp. top. Une *propriété* $\mathcal{P}$ est dite *héréditaire* si:

  $(X, \mathcal{T}) \in \mathcal{P}, S \subseteq X \Longrightarrow (S, S_{\mathcal{T}}) \in \mathcal{P}$.
- $(X, \mathcal{T})$ esp. top. Une *propriété* $\mathcal{P}$ est dite *topologique* si:

  $\mathcal{P}$ est une invariante topologique *ie* chaque image homéomorphe d'un ens. $S \subseteq X$ ayant P a aussi P.

2) Remarques • T_1 et T_2 sont des propriétés héréditaires et topologiques (exo).

• $X \quad T_2 \Longleftrightarrow$ l'intersection des voisinages fermés de x coïncide avec $\{x\}$ (exo.).

Définition

- Un esp. top. X est dit $\underline{T_3}$ si $\forall$ fermé $F \subseteq X$, $\forall x \notin F$, $\exists$ des ouverts U, V *t.q.* $x \in U$, $F \subseteq V$ et $U \cap V = \emptyset$.
- Un esp. top. X est dit $\underline{T_4}$ si $\forall$ fermés E et F de X tq $E \cap F = \emptyset$, $\exists$ des ouverts U et V *t.q.* $E \subseteq U$, $F \subseteq V$ et $U \cap V = \emptyset$.
- X est dit *régulier* si X est T_3 et T_1.
- X est dit *normal* si X est T_4 et T_1.

Remarques

- $T_2 \not\Rightarrow T_3$ (exo.) • $T_3 \not\Rightarrow T_2$:
  $X = \{a, b, c\} \quad \mathcal{T} = \{\emptyset\, , X\, , \{a\}\, , \{b, c\}\}$
- X régulier $\Rightarrow X \quad T_2$
- X normal $\Rightarrow X$ régulier
- $T_3 \not\Leftarrow T_4$: $\quad X = \{a, b, c\} \quad \mathcal{T} = \{\emptyset\, , X\, , \{a\}\, , \{b\}\, , \{a, b\}\}$
- $T_3 \not\Rightarrow T_4$ (exo.)
- $T_1 + T_4 \Rightarrow T_1 + T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1$ (exo.)
- T_3 est une propriété héréditaire et topologique.
- T_4 est une propriété topologique, mais pas héréditaire (très difficile). Cependant $(X, \mathcal{T}) \quad T_4, S \subseteq X$ fermé $\Rightarrow (S, S|_{\mathcal{T}}) \quad T_4$ (exo.)

Remarque

$X \quad T_3 \Longleftrightarrow$ les voisinages fermés de chaque $x \in X$ forment une base de voisinages de $\mathcal{U}(x)$.

Proposition 8.1 (exo.)

1) $X \quad T_3 \Longleftrightarrow \forall$ *ouvert* $U \subseteq X$, $\forall x \in U$, $\exists$ *ouvert* V *t.q.* $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$

2) $X \quad T_4 \Longleftrightarrow \forall$ *ouvert* $U \subseteq X$, $\forall$ *fermé* $F \subseteq U$, $\exists$ *ouvert* V *t.q.* $F \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$

Théorème 8.2 : *lemme d'Urysohn*

Un esp. top. X *est* $T_4 \Longleftrightarrow \forall$ *fermés tq* $E, F \subseteq X$, $E \cap F = \emptyset$, *il existe une fonction* $f : X \to [0, 1]$ *continue t.q.* $f|_E \equiv 0$ *et* $f|_F \equiv 1$.

Démonstration

- " $\Leftarrow$ " Supposons qu'on a une telle fonction f; alors $\underbrace{f^{-1}\left([0\, , \tfrac{1}{2}[\right)}_{= U}$ ouvert dans X et $\underbrace{f^{-1}\left(]\tfrac{1}{2}\, , 1]\right)}_{= V}$ ouvert dans X. Alors $U \cap V = \emptyset$ et $E \subseteq U$, $F \subseteq V$.

- " $\Rightarrow$ " $E \cap F = \emptyset, \quad E, F$ fermés $\Rightarrow F^c$ ouvert et $E \subseteq F^c$

$\overset{8.1}{\Longrightarrow} \quad \exists$ ouvert $G_{1/2}$ *t.q.* $E \subseteq G_{1/2} \subseteq \overline{G_{1/2}} \subseteq F^c$

$\overset{8.1}{\Longrightarrow} \quad \exists$ ouverts $G_{1/4}\, , G_{3/4}$ *t.q.*

$E \subseteq G_{1/4} \subseteq \overline{G_{1/4}} \subseteq G_{1/2} \subseteq \overline{G_{1/2}} \subseteq G_{3/4} \subseteq \overline{G_{3/4}} \subseteq F^c$

et ainsi de suite.

Par récurrence, on obtient donc $\forall t \in \left\{\frac{k}{2^n}\,,\, k \in \mathbb{N}^*\,,\, n \in \mathbb{N}^*, k < 2^n\right\} =: D$ un ouvert G_t *t.q.* $\forall t_1\,,\, t_2 \in D\,,\, t_1 < t_2 \Rightarrow \overline{G_{t_1}} \subseteq G_{t_2}$.

Notons que $\overline{D} = [0,1]$. Définissons $f : X \to [0,1]$ par

$$f(x) = \begin{cases} \inf\limits_{x \in G_t} t & \text{s'il } \exists\, t \in D \ \ t.q. \ \ x \in G_t \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors on a $f|_F \equiv 1$ et $f|_E \equiv 0$. En plus, f est continue. Pour voir cela, utilisons le fait que $\left\{[0,c[\ ,\ ]d,1]\ ,\ 0 < c,d < 1\right\}$ est une subbase de $[0,1]$.

Soit $0 < c < 1$; alors $f(x) < c \Leftrightarrow \exists\, t \in D\,,\, t < c$ et $x \in G_t$; donc $f^{-1}([0,c[) = \bigcup_{t<c} G_t$ ouvert !

Soit $0 < d < 1$; alors $f(x) > d \Leftrightarrow \exists\, t \in D\,,\, t > d$ *t.q.* $x \notin \overline{G_t}$; ainsi $f^{-1}(]d,1]) = \bigcup\limits_{t>d} \overline{G_t}^c$ ouvert. □

Remarque On peut remplacer $[0,1]$ par $[a,b]\,,\, a < b$.

- Exemple Chaque esp. métrique est T_4: Pour $E,F \subseteq X\,,\, E \cap F = \emptyset\,,\, E,F$ fermés, choisir

$$f(x) = \frac{d(x,E)}{d(x,E) + d(x,F)}, \quad x \in X.$$

- Comme chaque espace métrique X est séparé, on a même que X est normal.
- Les espaces séparés compacts sont des espaces normaux (exo).

Corollaire 8.3

X esp. top. $T_4\,,\, G \subseteq X$ ouvert du type F_σ, (ie $G = \bigcup_{j=1}^{\infty} F_j, F_j$ fermé), alors il existe $f : X \to [0,1]$ continue t.q. $f > 0$ exactement sur G.

Démonstration

$G^c \cap F_j = \emptyset\,,\, G^c$ fermé.

$\overset{\text{Urysohn}}{\Longrightarrow} \exists\, f_j : X \to [0,1]$ continue *t.q.* $f_j|_{G^c} \equiv 0,\ f_j|_{F_j} \equiv 1$

$\Longrightarrow\ f = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} f_j \in C(X)$ et $f|_G > 0\ ,\ f|_{G^c} \equiv 0.$ □

Lemme 8.4

Soit X esp. top. $T_4\,,\, \emptyset \neq F \subseteq X$ fermé, $u \in C(F), u(F) \subseteq [-a,a], \quad a > 0$. Alors $\exists\, v \in C(X)$ t.q. :

1) $v : X \to \left[-\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right]$

2) $|u(x) - v(x)| \leq \frac{2a}{3} \quad \forall\, x \in F.$

Démonstration $A := u^{-1}\ \left(\left[-a\,,\, -\frac{a}{3}\right]\right), B := u^{-1}\ \left(\left[\frac{a}{3}\,,\, a\right]\right), A \cap B = \emptyset.$

u continue $\Longrightarrow A, B$ fermés dans $F \overset{F \text{ fermé}}{\Longrightarrow} A, B$ fermés dans X.

- <u>1er cas</u> : $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$

Urysohn $\Rightarrow \exists\, v \in C(X), \quad v\,(A) = \left\{-\frac{a}{3}\right\},\ v(B) = \left\{\frac{a}{3}\right\},\ v\,:\,X \to \left[-\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right]$

- $x \in A\ :\ -a \leq u\,(x) \leq -\frac{a}{3} = v(x)$

  $\Rightarrow \quad |u(x) - v(x)| \leq \frac{2a}{3}$
- $x \in B$: de même $|u\,(x) - v\,(x)| \leq \frac{2a}{3}$
- $x \in F \setminus (A \cup B) \Rightarrow |u\,(x)| < \frac{a}{3}$.

Comme $|v(x)| < \frac{a}{3}$, on a $|u\,(x) - v(x)| < \frac{a}{3} + \frac{a}{3} = \frac{2a}{3}$

- <u>2è cas</u> $\quad A = \emptyset$, $B \neq \emptyset$

Posons $v\,(x) = \frac{a}{3} \Rightarrow$ assertion

- <u>3è cas</u> $\quad A \neq \emptyset$, $B = \emptyset$

Posons $v(x) = -\frac{a}{3} \Rightarrow$ assertion

- <u>4è cas</u> $\quad A = \emptyset$, $B = \emptyset$.

Posons $v(x) = 0$. $\square$

Théorème 8.5 : *théorème de Tietze*

X esp. top.. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) $X \quad T_4$

(2) $\forall\, F \subseteq X$, F fermé, $F \neq \emptyset$, on a que chaque fonction continue $f\ :\ F \to [-1,1]$ admet un prolongement continue $f^*\ :\ X \to [-1,1] \quad (f^*(x) = f(x)\,,\, \forall\, x \in F)$.

Démonstration

- (2) $\Rightarrow$ (1) $\quad F_1, F_2$ fermés $F_1 \cap F_2 = \emptyset$.

On définit $f\ :\ F_1 \cup F_2 \to [-1,1]$ par $f|_{F_1} \equiv -1$ et $f|_{F_2} \equiv 1 \Rightarrow f \in C(F_1 \cup F_2)$ (car les images réciproques des fermés dans $[-1,1]$ sont $\emptyset, F_1, F_2, F_1 \cup F_2$).

Hyp. (2) $\Rightarrow \exists\, f^*\ :\ X \to [-1,1]$ continue telle que

$$f^*|_{F_1 \cup F_2} = f \Rightarrow f^*(F_1) = \{-1\}\,,\, f^*(F_2) = \{1\}$$

$\overset{\text{Urysohn}}{\Longrightarrow} \quad X \quad T_4$

- (1) $\Rightarrow$ (2)

- Soit $f\ :\ F \to [-1,1]$ continue

$\overset{\text{lemme 8.4}}{\Longrightarrow} \quad \exists\, f_1\ :\ X \to \left[-\frac{1}{3}\,,\,\frac{1}{3}\right] = \left[-1 + \frac{2}{3}\,,\, 1 - \frac{2}{3}\right],\ f_1$ continue et $|f(x) - f_1(x)| \leq \frac{2}{3} \quad \forall\, x \in F$.

- $f - f_1$ continue sur $F \overset{8.4}{\Rightarrow} \exists\, v_1 \,:\, X \to \left[-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\,,\, \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\right]$ continue t.q. $|(f-f_1)(x) - v_1(x)| \leq \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}$ sur F.

  Posons $f_2 = f_1 + v_1 \Rightarrow f_2 \,:\, X \to \left[-1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 , 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2\right]$ continue et $|f - f_2| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^2$ sur F.

  Par récurrence : supposons qu'on a construit f_{n-1}

  $\Longrightarrow f - f_{n-1}$ continue sur F et $f - f_{n-1} \,:\, F \to \left[-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} , \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right]$

  $\overset{8.4}{\Longrightarrow} \exists\, v_{n-1} \,:\, X \to \left[-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} , \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right]$ *t.q.*

  $|(f - f_{n-1}) - v_{n-1}| \leq \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \left(\frac{2}{3}\right)^n$ sur F.

  Posons $f_n = f_{n-1} + v_{n-1} \Rightarrow f_n$ continue sur X avec $f_n \,:\, X \to \left[-1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n , 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$ et $|f - f_n| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$ sur F

- $x \in X \,:\, |f_n(x) - f_m(x)| =$

  $\underset{m \geq n}{\overset{|}{=}} (f_m - f_{m-1}) + (f_{m-1} - f_{m-2}) + \cdots + (f_{n+1} - f_n)| =$

  $= |v_{m-1} + \ldots + v_n| \leq |v_{m-1}| + \ldots + |v_n| \leq$

  $\leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \cdots\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{1}{3}\frac{1}{1-2/3} = \left(\frac{2}{3}\right)^n.$

  Cauchy $\Rightarrow f_n(x) \to f^*(x) \quad \forall\, x \in X$ (convergence simple)

- $|f_n(x) - f^*(x)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (convergence uniforme)

  $(m \to +\infty)$

  $\Longrightarrow f^*$ continue.

- Comme $|f_n(x)| \leq 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n \quad \forall\, x$ et $|f(x) - f_n(x)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \forall\, x \in F$ on a pour $n \to \infty$

  $|f(x) - f^*(x)| = 0 \quad \forall\, x \in F$ et $|f^*(x)| \leq 1 \quad \forall\, x \in X$. $\square$

  Remarque On peut remplacer $[-1, 1]$ par $[a, b]$, $a < b$. (Voir aussi TD.)

Espaces Vectoriels Topologiques

Définition

E espace vectoriel sur le corps $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. $\mathcal{T}$ topologie T_1 sur E. On dit que $(E, \mathcal{T})$ est un *espace vectoriel topologique (evt)* si l'addition $\oplus \begin{cases} E \times E \longrightarrow E \\ (x, y) \mapsto x + y \end{cases}$ et la multiplication scalaire $\boxed{\overset{\bullet}{S}} \begin{cases} \mathbb{K} \times E \to E \\ (\alpha \, , \, x) \mapsto \alpha \cdot x \end{cases}$ sont continues,

où $E \times E$ et $\mathbb{K} \times E$ sont munis des topologies du produit.

- Exemple

- chaque espace normé $(E \, , \, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel topologique pour la topologie induite par la distance $d(x, y) = \|x - y\|$
- $(L^p([0,1]) \, , \, d_p) \qquad 0 < p < 1 \to$ espace métrique complet
  $(L^p([0,1]) \, , \, \|\cdot\|_p) \quad 1 \leq p < \infty \to$ espace normé
  $d_p\,(f, g) = \|f - g\|_p^p = \int_{[0,1]} |f - g|^p$.

Remarques.

1) E evt., $x_0 \in E$. Alors la translation $\begin{cases} E \to E \\ x \mapsto x + x_0 \end{cases}$ est un homéomorphisme.

2) $\alpha \in \mathbb{K}, \alpha \neq 0$. Alors l'homothétie $\begin{cases} E \to E \\ x \mapsto \alpha x \end{cases}$ est un homéomorphisme.

3) $\mathcal{U}(x_0) = x_0 + \mathcal{U}(0)$

4) $U \in \mathcal{U}(x_0) \Longrightarrow \exists V \in \mathcal{U}(0)$ tq $x_0 + V + V \subseteq U$ (ceci est dû à la continuité de $\oplus$: $0+0 = 0$).

IX - THÉORÈMES DE HAHN-BANACH

E evt, f forme linéaire sur E. Alors f n'est pas continue en général (voir 9.10).

Les formes linéaires sont déterminées de façon unique par la donnée de leur image sur une base algébrique de E. Notons que d'après le lemme de Zorn, chaque espace vectoriel possède une base algébrique.

$F \subseteq E \, , F$ sev. $f : F \to \mathbb{K}$ linéaire. Alors f possède un prolongement linéaire $f^* : E \to \mathbb{K}$. En effet, soit $E = F \oplus G$, où G est un supplémentaire algébrique de F. Soit $x = u + v, u \in F, v \in G$. On pose $f^*(x) = f(u)$.

$\Rightarrow \; f^* \in l\,(E, \mathbb{K})$

Définition

E espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. On peut considérer le même ensemble de vecteurs E avec la même addition comme un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ en restreignant à $\mathbb{R} \times E$ l'application

$(\lambda\,,\,x) \mapsto \lambda \cdot x$, définie primitivement sur $\mathbb{C} \times E$. L'espace vectoriel définie ainsi sera noté par $E_{\mathbb{R}}$ et est appelé l'*espace vectoriel réel sous-jacent à E.*

Proposition 9.1

E espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, $E_{\mathbb{R}}$ l'espace vectoriel réel sous-jacent à E.

1 - *Soit f une forme linéaire (complexe) sur E ($f \in l\,(E, \mathbb{C})$) et soit u sa partie réelle ie $u\,(x) = Re\, f(x)\,,\, x \in E$. Alors u est une forme linéaire sur $E_{\mathbb{R}}$ ($u \in l\,(E_{\mathbb{R}}\,, \mathbb{R})$) et $\forall\, x \in E\,,\, f(x) = u\,(x) - i\,u\,(i\,x)$* $\quad (*)$

2 - *Soit $u \in l\,(E_{\mathbb{R}}\,, \mathbb{R})$. On définit f par $(*)$. Alors $f \in l\,(E\,, \mathbb{C})$ et $u = Re\, f$.*

3 - *Si E est normé alors u continue $\Longleftrightarrow$ f continue. Dans ce cas, ces formes linéaires ont la même norme.*

Démonstration

1) • $z = a + ib \Rightarrow z = Re\, z - i\, Re\,(i\,z) \Rightarrow (*)$

• $\alpha, \beta \in \mathbb{R}\,,\; x, y \in E \Rightarrow u\,(\alpha\, x + \beta\, y) = \alpha\, u\,(x) + \beta\, u\,(y)$

2) $u \in l\,(E_{\mathbb{R}}\,, \mathbb{R})\,,\ f$ donnée par $(*)$

$\Rightarrow\; f(x + y) = f(x) + f(y)$

et $\quad f(i\,x) = u\,(i\,x) - i\,u\,(i(ix))$

$\qquad\qquad = u\,(i\,x) - i\,u\,(-x) = u\,(ix) + i\,u\,(x)$

$\qquad\qquad = i\,f(x)$

$\Rightarrow\; f \quad \mathbb{C}$-linéaire.

(Notons que $f\,(i\,\alpha\,x) = \alpha\, f\,(ix)$ par la $\mathbb{R}$-linéarité de u). De plus, $Re\, f = u\,$.

3) • L'assertion sur la continuité est claire

• $|u\,(x)| = |Re\, f(x)| \leq |f(x)| \Rightarrow \sup\limits_{\|x\|=1} |u(x)| \leq \sup\limits_{\|x\|=1} |f(x)| \Longrightarrow$

$\|u\| \leq \|f\|$.

$\forall\, x \in E\,,\, \exists\, \lambda \in \mathbb{C}\,,\; |\lambda| = 1 \;\; t.q. \;\; |f(x)| = \lambda\, f(x)$

$\Rightarrow |f(x)| = \lambda\, f(x) \underset{\mathbb{C}-lin}{=} f\,(\lambda\, x) \underset{\substack{\text{image} \\ \text{réelle } (*)}}{=} u\,(\lambda\, x) \leq \|u\|\; \|\lambda\, x\| = \|u\|\; \|x\|$

$\overset{\sup}{\Rightarrow} \|f\| \leq \|u\|$.

Finalement $\|u\| = \|f\|\,$. $\square$

Définition

E espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Une application $p\,:\, E \to \mathbb{R}$ est dite *sublinéaire* si :

1) $p\,(\lambda\, x) = \lambda\, p\,(x) \quad \forall\, x \in E\,, \forall\, \lambda > 0.$

2) $p\,(x + y) \leq p\,(x) + p\,(y) \quad \forall\, x, y \in E.$

- Exemple Chaque semi-norme est sublinéaire

$$\|\cdot\| : E \to [0,+\infty[\;\; t.q. \quad \bullet \; \|x\| \geq 0 \quad \forall\, x \in E$$
$$\bullet \; \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \; x, y \in E$$
$$\bullet \; \|\lambda\, x\| = |\lambda|\, \|x\| \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{K}, \forall\, x$$

Lemme 9.2

E espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, p application sublinéaire sur E, $M \subseteq E$ sev., $l : M \to \mathbb{R}$ linéaire, $l\,(x) \leq p\,(x) \quad \forall\, x \in M$. Soit $x_0 \in E \setminus M$. Alors il existe sur

$$H = M \oplus \mathbb{R}\, x_0 = \; vect\,(M\,,\, \{x_0\}) = \{x + \alpha\, x_0\,,\, x \in M\,,\, \alpha \in \mathbb{R}\}$$

une application linéaire L t.q. $L|_M = l$ et $L(x) \leq p\,(x) \quad \forall\, x \in H$

Démonstration

$$\xi\,,\, \eta \in M \Rightarrow l\,(\xi) + l\,(\eta) = l\,(\xi + \eta) \leq p(\xi + \eta)$$

$$p(\xi + \eta) = p(\xi + x_0 + \eta - x_0) \overset{p\ subli.}{\leq} p(\xi + x_0) + p(\eta - x_0)$$

$\Rightarrow \;\; l\,(\eta) - p\,(\eta - x_0) \leq p\,(\xi + x_0) - l\,(\xi)$

$\Rightarrow \;\; m_0 := \sup\limits_{\eta \in M} \; [l\,(\eta) - p\,(\eta - x_0)] \leq \inf\limits_{\xi \in M} \; [p\,(\xi + x_0) - l\,(\xi)] =: m_1$

Soit $m_0 \leq m_2 \leq m_1$. Pour $x \in M$, $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose

$$L\,(x + \lambda\, x_0) = l\,(x) + \lambda\, m_2 \Rightarrow L \in l\,(H, \mathbb{R})\,.$$

Soit $\lambda > 0\,,\, x \in M$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow L\,(x + \lambda\, x_0) &= l\,(x) + \lambda\, m_2 \leq l\,(x) + \lambda\, m_1 \\ &\leq l\,(x) + \lambda \left[p\Big(\underbrace{\frac{1}{\lambda}\;\; x}_{\xi} + x_0 \Big) - l\Big(\frac{x}{\lambda}\Big) \right] \\ &\overset{p\ sublin.}{=} p\,(x + \lambda\, x_0) \end{aligned}$$

Pour $\lambda < 0$ et $x \in M$, on a :

$$\begin{aligned} L(x + \lambda\, x_0) = l\,(x) + \lambda\, m_2 &\overset{\lambda<0}{\leq} l\,(x) + \lambda\, m_0 \\ &\leq l\,(x) + \lambda \left[-p\left(-\frac{x}{\lambda} - x_0 \right) + l\left(-\frac{x}{\lambda} \right) \right] \\ &= p\,(x + \lambda\, x_0) \end{aligned}$$

Pour $\lambda = 0 \,:\, L(x) = l\,(x) \leq p\,(x)$

$\Rightarrow L(y) \leq p\,(y) \quad \forall\, y \in H\,.$ $\square$

Théorème 9.3 (*Hahn-Banach*)
E espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, p appli. sublinéaire sur E, $M \subseteq E$ sev., $l\,:\,M \to \mathbb{R}$ linéaire t.q. $l\,(x) \leq p\,(x) \quad \forall\, x \in M$. Alors $\exists\, L \in l\,(E\,,\mathbb{R})$ t.q. $L|_M = l$ et $L(x) \leq p\,(x) \quad \forall\, x \in E$.

Démonstration
Soit $\mathcal{M} = \big\{(V,L)\,:\, M \subseteq V \subseteq E\,,\, V$ sev, $L \in l\,(V,\mathbb{R})\,,\, L|_M = l, \quad L(x) \leq p(x) \quad \forall\, x \in V\big\}$.
$\mathcal{M} \neq \emptyset$ car $(M,l) \in \mathcal{M}$. On définit une relation d'ordre « $\leq$ " sur $\mathcal{M}$ par :

$$(V_1\,,\,L_1) \leq (V_2\,,\,L_2) \Longleftrightarrow V_1 \subseteq V_2\ ,\ L_2|_{V_1} = L_1$$

• $\mathcal{M}$ est inductif, i.e. chaque partie $\mathcal{K}$ totalement ordonnée de $\mathcal{M}$ est majorée par un élément de $\mathcal{M}$:

$$U_0 := \big\{x \in E\,:\,\exists\,(U,L) \in \mathcal{K} \text{ avec } x \in U\big\} = \bigcup_{(U,L)\in\mathcal{K}} U$$

U_0 sev de E, car $\forall\, x_1\,,\,x_2 \in U_0\,,\,\exists\,(U_j\,,\,L_j) \in \mathcal{K}$ *t.q.* $x_j \in U_j$ $(j = 1,2)$
Sans perte de généralité $U_1 \subseteq U_2$ ($\mathcal{K}$ tot. ord.) $\Rightarrow x_1, x_2 \in U_2$

$$\overset{\substack{U_2\\ \text{esp.vect.}}}{\Longrightarrow} \quad \alpha_1\,x_1 + \alpha_2\,x_2 \in U_2 \overset{(U_2,L_2)\in\mathcal{K}}{\Longrightarrow} \alpha_1\,x_1 + \alpha_2\,x_2 \in U_0$$

• Posons $L_0(x) := L(x)$ si $x \in U$ et $(U,L) \in \mathcal{K}$
$\Rightarrow$ L_0 bien définie car: supposons que $(U_1\,,\,L_1), (U_2\,,\,L_2) \in \mathcal{K}$ avec $x \in U_1 \cap U_2$. $\mathcal{K}$ totalement ordonné $\underset{s.p.g.}{\Longrightarrow}$ $(U_1\,,\,L_1) \leq (U_2\,,\,L_2)$ *ie* $U_1 \leq U_2$ et $L_2|_{U_1} = L_1 \Longrightarrow L_2(x) = L_1(x)$.
De plus, L_0 linéaire, $(U_0\,,\,L_0) \in \mathcal{M}$, et $(U,L) \subseteq (U_0\,,\,L_0) \quad \forall\,(U,L) \in \mathcal{K}$
• Lemme de Zorn $\Rightarrow (\mathcal{M}\,,\,\leq)$ possède un élt max. (U,L)
$\overset{\text{Lemme 9.2}}{\Longrightarrow}$ $U = E$ et d'après la définition de $\mathcal{M}$, L a les propriétés voulues. $\square$

Théorème 9.5 (*Hahn-Banach 2ème version*)
E espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, $M \subseteq E$ sous-espace vectoriel, p semi-norme, $l : M \to \mathbb{K}$ linéaire, $|l(x)| \leq p(x) \quad \forall\, x \in M$. Alors $\exists\, L \in l\,(E,\mathbb{K})$ t.q. $L|_M = l$ et $|L(x)| \leq p\,(x) \quad \forall\, x \in E$.

Démonstration

- <u>1er cas</u> : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

hyp. 9.5 $\Rightarrow$ l et p satisfont les hyp. de 9.3

$\Rightarrow \exists\, L \in l\,(E,\mathbb{R})$ *t.q.* $L|_M = l$ et $L(x) \leq p\,(x) \quad \forall\, x \in E$

$\Rightarrow -L\,(x) = L(-x) \leq p\,(-x) \overset{\substack{p\\ \text{semi-}\\ \text{norme}}}{=} |-1|\,p\,(x) = p\,(x)$

$\Rightarrow |L(x)| \leq p\,(x) \quad \forall\, x \in E$

- <u>2ème cas</u> : $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Considérons $E_{\mathbb{R}}$ l'espace vectoriel réel sous-jacent. On définit
$u\,:\, M_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ par $u(x) = Re\,(l(x))$
$\Rightarrow u \in l\,(M_{\mathbb{R}}\,,\, \mathbb{R})$ et $|\underbrace{u\,(x)}_{\in\mathbb{R}}| \leq |\underbrace{l\,(x)}_{\in\mathbb{C}}| \leq p\,(x) \quad \forall\, x \in M_{\mathbb{R}}$

l $\mathbb{C}$-linéaire $\overset{\text{prop. 9.1}}{\Longrightarrow}$ $l\,(x) = u\,(x) - i\; u\,(i\,x) \quad \forall\, x \in M$

Le 1er cas nous donne un $\widetilde{L}\,:\, E_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ *t.q.* $\widetilde{L}|_{M_{\mathbb{R}}} = u$ et $|\underbrace{\widetilde{L}(x)}_{\in\mathbb{R}}| \leq p\,(x) \quad \forall\, x \in E_{\mathbb{R}}$.

On définit $L\,:\, E \to \mathbb{C}$ par $L(x) = \widetilde{L}(x) - i\,\widetilde{L}\,(ix)$

$\Rightarrow L$ est $\mathbb{R} - lin$. On a même que L est $\mathbb{C} - lin$ (prop. 9.1).
En plus $L|_{M} = l$.

Soit $x \in E$, $\exists\, \sigma \in \mathbb{C}$, $|\sigma| = 1$ *t.q.* $|L(x)| = \sigma\, L(x)$

$\Rightarrow |L(x)| = \sigma\, L(x) = L\,(\sigma\, x) = Re\,(L(\sigma\, x)) = \widetilde{L}\,(\sigma\, x) = |\widetilde{L}\,(\sigma\, x)| \leq p\,(\sigma\, x)$

p semi-norme $\Rightarrow p\,(\sigma\, x) = |\sigma|\, p\,(x) = p(x) \quad \forall\, x \in E$. Donc $|L(x)| \leq p(x)$. □

Corollaire 9.6
E espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, p semi-norme sur E, $x_0 \in E$, $x_0 \neq 0$. Alors

$$\exists\, L \in l\,(E\,,\, \mathbb{K}) \;\; t.q. \;\; L(x_0) = p(x_0) \quad et \quad |L(x)| \leq p(x) \quad \forall\, x \in E\,.$$

Démonstration
Soit $F = vect\, x_0 = \mathbb{K} x_0$. On définit $l\,:\, F \to \mathbb{K}$ par $l\,(\lambda\, x_0) = \lambda\, p\,(x_0) (\lambda \in \mathbb{K})$

$\Rightarrow l$ est $\mathbb{K}$-linéaire et $l(x_0) = p(x_0)$. Pour $x = \lambda x_0 \in F$ on obtient: $|l(x)| = |l\,(\lambda\, x_0)| =$
$|\lambda\, p(x_0)| = |\lambda|\, p(x_0) \overset{p\text{ semi-norme}}{=} p(\lambda\, x_0) = p(x)$

$\overset{\text{Theor. 9.5}}{\Longrightarrow} \quad \exists\, L \in l\,(E, \mathbb{K}) \;\; t.q. \;\; L|_{F} = l \quad$ et $\quad |L(x)| \leq p\,(x) \quad \forall\, x \in E$ □

Théorème 9.7 Hahn-Banach pour les espaces normés.
E espace normé sur $\mathbb{K}$, F sev. de E, $l\,:\, F \to \mathbb{K}$ forme linéaire continue. Alors il existe une application linéaire continue $L\,:\, E \to \mathbb{K}$ t.q. $L|_{F} = l$ et $\|L\| = \|l\|$.

Démonstration
Soit $p\,:\, E \to [0, +\infty[$ définie par $p(x) = \|l\|\; \|x\|_E$

$\Rightarrow p$ semi-norme et $\forall\, x \in F$ $|l\,(x)| \leq \|l\|\, \|x\|_E = p(x)$

$\overset{9.5}{\Rightarrow} \exists\, L\,:\, E \to \mathbb{K}$ linéaire, $L|_{F} = l$ telle que $|L(x)| \leq p\,(x) = \|l\|\; \|x\|_E \quad \forall\, x \in E$.

$\Rightarrow L$ continue (appl. lin. bornée) et $\|L\| \leq \|l\|$. Supposons $F \neq \{0\} \Longrightarrow$

$$\begin{aligned}\|L\| = \sup_{\substack{x\in E\\ x\neq 0}} \frac{|L(x)|}{\|x\|} &\geq \sup_{\substack{x\in F\\ x\neq 0}} \frac{|L(x)|}{\|x\|}\\ &= \sup_{\substack{x\in F\\ x\neq 0}} \frac{|l(x)|}{\|x\|} = \|l\|.\end{aligned}$$

Donc $\|L\| = \|l\|$. □

Lemme 9.8

E espace normé, $F \subseteq E$ sev. propre, $x_0 \in E \setminus F$. Supposons que $\delta := dist\,(x_0, F) > 0$. Alors il existe une forme linéaire continue L sur E t.q. $\|L\| = 1$, $L(x_0) = \delta$ et $L|_F \equiv 0$.

Démonstration

Posons $F_0 = [x_0\,, F] = \{x = \alpha\, x_0 + y\,,\ \alpha \in \mathbb{K},\ y \in F\}$ (représ. uniq.). On définit
$l : \begin{cases} F_0 \to \mathbb{K} \\ x = \alpha\, x_0 + y \mapsto l\,(x) := \alpha \cdot \delta \end{cases}$

$\Rightarrow$ l linéaire, $l|_F \equiv 0 \qquad l\,(x_0) = \delta$.

Soit $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}\,,\ y \in F\,,$

$x = \alpha\, x_0 + y \Rightarrow \|x\| = \|\alpha\, x_0 + y\| = |\alpha| \left\| x_0 + \frac{1}{\alpha}\, y \right\| \geq |\alpha|\ d\,(x_0\,, F) = |\alpha|\ \delta = |l\,(x)|$

$\Rightarrow$ l continue et $\|l\| \leq 1$

Considérons $(y_n) \in F$ *t.q.* $\|x_0 - y_n\| \to \delta$

$\underset{(\delta>0)}{\Longrightarrow} \frac{|l(x_0-y_n)|}{\|x_0-y_n\|} \overset{l|_F\equiv 0}{=} \frac{|l(x_0)|}{\|x_0-y_n\|} \to \frac{l(x_0)}{\delta} = \frac{\delta}{\delta} = 1$

$\Rightarrow \|l\| = 1$

$\overset{\text{th. } 9.7}{\Rightarrow}$ assertion. □

Définition

$X \neq \emptyset\,,\ \mathcal{F} \subseteq \mathbb{C}^X$. $\mathcal{F}$ *sépare les points* ($\mathcal{F}$ famille séparante) si
$\forall\, x_1\,,\, x_2 \in X\,,\ x_1 \neq x_2\,,\ \exists\, f \in \mathcal{F}$ *t.q.* $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Corollaire 9.9

Soit E^* l'espace normé des formes linéaires continues sur E. Alors on a :

a) Si $E \neq \{0\}$ est un espace normé alors $E^* \neq \{0\}$ et E^* est séparante.
b) De plus, $\forall\, x_0 \neq 0\,,\ x_0 \in E\,,\ \exists\, L \in E^*$ t.q. $\|L\| = 1\,,\ L(x_0) = \|x_0\|$.

Démonstration

- Posons $F = \{0\}$, $\quad \delta = dist\,(x_0\,, F) \underset{F\,\text{fermé}}{\Longrightarrow} \delta > 0$ et $\delta = \|x_0\|$

$\overset{\text{lemme } 9.8}{\Longrightarrow}$ assertion b)

• Soit $x_1 \neq x_2 \Rightarrow x_1 - x_2 \neq 0 \overset{b)}{\Longrightarrow} \exists L \in E^*$, $L(x_1 - x_2) = \|x_1 - x_2\| \neq 0 \Rightarrow L(x_1) \neq L(x_2)$
$\Rightarrow E^*$ séparante □

Remarque Il est possible que $E^* = \{0\}$ si E est un evt. arbitraire

- Exemple $L^p([0,1])$ $0 < p < 1$. (exo)

Proposition 9.10
$E \neq \{0\}$ espace normé. Alors chaque forme linéaire f sur E est continue $\Leftrightarrow \dim E < +\infty$.

Démonstration
" $\Leftarrow$ " Soit $(x_1, \dots, x_n)$ base algébrique de E ($\dim E = n < +\infty$). Notons que toutes les normes sur E sont équivalentes. Soient
$y_k \in E$, $y_k = \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu^{(k)} x_\nu$, $y = \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu x_\nu$. Alors $y_k \xrightarrow{\|\cdot\|} y \iff \alpha_\nu^{(k)} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} a_\nu \quad \forall \nu = 1, \cdots, n$ (*).
Soit $f : E \to \mathbb{K}$ linéaire. Alors $f(y_k) = \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu^{(k)} f(x_\nu) \xrightarrow{(*)} \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu f(x_\nu) = f(y)$
" $\Rightarrow$ " Soit $\dim E = +\infty$. Construisons une forme linéaire discontinue. Soit $\mathcal{B}$ base algébrique de E. Soit $\{b_n \, , \, n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{B}$, s.p.g. $\|b_n\| = 1$. Soit $l\,(b_\nu) = \nu$, $\nu = 1, 2, \dots$ et $l\,(b) = 0 \; \forall \, b \in \mathcal{B} \setminus \{b_n \, , \, n \in \mathbb{N}\}$.
l admet un prolongement linéaire sur E (noté aussi par l).
Mais l est discontinue car l non bornée sur la boule unité de E: $\frac{|l(b_\nu)|}{\|b_\nu\|} = \nu \to \infty$. □

X - FORMES LINÉAIRES CONTINUES SUR DES ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES - SÉPARATION D'ENSEMBLES CONVEXES

A - Préliminaires

Théoreme 10.1
Soit E evt. et $l \in l(E, \mathbb{K})$, $l \neq 0$, une forme linéaire. Alors sont équivalentes :

1) l continue
2) $Ker\, l$ fermé
3) $Ker\, l$ n'est pas dense dans E
4) $\exists\, V$ voisinage $\in \mathcal{U}(0)$ t.q. l bornée sur V
5) l est continue à l'origine.

Démonstration

- (1) $\Rightarrow$ (2) : $Ker\, l = l^{-1}(\{0\})$ fermé

- (2) $\Rightarrow$ (3) : $l \neq 0 \Rightarrow Ker\, l \neq E$

- (3) $\Rightarrow$ (4)

Hyp. $\Rightarrow \exists x_0 \in (E \setminus Ker\, l)^0 \neq \emptyset \Rightarrow \exists$ voisinage W de x_0 $t.q.$ $W \cap Ker\, l = \emptyset \quad (**)$

$W = x_0 + U$ où $U \in \mathcal{U}(0)$. Comme la multiplication par un scalaire est continue, $\exists\, \delta > 0$, et $\widetilde{U} \in \mathcal{U}(0), \widetilde{U}$ ouvert, $t.q.$ $\alpha \widetilde{U} \subseteq U \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}$ $t.q.$ $|\alpha| < \delta$.

Posons $V := x_0 + \widetilde{V}$ où $\widetilde{V} = \bigcup_{|\alpha|<\delta} \alpha \widetilde{U} \Rightarrow V \in \mathcal{U}(x_0)$.

On a $x \in \widetilde{V} \Rightarrow \lambda x \in \widetilde{V} \quad \forall |\lambda| \leq 1 \quad (*)$

De plus, $l(\widetilde{V})$ borné dans $\mathbb{K}$ car : supposons que $l(\widetilde{V})$ soit non borné $\Rightarrow l(\widetilde{V}) = \mathbb{K}$ car :

Soit $t \in \mathbb{K}, t \neq 0$. Hyp. $\Rightarrow \exists\, x_t \in \widetilde{V}$ $t.q.$ $|l(x_t)| \geq |t|$.

Soit $\lambda := \frac{t}{l(x_t)} \Rightarrow |\lambda| \leq 1 \overset{(*)}{\Rightarrow} \lambda x_t \in \widetilde{V}$ et $l(\lambda x_t) = t$.

$l(\widetilde{V}) = \mathbb{K} \Longrightarrow \exists\, y \in \widetilde{V}$ $t.q.$ $l(y) = -l(x_0)$

$\Rightarrow \underbrace{x_0 + y}_{\in x_0 + \widetilde{V} = V} \in Ker\, l \Rightarrow V \cap Ker\, l \neq \emptyset$

or $V \cap Ker\, l \subseteq (x_0 + U) \cap Ker\, l \subseteq W \cap Ker\, l$. Contradiction à $(**)$.

Conclusion: $l(\widetilde{V})$ borné $\Rightarrow l(V)$ borné $\Rightarrow$ (4).

- (4) $\Rightarrow$ (5)

Hyp. $\Rightarrow \exists\, V \in \mathcal{U}(0), \exists\, M > 0$ $t.q.$ $\forall x \in V: \ |l(x)| < M$

Soit $\varepsilon > 0 \Rightarrow |l(x)| < \varepsilon$ si $x \in U := \frac{\varepsilon}{M} V \in \mathcal{U}(0)$

$\Rightarrow l$ continue en 0.

- (5) $\Rightarrow$ (1)

Soit $x_0 \in E$ et K voisinage de $l(x_0)$ dans $\mathbb{K}$. $K = l(x_0) + \widetilde{K}$, $\widetilde{K}$ voisinage de 0 dans $\mathbb{K}$.

l continue en $0_E \Rightarrow \exists\, U \in \mathcal{U}(0_E)$ $t.q.$ $l(U) \subseteq \widetilde{K}$

$\Rightarrow l(x_0 + U) = l(x_0) + l(U) \subseteq l(x_0) + \widetilde{K} = K$

$\Rightarrow l$ continue en x_0. □

Proposition 10.2

E evt., $l \neq 0$ forme linéaire sur E, (donc $l \in l(E, \mathbb{K})$). Alors l est ouverte (ie $l(U)$ ouvert $\forall$ ouvert U).

Démonstration

Comme $l \neq 0$, $\exists\, x_0 \in E$ $t.q.$ $l(x_0) = 1 \in \mathbb{K}$. Soit U ouvert dans E et $w_1 \in l(U) \subseteq \mathbb{K}$.

$\Rightarrow \exists\, x_1 \in U$ $t.q.$ $l(x_1) = w_1$.

U ouvert, $\oplus$ et $\boxed{\overset{\bullet}{S}}$ continues $\Rightarrow \exists\, \varepsilon_0 > 0$ $t.q.$ $x_1 + \xi\, x_0 \in U\ \forall\, \xi \in \mathbb{K}$ avec $|\xi| < \varepsilon_0$

$\Rightarrow w_1 + \xi \cdot 1 = l(x_1) + \xi\, l(x_0) = l(x_1 + \xi\, x_0) \in l(U) \quad \forall |\xi| < \varepsilon_0 \qquad \Rightarrow B(w_1, \varepsilon_0) \subseteq l(U)$

$\Rightarrow w_1$ point intérieur de $l(U) \Rightarrow l(U)$ ouvert. □

Définition

E espace vectoriel sur $\mathbb{K}$

1) $C \subseteq E$ *convexe* si $\forall\, x, y \in C :\ 0 \leq \alpha \leq 1 \Rightarrow \alpha\, x + (1-\alpha)\, y \in C$

2) $M \subseteq E$ *absorbant* si $\forall\, x \in E\,,\, \exists\, \alpha_0 > 0$ *t.q.* $\forall\, \alpha \in \mathbb{K},\ |\alpha| \geq \alpha_0 \Rightarrow x \in \alpha\, M$

3) $M \subseteq E$ *équilibré* (balanced, kreisförmig) si $\lambda\, M \subseteq M \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{K},\ |\lambda| \leq 1$.

Remarques: (exo.)

a) M absorbant $\Rightarrow 0_E \in M$.

b) M équilibré $\Longrightarrow \alpha\, M = |\alpha|\, M \ \ \forall\, \alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.

c) Si E est evt, alors [M équilibré $\Longrightarrow M^0$ équilibré].

Lemme 10.3

E espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. $\widetilde{C}\,,\, C \subseteq E$ convexes. Alors

1) $\forall\, x \in E\,,\, \forall\, \alpha \in \mathbb{K},\ x + C\,,\ \alpha\, C$ convexes.

2) C_λ convexes $\Longrightarrow \bigcap_\lambda C_\lambda$ convexe.

3) $\alpha\,,\, \beta \geq 0 \Rightarrow (\alpha+\beta)\, C = \alpha\, C + \beta\, C$

4) $C + \widetilde{C}$ convexe.

5) C^0 et $\overline{C}$ convexes si E evt.

Démonstration

(1),(2),(4) clairs.

(3) clair pour $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$

si $\alpha > 0$ et $\beta > 0 \Rightarrow (\alpha+\beta)\, C \subseteq \alpha\, C + \beta\, C$

C convexe $\Rightarrow \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\, C + \frac{\beta}{\alpha+\beta}\, C \subseteq C$

$\Rightarrow \alpha\, C + \beta\, C \subseteq (\alpha+\beta)\, C \Rightarrow (3)$

(5),(6) exo. $\square$

Proposition 10.4

Soit E evt. Alors chaque voisinage U de 0_E est absorbant.

Démonstration

Soit $x \in E$. Si $x = 0_E$ alors $0_E = \alpha\, 0_E \in U\,,\, \forall \alpha \in \mathbb{K}\ \ \forall U \in \mathcal{U}(0_E)$.

Si $x \neq 0_E \overset{\boxed{\overset{\bullet}{S}}\ \textit{continue}}{\Longrightarrow} \exists\, \varepsilon > 0$ *t.q.* $\alpha\, x \in U\,,\, \forall\, |\alpha| \leq \varepsilon$. Alors $x \in \beta\, U \quad \forall\, |\beta| \geq \frac{1}{\varepsilon}$ $\square$

Proposition 10.5

E evt. Alors chaque voisinage U de 0_E contient un voisinage de 0_E qui est équilibré.

Démonstration

Soit $U \in \mathcal{U}(0_E) \overset{\boxed{\overset{\bullet}{S}}\ \textit{continue}}{\Longrightarrow} \exists\ \ \delta > 0\,,\, \exists\, V \in \mathcal{U}(0_E), V$ ouvert tq $\forall\, \alpha \in \mathbb{K} :\ |\alpha| \leq \delta \Longrightarrow \alpha\, V \subseteq U$.

Posons $W := \bigcup_{|\alpha| \leq \delta} \alpha\, V \Rightarrow W$ ouvert, $0_E \in W \subseteq U$.

W est équilibré car : soit $|\beta| \leq 1$, $x \in W \Rightarrow \beta\, x \in \beta\, W$ et $x \in \alpha\, V$ pour un $|\alpha| \leq \delta \Rightarrow \beta\, x \in \beta\, \alpha\, V$.
Comme $|\beta\alpha| \leq |\alpha| \leq \delta$ on a : $\beta\alpha\, V \subseteq W \Rightarrow \beta\, x \in W \Rightarrow \beta\, W \subseteq W$. $\square$

Définition

E espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, $M \subseteq E$ absorbant. Alors
$p_M(x) = \inf\{\alpha > 0 \,:\, x \in \alpha M\}$ $(x \in E)$
s'appelle jauge (ou fonctionnelle) de Minkowski associée à M.

Remarque

1) $\forall\, x \in E$, on a $0 \leq p_M(x) < \infty$ car M absorbant
2) si $(E\,,\,\|\;\;\|)$ espace normé alors $p_B(x) = \|x\|$ où B est la boule unité de E.

Théorème 10.6

Soit E espace vectoriel.

(1) $C \subseteq E$ convexe, absorbant $\Rightarrow p_c$ est sublinéaire.

(2) Si p est une semi-norme sur E, alors $B = \{x \in E : p(x) < 1\}$ est convexe, absorbant et équilibré et $p = p_B$.

(3) Si C est convexe, absorbant et équilibré, alors p_C semi-norme.

(4) E evt., $U \in \mathcal{U}(0_E)$ convexe $\Rightarrow U = \{x \in E \,:\, p_U(x) < 1\}$

(5) E evt., U absorbant, équilibré $\Rightarrow \{p_U < 1\} \subseteq U \subseteq \{p_U \leq 1\}$

(6) E evt., U absorbant, équilibré : $U \in \mathcal{U}(0_E) \Leftrightarrow B \in \mathcal{U}(0_E)$ où $B = \{p_U < 1\}$.

(7) E evt., U absorbant, équilibré, ouvert $\Rightarrow U = \{x \in E \,:\, p_U(x) < 1\}$.

Démonstration

1) $\forall\, \varepsilon > 0\,, \exists\, \alpha, \beta > 0$ *t.q.* $p_c(x) \leq \alpha < p_c\,(x) + \varepsilon$ si $x \in \alpha\, C$ et $p_c(y) \leq \beta \leq p_c\,(y) + \varepsilon$ si $y \in \beta C$.
C convexe $\overset{10.3}{\Longrightarrow} x + y \in (\alpha + \beta)\, C$

$$\Longrightarrow\; p_c\,(x+y) \leq \alpha + \beta \leq p_c\,(x) + p_c(y) + 2\varepsilon$$
$$\overset{\varepsilon \to 0}{\Longrightarrow}\; p_c\,(x+y) \leq p_c(x) + p_c(y)$$

- si $\lambda = 0$: $p_c\,(0 \cdot x) = p_c\,(0_E) = \inf\{\alpha > 0 :\, 0_E \in \alpha\, C\} = 0$, car $0_E \in C$ (C absorbant).
Comme $0 \cdot p_c\,(x) = 0$ on obtient l'assertion.

- si $\lambda > 0$: $p_c\,(\lambda\, x) = \inf\left\{\alpha > 0 \,:\, x \in \frac{\alpha}{\lambda}\, C\right\} \overset{\beta = \frac{\alpha}{\lambda}}{=}$
$\lambda \inf\{\beta > 0 \,:\, x \in \beta\, C\} = \lambda\, p_c\,(x)$

2) B convexe car $p(x) < 1$, $p(y) < 1$, $0 \leq t \leq 1$

$$\Longrightarrow p(tx + (1-t)\,y) \overset{\substack{\text{semi-}\\ \text{norme}}}{\leq} p\,(t\,x) + p\,((1-t)\,y)$$

$$= t\,\underbrace{p\,(x)}_{<1} + (1-t)\,\underbrace{p\,(y)}_{<1} < 1$$

- B équilibré car : $x \in B\,,\ |\alpha| \leq 1\,,\ \alpha \neq 0 \Rightarrow p\,(\alpha\,x) \overset{\substack{\text{semi-}\\ \text{norme}}}{=} |\alpha|\,p\,(x) \underset{\alpha\neq 0}{<} |\alpha| \cdot 1 \leq 1 \Rightarrow \alpha\,x \in B\,.$
En plus $0_E \in B$ et $p(0x) = p(0_E) = 0$. Donc B est equilibré.
- B absorbant car : soit $x \in E\,,\ \alpha_0 > p\,(x)$

$$\alpha \in \mathbb{K}\ \ t.q.\ \ |\alpha| \geq \alpha_0 \Rightarrow p\left(\frac{1}{\alpha}\,x\right) \overset{\text{s.n}}{=} \frac{1}{|\alpha|}\,p\,(x) \leq \frac{1}{\alpha_0}\,p\,(x) < 1$$

$\Longrightarrow \frac{1}{\alpha}\,x \in B \Rightarrow x \in \alpha\,B\,.$
- $p = p_B\ :\ p_B(x) = \inf\{\alpha > 0\ :\ x \in \alpha\,B\}\quad (B \text{ abs.})$

$$= \inf\left\{\alpha > 0\ :\ \frac{x}{\alpha} \in B\right\}$$
$$= \inf\left\{\alpha > 0\ :\ p\left(\frac{x}{\alpha}\right) < 1\right\}$$
$$\overset{\text{s.n.}}{=} \inf\{\alpha > 0\ :\ p\,(x) < \alpha\} = p(x)$$

3) hyp. $\overset{(1)}{\Longrightarrow} p_c$ sublinéaire. Soit $\beta \in \mathbb{K},\ \beta \neq 0\,.$

$$p_c\,(\beta\,x) = \inf\{t > 0\,,\ \beta\,x \in t\,C\} = \inf\left\{t > 0\,,\ x \in \frac{t}{\beta}\,C\right\}$$
$$\overset{C\ \text{éq.}}{=} \inf\left\{t > 0\,,\ x \in t\left(\frac{1}{|\beta|}\,C\right)\right\}$$
$$= |\beta|\ \inf\left\{\frac{t}{|\beta|} > 0\ :\ x \in \frac{t}{|\beta|}\,C\right\} = |\beta|\,p_c\,(x)$$

$\Longrightarrow p_c$ semi-norme.
4) $U \in \mathcal{U}(0_E) \underset{10.4}{\Longrightarrow} U$ absorbant $\Longrightarrow p_U$ bien définie.
Soit $p_U(x) < 1 \Rightarrow \exists\,\alpha > 0\ \ t.q.\ \ p_U(x) \leq \alpha < 1$ et $x \in \alpha\,U$, disons $x = \alpha\,y\,,\ y \in U$.
U convexe $\Rightarrow x = \alpha\,y + (1-\alpha)\,0_E \in U$
$\Longrightarrow \{p_U < 1\} \subseteq U\,.$
- Soit $x \in U\,,\ 0_E \in U\,,\ x = x + 0_E \in U$
$\oplus$ continue $\Rightarrow \exists$ voisinage V de 0_E dans $E\ \ t.q.\ \ x + V \subseteq U$.
Comme $0_E = 0 \cdot x \in V$ et mult. scalaire continue $\ \exists\,\delta > 0\ \ t.q.\ \ \delta\,x \in V\ $ et $\ x + \delta\,x = (1+\delta)\,x \in U \Rightarrow p_U(x) \leq \frac{1}{1+\delta} < 1$
$\Longrightarrow U = \{p_U < 1\}$

5) - $x \in E$, $p_U(x) < 1 \Rightarrow \exists\, \alpha \in]0,1[$ $\;t.q.\;$ $x \in \alpha U$

$\Longrightarrow \frac{x}{\alpha} \in U.$

U équilibré $\overset{|\alpha|\leq 1}{\Longrightarrow} x = \alpha \cdot \frac{x}{\alpha} \in U$

$\Longrightarrow \{p_u < 1\} \subseteq U.$

- $x \in U \Rightarrow x \in 1\,.\,U \Rightarrow p_U(x) = \inf\{\alpha > 0 \,:\, x \in \alpha U\} \leq 1$

$\Longrightarrow U \subseteq \{p_U \leq 1\}$

6) "$\Rightarrow$" $U \in \mathcal{U}(0_E) \Rightarrow \exists$ ouvert $\widetilde{U}$ $\;t.q.\;$ $0_E \in \widetilde{U} \subseteq U.$

Soit $x \in \widetilde{U} \Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0$ $\;t.q.\;$ $x + \varepsilon x = (1+\varepsilon)\, x \in \widetilde{U} \subseteq U$

$\Longrightarrow$ $p_U(x) \leq \frac{1}{1+\varepsilon} < 1 \Rightarrow \widetilde{U} \subseteq B \Rightarrow B \in \mathcal{U}(0_E)$

"$\Leftarrow$" $B \in \mathcal{U}(0_E) \overset{(5)}{\Longrightarrow} 0_E \in B \underset{(U \text{ équil.})}{\subseteq} U$

$\Longrightarrow U \in \mathcal{U}(0_E)$

7) $B \underset{(5)}{\subseteq} U$ (équil.) $\qquad 0_E \in U \underset{(\text{abs.})}{\subseteq} B$ (voir dém. 6 "$\Rightarrow$", $\widetilde{U} \to U$) $\square$

Proposition 10.7

Soient E evt. et $U \subseteq E$ absorbant, équilibré et convexe. Alors U est un voisinage de $0_E \Leftrightarrow p_U$ continue sur E.

Démonstration

"$\Leftarrow$" $[0,1[$ ouvert dans $[0\,,+\infty[$, p_U continue $\Rightarrow B = \{p_U < 1\} = p_U^{-1}([0,1[)$ ouvert (dans E).

$0_E \in B \underset{(5)}{\subseteq} U \underset{\substack{B \\ \text{ouvert}}}{\Longrightarrow} U \in \mathcal{U}(0_E)\,.$

"$\Rightarrow$" $\alpha > 0$, $p_U^{-1}([0,\alpha[) = \{x \,:\, p_U(x) < \alpha\} = \alpha\, B$ car p_U semi-norme. (10.6, (3))

$U \in \mathcal{U}(0_E) \underset{(6)}{\Longrightarrow} B \in \mathcal{U}(0_E) \Longrightarrow \alpha\, B \in \mathcal{U}(0_E)$

$\Longrightarrow p_U$ continue en 0_E.

Enfin $|p_U(x) - p_U(y)| \underset{\substack{p_U \\ \text{sublin.}}}{\overset{\substack{10.6 \\ (1)}}{\leq}} p_U(x-y) \Rightarrow p_U$ continue sur E. $\square$

B - Théorèmes de Hahn-Banach (*versions géométriques*)

$$x_0 + Ker\, u = \{x \in E \,:\, u(x) = u(x_0)\}$$

10.8 : 1er théorème de séparation

E evt., $A, B \subseteq E$, $A, B \neq \emptyset$, convexes, $A \cap B = \emptyset$, A ouvert.
Alors $\exists\, L \in E^*$, $\exists\, \gamma \in \mathbb{R}$ t.q. $\forall\, a \in A\,, \forall\, b \in B \quad Re\, L(a) < \gamma \leq Re\, L\,(b)$

Démonstration

- 1 - E réel, $a_0 \in A\,, b_0 \in B\,, x_0 := b_0 - a_0$. Posons $C := A + x_0 - B \Longrightarrow 0_E \in C$. C convexe (10.3) et C ouvert car

$$C = \bigcup_{b \in B} \underbrace{(\underbrace{A}_{\text{ouvert}} + \underbrace{x_0 - b}_{\substack{\text{transl. de}A\\ =\text{homéomorph.}}})}_{\text{ouvert}} \qquad \text{ouvert.}$$

$x_0 \notin C$ (sinon $A \cap B \neq \emptyset$).
Soit $p = p_c$ la fonctionnelle de Minkowski associée à C (notons que cela est bien déf. car $C \in \mathcal{U}(0_E)$, donc, d'après 10.4 absorbant)
10.6 $\overset{C_{\text{conv.}}}{\Longrightarrow}$ $C = \{x \,:\, p(x) < 1\} \quad (*)$
En particulier $p(x_0) \geq 1$. Soit $F = x_0\,\mathbb{R} = Vect\,\{x_0\}$, $x = \alpha x_0 \in F$.
Sur F on définit une forme linéaire l par $l(\alpha\, x_0) = \alpha$.

a) $\forall\, x \in F\,, l\,(x) \leq p\,(x)$ car :
si $\alpha \leq 0$, évident (car $p \geq 0$).
si $\alpha > 0$ on a, $l\,(\alpha\, x_0) = \alpha = \alpha \cdot 1 \leq \alpha\, p\,(x_0) \overset{\substack{p \text{ sublin.}\\ 10.6\\ \downarrow}}{=} p\,(\alpha\, x_0)$

b) $\overset{9.3\ \text{Hahn-Banach}}{\Longrightarrow}$ $\exists\, L \in l\,(E\,, \mathbb{R})$ *t.q.* $L|_F = l$ et
$(**)$ $L(x) \leq p\,(x) \quad \forall\, x \in E$.

c) L est continue car :

$$x \in C \underset{(**)}{\overset{(*)}{\Longrightarrow}} L(x) < 1$$

$\Rightarrow\; -L(x) = L(-x) \leq p\,(-x) < 1$ si $-x \in C$.
Ainsi, $|L(x)| < 1$ si $x \in C \cap (-C)$. En plus $C \cap (-C) \in \mathcal{U}(0_E)$, car $\boxed{\overset{\bullet}{S}}$ est continue et C ouvert. Donc L est bornée sur un voisinage de $0_E \overset{10.1}{\Longrightarrow} L$ continue.
Soient $a \in A\,, b \in B$ alors $L\,a - L\,b + \underbrace{1}_{L(x_0)=1} = L(\underbrace{a - b + x_0}_{\in C}) < 1 \Longrightarrow L(a) < L(b) \Longrightarrow$ $LA \cap LB = \emptyset$ et LA est à gauche de LB.
A ouvert, $L \not\equiv 0 \overset{10.2}{\Longrightarrow} LA$ ouvert.

Posons $\gamma = \sup\{La \,:\, a \in A\}$.

$$\Rightarrow L(a) < \gamma \leq L(b) \quad \forall\, a \in A\,, \forall\, b \in B.$$

- 2 - E evt. sur $\mathbb{C}$. Considérons $E_{\mathbb{R}}$ l'espace vectoriel réel sous-jacent.

- 1er cas $\Rightarrow \exists\, L \in l\,(E_{\mathbb{R}}\,,\, \mathbb{R})$ avec les propriétés voulues.

Considérons $\widetilde{L}(x) = L(x) - i\,L\,(ix) \overset{9.1}{\Longrightarrow} \widetilde{L} \in l\,(E\,,\, \mathbb{C})$ et $Re\,\widetilde{L} = L$. En plus, $\widetilde{L}$ continue et $Re\,\widetilde{L}\,a < \gamma \leq Re\,\widetilde{L}\,b \quad \forall\, a \in A\,,\, b \in B.$ □

Définition

Un evt. E est *localement convexe* si chaque point de E possède une base de voisinages d'ensembles convexes, *ie* $\forall\, x \in E\,, \forall\, U \in \mathcal{U}(x)$, $\exists\, C$ convexe, $C \in \mathcal{U}(x)$, *t.q.* $x \in C \subseteq U$. (Notons que C^0 est convexe, donc on pourrait choisir des convexes ouverts).

- Exemple

1) Chaque espace normé $(E\,,\, \|\ \ \|)$ est un espace vectoriel topologique localement convexe (evtlc)
2) contre - exemple : $L^p([0,1])\,,\, 0 < p < 1$; car C convexe ouvert non vide $\Rightarrow C = L^p$ (voir TD).

10.9 : 2ème théorème de séparation

E evtlc., $\emptyset \neq A, B \subseteq E\,,\, A \cap B = \emptyset\,,\, A\,,\, B$ convexes.
B fermé, A compact.
Alors $\exists\, L \in E^*\,,\, \gamma_1\,,\, \gamma_2 \in \mathbb{R}$ t.q. $Re\,L\,a < \gamma_1 < \gamma_2 < Re\,L\,b \quad \forall\, a \in A\,, \forall\, b \in B$.
En d'autres termes :

$$\sup_{a \in A}\, Re\,L\,a < \inf_{b \in B}\, Re\,L\,b.$$

Démonstration

1) Montrons d'abord $\exists\, V \in \mathcal{U}\,(0)$, convexe *t.q.* $(A + V) \cap B = \emptyset$

Soit $a \in A$. $A \cap B = \emptyset\,,\, B$ fermé $\underset{E\text{loc. conv.}}{\Longrightarrow} \exists\, V_a \in \mathcal{U}(0)$, V_a convexe, ouvert, t.q. $(a + V_a + V_a) \cap B = \emptyset$.

$$\Rightarrow A \subseteq \bigcup_{a \in A} \underbrace{(a + V_a)}_{\text{ouvert}} \text{ ouvert.}$$

A compact $\Rightarrow A \subseteq \bigcup\limits_{j=1}^{N} (a_j + V_{a_j})$. Posons $V_j = V_{a_j} \quad V = V_1 \cap \ldots \cap V_N$

$\Rightarrow V$ ouvert, convexe et $0 \in V$.

En plus, $A + V \subseteq \bigcup_{j=1}^{N}(a_j + V_j) + V \subseteq \bigcup_{j=1}^{N}(a_j + V_j + V_j)$. Comme chacun de ces ensembles est disjoint avec B, on obtient que $(V + A) \cap B = \emptyset$.

2) <u>1er cas</u> : E réel

Posons $\widetilde{A} = A + V \quad \widetilde{B} = B$
$\widetilde{A}$ ouvert car $\widetilde{A} = \bigcup_{a \in A} \underbrace{(a+V)}_{\text{ouvert}}$ et $\widetilde{A} \cap \widetilde{B} = \emptyset$.

$\widetilde{A}$ convexe (A, V convexes $+10.3$), $\widetilde{B}$ convexe

$\overset{10.8}{\Longrightarrow} \exists\, L \in E^* \;\; t.q. \;\; L(A+V)$ est à gauche de $L(B)$ et $L(A+V) \cap L(B) = \emptyset$.

$A + V$ ouvert $\underset{10.2}{\Longrightarrow} L(A+V)$ ouvert.
A compact, L continue $\Rightarrow L(A)$ compact et $L(A) \subseteq L(A+V)$. Ainsi $L(A)$ est strictement à gauche de $L(B)$.
Choisir $\gamma_1 = \frac{2}{3} \sup LA + \frac{1}{3} \inf LB$ et $\gamma_2 = \frac{1}{3} \sup LA + \frac{2}{3} \inf LB \Longrightarrow$ assertion.

- 2ème cas : E complexe : comme d'habitude on passe à $E_{\mathbb{R}}$. □

Corollaire 10.10
Soit E espace vectoriel top. loc. conv. Alors E^* séparante.

Démonstration
$x_1 \neq x_2 \in E$, $\{x_j\}$ convexe, compact, fermé (car $T1$).
Appliquer 10.9 à $A = \{x_1\}$ et $\quad B = \{x_2\}$ □

Proposition 10.11
E evtlc., $F \subseteq E$ sev, $x_0 \in E$, $x_0 \notin \overline{F}$. Alors $\exists\, L \in E^* \;\; t.q. \;\; L(x_0) = 1$ et $L(x) = 0 \quad \forall\, x \in F$.

Démonstration
Appliquer le 2ème théorème de séparation 10.9 à $A = \{x_0\}$ et $B = \overline{F}$ (sev. convexe). Ainsi $\exists\, \widetilde{L} \in E^* \;\; t.q. \;\; Re\, \widetilde{L}\,(x_0) < \gamma_1 < \gamma_2 < Re\, \widetilde{L}(x) \quad \forall\, x \in F$.

$\overset{0_E \in F}{\Longrightarrow} \; \widetilde{L}(x_0) \neq 0$ et $\widetilde{L}(x_0) \notin \widetilde{L}(F) \subseteq \mathbb{K} \Longrightarrow \widetilde{L}(F)$ sev. propre de $\mathbb{K} \Rightarrow \widetilde{L}\,(F) = \{0\}$

Posons $L = \frac{\widetilde{L}}{\widetilde{L}(x_0)} \Rightarrow L$ a les propriétés désirées. □

Théorème 10.12 : théorème de Hahn-Banach pour les evtlc :
E evtlc., $F \subseteq E$ sev., l forme linéaire continue sur F. Alors $\exists\, L \in E^* \;\; t.q. \;\; L|_F = l$.

Démonstration
S.p.g. $l \not\equiv 0$. Posons $F_0 = \{x \in F \; : \; l\,(x) = 0\}$. Alors $F_0 \subset F$ (strict). Choisir $x_0 \in F \;\; t.q. \;\; l\,(x_0) = 1 \overset{l \text{ continue}}{\Longrightarrow} x_0 \notin \overline{F}_0^{F} = \overline{F}_0 \cap F \Rightarrow x_0 \notin \overline{F}_0$

$\overset{10.11}{\Longrightarrow} \exists\, L \in E^* \;\; t.q. \;\; L(x_0) = 1$ et $L|_{\overline{F}_0} \equiv 0$.

Soit $x \in F \Rightarrow x - l\,(x)\, x_0 \in F_0$ (car $l\,(x_0) = 1$) ainsi

$$L(x) - l\,(x) = L(x) - l\,(x) \underbrace{L(x_0)}_{=1} = L \underbrace{(x - l\,(x)\, x_0)}_{\in F_0} = 0$$

$\Rightarrow L|_F = l$ $\square$

Rappel $X \neq \emptyset$, $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{K}^X = \{f : X \to \mathbb{K} \text{ appli.}\}$, X muni de la topologie initiale $\mathcal{T}_\mathcal{F}$ associée à $\mathcal{F}$. Alors la famille des $\bigcap_{j=1}^n f_j^{-1}(U) \in \mathcal{T}_\mathcal{F}$ où $U \subseteq \mathbb{K}$ ouvert, $n \in \mathbb{N}$, $f_1, \cdots, f_n \in \mathcal{F}$, forme une base de $\mathcal{T}_\mathcal{F}$. On en déduit que l'ensemble de tous les $U_{\varepsilon, f_1, \cdots, f_n}(x_0) := \bigcap_{j=1}^n \{x \in X : |f_j(x) - f_j(x_0)| < \varepsilon\}$, où $\varepsilon > 0, n \in \mathbb{N}, f_1, \cdots, f_N \in \mathcal{F}$ est un système fondamental de vosinages pour $\mathcal{U}(x_0)$, $x_0 \in X$. Si X est un espace vectoriel et $\mathcal{F} \subseteq l(X)$, on a

$$U_{\varepsilon, f_1, \cdots, f_N}(x_0) = x_0 + \bigcap_{j=1}^N \{x \in X : |f_j(x)| < \varepsilon\}.$$

Lemma 10.13
Soient E un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$ et $\ell, \ell_1, \cdots, \ell_n \in l(E, \mathbb{K})$. Supposons que $\bigcap_{j=1}^n Ker\ell_j \subseteq Ker\ell$ $(*)$. Alors il existent $\alpha_j \in \mathbb{K}$ tq $\ell = \sum_{j=1}^n \alpha_j \ell_j$.

Démonstration
Soit $\Phi : E \to \mathbb{K}^n$ définie par $\Phi(x) = (\ell_1(x), \cdots, \ell_n(x))$. Alors, dû à $(*)$, $\Phi(x) = \Phi(x')$ implique que $\ell(x) = \ell(x')$. Ainsi $f(\Phi(x)) = \ell(x)$ définie une application linéaire sur $\Phi(E)$. Celle-ci admet un prolongement linéaire F sur $\mathbb{K}^n$. C'est à dire il existe $\alpha_j \in \mathbb{K}$ tq $F(u_1, \cdots, u_n) = \sum_{j=1}^n \alpha_j u_j$. Donc
$\ell(x) = f(\Phi(x)) = F(\Phi(x)) = F(\ell_1(x), \cdots, \ell_n(x)) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \ell_j(x)$.

Théorème 10.14
E espace vectoriel, $\mathcal{F} \subseteq l(E, \mathbb{K})$, $\mathcal{F}$ sev . Supposons que $\mathcal{F}$ soit séparante. Alors $(E, \mathcal{T}_\mathcal{F})$ est un evtlc. L'ens. $E^* := (E, \mathcal{T}_\mathcal{F})^*$ des formes linéaires continues sur E coïncide avec $\mathcal{F}$.

Démonstration
1) $\mathcal{T}_\mathcal{F}$ est T2: En effet, soit $x, y \in E$, $x \neq y$. $\mathcal{F}$ séparante $\Rightarrow \exists f \in \mathcal{F}$ *t.q.* $f(x) \neq f(y)$.
Soit $\varepsilon = |f(x) - f(y)| \Rightarrow \underbrace{B\left(f(x) , \frac{\varepsilon}{3}\right)}_{B_1} \cap \underbrace{B\left(f(y) , \frac{\varepsilon}{3}\right)}_{B_2} = \emptyset$

$\Rightarrow f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) = \emptyset$ et $x \in f^{-1}(B_1) =: U_1$, $y \in f^{-1}(B_2) =: U_2$. f continue $\Rightarrow U_1$, U_2 ouverts.

2) • Continuité de l'addition : x_0 , $y_0 \in E, z_0 = x_0 + y_0$.
Montrons que $\forall W \in \mathcal{U}(z_0)$ $\exists U \in \mathcal{U}(x_0)$ et $\exists V \in \mathcal{U}(y_0)$ *t.q.* $U + V \subseteq W$.
Pour cela, soit $\widetilde{W} = \bigcap_{j=1}^N f_j^{-1}(B(0, \varepsilon)) := U_{\varepsilon, f_1, \ldots, f_N}$, $f_j \in \mathcal{F}$, *t.q.* $\widetilde{W} + z_0 \subseteq W$.
Posons $U = x_0 + U_{\frac{\varepsilon}{2}, f_1, \ldots, f_N}$, $V = y_0 + U_{\frac{\varepsilon}{2}, f_1, \ldots, f_N}$

$\Rightarrow U + V \subseteq W$

• Continuité de $\underset{S}{\bullet}$. Montrons que $\forall \alpha_0 \in \mathbb{K}$, $\forall x_0 \in E$, $\forall W \in \mathcal{U}(\alpha_0 x_0)$ $\exists U \in \mathcal{U}(x_0)$ et $\delta > 0$ *t.q.* $\forall x \in U$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$ avec $|\alpha - \alpha_0| < \delta$ on a $\alpha x \in W$.

Pour cela, écrivons $\alpha\, x = (\alpha - \alpha_0)(x - x_0) + (\alpha - \alpha_0)\, x_0 + \alpha_0\,(x - x_0) + \alpha_0\, x_0$.
Choisir $\widetilde{W} \in \mathcal{U}(0)$, $\quad \widetilde{W} = U_{\varepsilon, f_1, \ldots, f_N}$, $\;t.q.\;$ $\alpha_0\, x_0 + \widetilde{W} \subseteq W$.
Soit $V_1 = U_{\frac{\varepsilon}{3}, f_1, \ldots, f_N} \Rightarrow V_1 + V_1 + V_1 \subseteq \widetilde{W}$
Choisir $\delta > 0\;$ $t.q.$ $\;|f_j((\alpha - \alpha_0)\, x_0)| = |(\alpha - \alpha_0)|\; |f_j\,(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$
$\forall\, |\alpha - \alpha_0| < \delta, \quad j = 1, \ldots, N$.
Pour $\alpha \in \mathbb{K}$ avec $|\alpha - \alpha_0| < \delta$ on donc $(\alpha - \alpha_0)\, x_0 \in V_1$
Choisir $U = x_0 + U_{\frac{\varepsilon}{3\,(\delta + |\alpha_0|)}, f_1, \ldots, f_N}$. Alors $U \subseteq x_0 + U_{\frac{\varepsilon}{3\delta}, f_1, \ldots, f_N}$
Soit $|\alpha - \alpha_0| < \delta$ et $x \in U$.
Alors $|f_j(x) - f_j(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3\delta}$ et

$$\begin{aligned} |f_j((\alpha - \alpha_0)(x - x_0))| &= |\alpha - \alpha_0|\; |f_j(x) - f_j(x_0)| < \delta\, \frac{\varepsilon}{3\delta} = \frac{\varepsilon}{3} \\ \text{et} \quad |f_j(\alpha_0(x - x_0))| &= |\alpha_0|\; |f_j(x) - f_j(x_0)| < |\alpha_0|\, \frac{\varepsilon}{3|\alpha_0|} = \frac{\varepsilon}{3} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \alpha\, x \in V_1 + V_1 + V_1 + \alpha_0\, x_0 \subseteq \widetilde{W} + \alpha_0\, x_0 \subseteq W$. □

- Montrons que $E^* = \mathcal{F}$.

Comme chaque élément $f \in \mathcal{F}$ est linéaire et continue, on a $\mathcal{F} \subseteq (E, \mathcal{T}_{\mathcal{F}})^*$ (déf. topologie initiale)

Soit $f : E \to \mathbb{K}$ linéaire continue. Montrons que $f \in \mathcal{F}$.
Soit $U := \{x \in E : |f(x)| < 1\} \Rightarrow U$ ouvert, donc $U \in \mathcal{T}_{\mathcal{F}}$.
Comme $0 \in U$ (f linéaire!) $\quad \exists\, V \in \mathcal{U}(0), V = \bigcap_{j=1}^{N} \{x \in E : |f_j(x)| < \varepsilon\} = U_{\varepsilon, f_1, \ldots, f_N}$ $\;t.q.\;$ $V \subseteq U$.
f linéaire $\Longrightarrow \delta\, V \subseteq \delta U = \{x : |f(x)| < \delta\}$.
Soit $K = \bigcap\limits_{j=1}^{N} Ker\, f_j \Rightarrow K \subseteq Ker\, f$ car :
$x \in K \Rightarrow f_j(x) = 0 \Rightarrow x \in \delta\, V \subseteq \delta\, U = \{|f| < \delta\} \quad \forall\, \delta > 0, \quad \delta \to 0 \Rightarrow f(x) = 0$.
$\underset{10.13}{\Longrightarrow} f = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j\, f_j \quad (\alpha_j \in \mathbb{K}) \underset{\mathcal{F}_{\text{sev}}}{\Longrightarrow} f \in \mathcal{F}$.

3) $\quad (E, \mathcal{T}_{\mathcal{F}})$ est localement convexe car les ensembles $U_{\varepsilon, f_1, \cdots, f_n} = \bigcap_{j=1}^{n} \{x \in E : |f_j(x)| < \varepsilon\}$ du système fondamentale de voisinages de $\mathcal{U}(0)$ sont des ensembles conveves, dû à la linéarité des f_j. □

Théorème 10.15 : 3ème théorème de séparation
$(E, \mathcal{T})$ evt., E^* séparante, $\emptyset \neq A, B \subseteq E$ convexes, $A \cap B = \emptyset$.
Supposons que A, B soient compacts. Alors $\exists\, L \in E^*$ $t.q.$
$\sup\limits_{a \in A}\; Re\, L\, a < \inf\limits_{b \in B}\; Re\, L\, b$.

Démonstration
Soit $\mathcal{F} = E^* \Rightarrow \mathcal{F}$ séparante et $\mathcal{F}$ sev de $l\,(E, \mathbb{K})$

$\overset{10.14}{\Longrightarrow}$ $(E\,,\,\mathcal{T}_{\mathcal{F}})$ evtlc. et $(E\,,\,\mathcal{T}_{\mathcal{F}})^* = \mathcal{F} = E^*$. Il est claire que $\mathcal{T}_{\mathcal{F}} \subseteq \mathcal{T}$.

10.9 $\Longrightarrow$ assertion (car A compact dans $\mathcal{T} \Rightarrow A$ compact dans $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$; B compact dans $\mathcal{T}_{\mathcal{F}} \underset{T_2}{\Rightarrow} B$ fermé dans $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$).

XI - LA STRUCTURE DES ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES LOCALEMENT CONVEXES

$M \subseteq (E\,,\,\|\cdot\|)$ borné s'il $\exists$ une boule $B = B(0,r)$ *t.q.* $M \subseteq B$. Notons aussi que $B = r\,B(0,1)$

Définition

Soit $(E\,,\,\mathcal{T})$ evt.. $M \subseteq E$ est dit $\mathcal{T}$*-borné* si
$\forall\, U \in \mathcal{U}(0)\,,\, \exists\, \lambda_0 > 0$ *t.q.* $\forall\, \lambda \in \mathbb{R} : \lambda > \lambda_0 \Rightarrow M \subseteq \lambda U$

Remarque

- On peut se restreindre à prendre des U d'un système fondamental de $\mathcal{U}(0)$.
- Si $(E\,,\,\mathcal{T})$ est un espace normé, alors les deux définitions coïncident.

Lemme 11.1

Soit $(E\,,\,\mathcal{T})$ un evt et V un voisinage convexe de 0, ou bien, soit E un evtlc et U un voisinage arbitraire de 0. Alors U et V contiennent un voisinage Ω de 0 qui est ouvert, convexe, équilibré et absorbant.

Démonstration

$0 \in U$, E loc. convexe $\Rightarrow \exists$ ouvert convexe V *t.q.* $0 \in V \subseteq U$. Comme la multiplication scalaire est continue,
$\exists\, \delta > 0\,,\, \exists\, W$ ouvert, $0 \in W$ *t.q.* $\mu W \subseteq V\ \forall\, |\mu| \leq \delta$

- De plus, soit $\widetilde{U} = \bigcap_{|\alpha|=1} \alpha V$; alors $\widetilde{U}$ est convexe (claire) et équilibré car:
$|\lambda| \leq 1\ ,\ \lambda = |\lambda|\, e^{i\theta} \Rightarrow \lambda\,\widetilde{U} = \bigcap_{|\alpha|=1} |\lambda|\,\alpha\, e^{i\theta}\, V = \bigcap_{|\beta|=1} |\lambda|\,\beta\, V \underset{(*)}{\subseteq} \bigcap_{|\beta|=1} \beta\, V = \widetilde{U}$,
Notons que $(*)$ est vraie, car $x \in \beta\, V$, $0 \in \beta\, V$ et $\beta\, V$ convexe $\Rightarrow x\,|\lambda| + (1-|\lambda|)\,0 \in \beta\, V$
$\Rightarrow |\lambda|\,\beta\, V \subseteq \beta\, V$
- Soit $W_0 := \underset{|\mu|\leq\delta}{\cup} \mu\, W$. Alors $0 \in W_0$ et W_0 est équilibré, ouvert, $W_0 \subseteq V$ et $W_0 \subseteq \widetilde{U}$
car : soit $x_0 \in W_0$, $|\alpha| = 1$, W_0 *équilibré* $\Rightarrow \overline{\alpha}\, x_0 \in W_0 \subseteq V$
$\Rightarrow\ x_0 \in \alpha\, V \Rightarrow x_0 \in \widetilde{U}$.
- Donc $\widetilde{U} \in \mathcal{U}(0)$. Soit $\Omega = \widetilde{U}^0 \Rightarrow \Omega$ ouvert, $0 \in \Omega$, Ω convexe, équilibré et absorbant (10.4) □

Théorème 11.2 : théorème de Kolmogorov

Soit E evt. Alors E est normable si et seulement si $\exists$ un voisinage convexe et borné de 0_E.

Démonstration

" $\Rightarrow$ " E normable $\Rightarrow B = \{x : \|x\| < 1\}$ convexe, ouvert, borné.

" $\Leftarrow$ "

• Soit V convexe borné, $V \in \mathcal{U}(0_E)$, alors d'après 11.1, $\exists U \subseteq V$, $U \in \mathcal{U}(0_E)$, U ouvert,équilibré, convexe, absorbant et borné (notons que V borné, $U \subseteq V \Rightarrow U$ borné).

• Soit p_U la jauge de Minkowski associée à U. Posons $\|x\| := p_U(x)$.

10.6 (3) $\Rightarrow p_U$ semi-norme.

Soit $x \neq 0$, E esp. $T_1 \Rightarrow \exists$ voisinage V de 0 *t.q.* $x \notin V$.
U borné, $\exists t_0 > 0, \forall t \geq t_0 : U \subseteq t V \Rightarrow \frac{1}{t} U \subseteq V$

$\Rightarrow x \notin \frac{1}{t} U \Rightarrow p_U(x) \geq \frac{1}{t_0} > 0 \quad \Rightarrow p_U$ norme.

• U ouvert $\overset{10.6}{\Longrightarrow} \{x : p_U(x) < 1\} = U$

$\overset{\forall r > 0}{\Longrightarrow} \{x : p_U(x) < r\} = r\,U.$

Notons que $\{r\,U : r > 0\}$ est un système fondamental de $\mathcal{U}(0_E)$ pour la topologie $\mathcal{T}$ car :

soit $W \in \mathcal{T}$, $0_E \in W \Rightarrow \exists r > 0$ *t.q.* $r\,U \subseteq W$ car U borné.

Comme un système fondamental de $\mathcal{U}(0_E)$ associé à la topologie induite par la norme est l'ensemble des boules $\{x : \|x\| < r\} = \{x : p_U(x) < r\}$ et que les systèmes fondamentals de voisinages déterminent de façon unique une topologie, on a que $\mathcal{T}$ coïncide avec la topologie induite pour $\|\cdot\|$ sur E □

Définitions 1) Soit $\mathcal{P}$ une famille de semi-normes sur un espace vectoriel E. On dit que $\mathcal{P}$ est faiblement séparante, si $\forall x \in E, x \neq 0_E$, $\exists p \in \mathcal{P}$ *t.q.* $p(x) \neq 0$.
2) Soit $\mathcal{P}$ une famille de semi-normes sur un espace vectoriel E. Soit $U_{\varepsilon,p_1,\cdots,p_n} = \bigcap_{j=1}^{n}\{x \in E : p_j(x) < \varepsilon\}$. Alors la famille des ensembles

$$x_0 + U_{\varepsilon,p_1,\cdots,p_n}, (\varepsilon > 0, n \in \mathbb{N}, p_j \in \mathcal{P}, x_0 \in E)$$

est une base de d'une topologie $\mathcal{O}_{\mathcal{P}}$ sur E, dite "topologie invariante par translation engendrée par $\mathcal{P}$".
Notons que si U parcourt un système fondamental de voisinages de 0_E, alors $x_0 + U$ parcourt un système fondamental de voisinages de x_0.
En plus, $x_0 + U_{\varepsilon,p_1,\cdots,p_n} = \bigcap_{j=1}^{n}\{x \in E : p_j(x - x_0) < \varepsilon\}$

Exemple: Soit E esp. vect., $\mathcal{F} \subseteq l(E,\mathbb{K})$ et $\mathcal{P} = \{|f| : f \in \mathcal{F}\}$. Alors $\mathcal{T}_{\mathcal{F}} = \mathcal{O}_{\mathcal{F}}$. (Voir 10.14).

Proposition 11.3

Soit $\mathcal{P}$ une famille de semi-normes sur un espace vectoriel E. Supposons que $\mathcal{P}$ soit faiblement séparante. Soit $\mathcal{O}_{\mathcal{P}}$ la topologie invariante par translation (i.t.) engendrée par $\mathcal{P}$. Alors

1) *$(E, \mathcal{O}_{\mathcal{P}})$ est un evtlc.*
2) *Chaque $p \in \mathcal{P}$ est continue.*
3) *$M \subseteq E$ est $\mathcal{O}_{\mathcal{P}}$-borné $\Longleftrightarrow \forall p \in \mathcal{P}$, p est bornée sur M $\left(ie \ \sup\limits_{x\in M} p(x) < \infty\right)$.*

Démonstration

1) voir 10.14. Notons que $\mathcal{O}_{\mathcal{P}}$ est $T1$. En effet, soit $x_0 \in E$. $\mathcal{P}$ faiblement séparante $\Longrightarrow \exists p \in \mathcal{P} : p(x_0) \neq 0 \Longrightarrow 0_E \notin \{x \in E : p(x - x_0) < \frac{1}{2}p(x_0)\} =: V(x_0)$. Notons que $V(x_0) \in \mathcal{U}(x_0)$ et que V est ouvert. Donc $0_E \notin \bigcup_{x_0 \neq 0_E} V(x_0) = E \setminus \{0_E\}$. Ainsi $\{0_E\}$ est un fermé.
2) clair (par déf. de la topologie invariante par translation)
3) " $\Rightarrow$ " M borné, $p \in \mathcal{P} \Rightarrow B = \{x : p(x) < 1\}$ ouvert; $B \in \mathcal{U}(0) \overset{\text{déf. borné}}{\Longrightarrow} \exists \alpha > 0 \ M \subseteq \alpha B$. $\overset{p \text{ s.n.}}{\Longrightarrow} \forall x \in M, \, p(x) < \alpha$.

   " $\Leftarrow$ " Supposons que chaque $p \in \mathcal{P}$ soit bornée sur M.

   Soit $U \in \mathcal{U}(0)$. Choisir $U_{\varepsilon, p_1, \cdots, p_m} := \bigcap\limits_{j=1}^{m} \{x : p_j(x) < \varepsilon\} \subseteq U$

   $\overset{\text{hyp.}}{\Longrightarrow} p_j < C_j$ sur M, $j = 1, \cdots, m$

   Soit $\alpha = \max\limits_j \ C_j \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow M \subseteq \alpha U$ (car si $x \in M \Rightarrow p_j(x) < C_j \leq \alpha \varepsilon$) □

Théorème 11.4

Soit $(E, \mathcal{T})$ evtlc. Alors il existe une famille faiblement séparante $\mathcal{P}$ de semi-normes continues sur E t.q. la topologie $\mathcal{O}_{\mathcal{P}}$ invariante par translation engendrée par $\mathcal{P}$ coïncide avec $\mathcal{T}$.

En d'autres mots, chaque evtlc est déterminé par une famille de semi-normes.

Démonstration

Soit $\mathcal{P} = \{p_U : U$ convexe, ouvert, équilibré, $0_E \in U\}$, où p_U est la jauge de Minkovski associée à U. Alors

1) $\mathcal{P} \neq \emptyset$ (E loc. convexe + 11.1)
2) $p \in \mathcal{P} \overset{10.6(3)}{\Longrightarrow} p$ semi-norme
3) $\mathcal{P}$ faiblement séparante : en effet, soit $x \in E$, $x \neq 0$ E esp. $T_1 \overset{11.1}{\Longrightarrow} \exists V \in \mathcal{U}(0_E)$, V convexe, équilibré, ouvert $t.q.$ $x \notin V$.

   Comme $V \overset{10.6(4)}{=} \{x : p_V(x) < 1\}$ on a $p_V(x) \geq 1$. De plus, $p_V \in \mathcal{P}$.

4) $p_U \in \mathcal{P} \overset{10.7}{\Longrightarrow} p_U$ continue.

5) $\mathcal{O}_\mathcal{P} \subseteq \mathcal{T}$, claire car p_U continue $\Longrightarrow \{p_U < \varepsilon\} \in \mathcal{T}$.

6) Soit $U \in \mathcal{T}$, $U \in \mathcal{U}(0_E) \overset{11.1}{\Longrightarrow} \exists$ ouvert, convexe, équilibré V *t.q.* $0_E \in V \subseteq U$.

$\overset{10.6}{\Longrightarrow}$ $V = \{x \,:\, p_V(x) < 1\}$ et p_V continue (dans $\mathcal{O}_\mathcal{P}$ et $\mathcal{T}$).

$\Longrightarrow$ V est $\mathcal{O}_\mathcal{P}$ ouvert.

donc chaque voisinage U de 0_E dans $\mathcal{T}$ est un voisinage de 0_E dans $\mathcal{O}_\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{T} \subseteq \mathcal{O}_\mathcal{P}$.

$\Longrightarrow$ $\mathcal{T} = \mathcal{O}_\mathcal{P}$ □

Théorème 11.5 (*Théorème de métrisation d'evtlc.*)

Soit $(E, \mathcal{T})$ evtlc. et $\mathcal{P}$ une famille (faiblement séparante) de semi-normes qui induit la topologie $\mathcal{T}$, i.e. $\mathcal{T} = \mathcal{O}_\mathcal{P}$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1) $\mathcal{T}$ peut être définie par une famille faiblement séparante dénombrable de semi-normes.

2) $\exists$ une distance invariante par translation qui induit la topologie $\mathcal{T}$ $\big(d(x,z) = d(x+y\,,\, z+y) \quad \forall\, x,y,z\big)$

3) E métrisable

4) L'espace E est un espace à base dénombrable de voisinages.

Démonstration

(1) $\Rightarrow$ (2) : $(E, \mathcal{T})$ evtlc., $\mathcal{D} = \{p_j \,:\, j = 1, 2, \ldots\}$ engendre la topologie $\mathcal{T}$, i.e $\mathcal{T} = \mathcal{O}_\mathcal{D}$ et $\{x_0 + U_{\varepsilon, p_1, \ldots, p_n}\,,\, \varepsilon > 0\,,\, p_j \in \mathcal{D}\,,\, n \in \mathbb{N}\}$ est une base de voisinages de x_0. Notons que tous les $p_j \in \mathcal{D}$ sont continues (voir 11.3).

Posons $d(x,y) = \max\limits_j \frac{c_j\, p_j\,(x-y)}{1+p_j\,(x-y)} \quad j = 1, 2, \ldots$ où $c_j > 0\,,\, c_j \to 0$

• d distance $\left(\frac{\delta}{1+\delta} \text{ monotone}\right)$, d invariante par translation.

• Soit $B_r := \{x \,:\, d(0,x) < r\}$. Montrons que $\{B_r\,,\, r > 0\}$ est un système fondamental de voisinages convexes et équilibrés de 0_E (pour la topologie $\mathcal{T}$).

En effet, fixons $r > 0$. Si $c_i \le r$ (d'ailleurs vrai pour presque tous les $i \in \mathbb{N}$), alors $\frac{c_i\, p_i}{1+p_i} \le r$; donc $B_r = \bigcap_{i: c_i > r} \left\{x \,:\, p_i(x) < \frac{r}{c_i - r}\right\}$ est une intersection finie d'ouverts de $\mathcal{T}$.

$\Rightarrow B_r \in \mathcal{T}$

• Soit $V_i = \left\{x \,:\, p_i(x) < \frac{r}{c_i - r}\right\} \Longrightarrow V_i$ convexe (car p_i semi-norme) $\Rightarrow B_r$ convexe.

• $0_E \in B_r$.

• Soit $W \in \mathcal{U}_\mathcal{T}(0_E) \Rightarrow \exists\, p_1, \ldots, p_n \in \mathcal{D}$ *t.q.* $\bigcap\limits_{i=1}^{n} \{x \,:\, p_i\,(x) < \delta_i\} \subseteq W$ $(\delta_i < 1)$.

Soit $2r < \min\{c_1\,\delta_1, \ldots, c_n\,\delta_n\}$ et $x \in B_r$. Alors $\frac{c_i\, p_i\,(x)}{1+p_i\,(x)} < r < \frac{c_i\,\delta_i}{2}, \quad i = 1, \ldots, n$

$\underset{\delta_i < 1}{\Rightarrow} \; p_i(x) < \delta_i \Rightarrow B_r \subseteq W$.

• B_r équilibré, car p_i semi-norme.

conclusion : $\{B(0,r)\,,\, r>0\}$ base de voisinages de $\mathcal{U}_d\,(0_E)$ et de $\mathcal{U}_\mathcal{T}\,(0_E) \Rightarrow$ topologie induite par d coïncide avec $\mathcal{T}=\mathcal{O}_\mathcal{D}$. (Notons l'invariance par translation: $d(x+y,x+z)=d(y,z)$).

$(2)\Rightarrow(3)$: claire

$(3)\Rightarrow(4)$: $\left\{B\left(x_0,\frac{1}{n}\right)\,:\, n\in\mathbb{N}\right\}\subseteq\mathcal{U}_d(x_0)$.

$(4)\Rightarrow(1)$: Soit $\{V_n\,:\,n\in\mathbb{N}\}$ un système fondamental dénombrable de $\mathcal{U}_\mathcal{T}(0)$. Notons que $\mathcal{T}=\mathcal{O}_\mathcal{P}$.

$\forall\, n\in\mathbb{N},\,\exists\,\varepsilon>0\,,\,\exists\, p_1^{(n)},\ldots,p_m^{(n)}\in\mathcal{P}\;\; t.q.\;\; \bigcap\limits_{j=1}^{m_n}\{p_j^{(n)}\,(x)<\varepsilon\}\subseteq V_n \qquad (*)$.

Soit $\mathcal{P}_n=\left\{p_1^{(n)},\ldots,p_{m_n}^{(n)}\right\}\subseteq\mathcal{P}, \qquad \mathcal{S}=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\mathcal{P}_n$.

Notons que $\mathcal{S}$ est faiblement séparante. En effet, soit $x_0\neq 0_E\Longrightarrow\exists n\,:\,x_0\notin V_n \underset{(*)}{\Longrightarrow} p_{j(n)}^{(n)}(x_0)\geq\varepsilon$.

Montrons que la topologie $\mathcal{O}_\mathcal{S}$ i.t. engendrée par $\mathcal{S}$ coïncide avec $\mathcal{T}$. Comme $\mathcal{S}\subseteq\mathcal{P}$ on a $\mathcal{O}_\mathcal{S}\subseteq\mathcal{O}_P$. (exo.).

Soit $U_{\varepsilon,p_1,\ldots,p_m}\in\mathcal{O}_\mathcal{P}$ et $0_E\in U_{\varepsilon,p_1,\ldots,p_m}$.

Comme $\{V_n\,:\,n\in\mathbb{N}\}$ est un système fondamental de $\mathcal{U}(0_E)$ pour $\mathcal{O}_\mathcal{P}$, on trouve un $n\in\mathbb{N}\;\; t.q.\;\; V_n\subseteq U_{\varepsilon,p_1,\ldots,p_m}$

$\overset{(*)}{\Longrightarrow}\,\exists\, q_j\in\mathcal{S}\;\; t.q.\;\; \bigcap\limits_{j=1}^{N}\{q_j\,(x)<\tilde{\varepsilon}\}\subseteq V_n$

$\Longrightarrow\mathcal{O}_\mathcal{P}\subseteq\mathcal{O}_\mathcal{S}$.

Conclusion: $\mathcal{T}=\mathcal{O}_\mathcal{P}\subseteq\mathcal{O}_\mathcal{S}$ □

- Remarque • On peut remplacer dans $(1)\Rightarrow(2)$ la distance d par

$$d'(x,y)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2^j}\,\frac{p_j(x-y)}{1+p_j\,(x-y)}$$

• Si E est un espace topologique arbitraire, alors, en général, $(4)\not\Rightarrow(3)$.

Définition

Un evt. E est dit *espace de Fréchet* si E est loc. convexe et métrisable par une distance complète.

- Exemple

- chaque espace de Banach est un espace de Fréchet.
- $(C^\infty\,([0,1]),\mathcal{P})\;,\;\mathcal{P}=\{p_n\,:\,n\in\mathbb{N}\}$ où $p_n\,(f)=\max\limits_{x\in[0,1]}\,|f^{(n)}(x)|$

$(n=0,1,\ldots)$ est une semi-norme. Notons que $\mathcal{P}$ est faiblement séparante. $\mathcal{B}:=\{f_0+\bigcap\limits_{j=1}^{n}\{|p_j\,(f)|<\varepsilon\}\,:\,n\in\mathbb{N},\,\varepsilon>0\}$

base de voisinage de $\mathcal{U}(f_0)$; $f_0 \in C^\infty([0,1])$.

$$\mathcal{B} = \left\{ \left\{ f \in C^\infty([0,1]) \; : \; \max_{x\in[0,1]} \left| f^{(j)}(x) - f_0^{(j)}(x) \right| < \varepsilon \right\} , j = 0, \ldots, n \, , \, n \in \mathbb{N}, \, \varepsilon > 0 \right\}$$

$(C^\infty([0,1]), \mathcal{P})$ est un espace de Fréchet qui n'est pas normable (exo).

Autre exemple: L'espace des fonctions entières muni de la topologie de la convergence compacte: $f_n \underset{compact}{\longrightarrow} f \iff \forall \; K \subseteq \mathbb{C}, K$ compact, $\max_{z\in K} |f_n(z) - f(z)| \to 0$ pour $n \to \infty$ (exo).

XII - TOPOLOGIE FAIBLE ET FAIBLE-$*$

A - TOPOLOGIE FAIBLE

Définition

Soit $(E\,, \|\cdot\|)$ un espace normé. Alors la *topologie faible* $\sigma := \sigma(E, E^*)$ est la topologie la plus grossière sur E *t.q.* tous les éléments de E^* soient continus (c'est la topologie initiale sur E associée à E^*).

Remarque

1) $\overset{10.14}{\Longrightarrow}$ $(E, \sigma(E, E^*))$ evtlc. et $(E, \sigma)^* = E^*$.
2) $\sigma \subseteq \mathcal{T}_{\|\cdot\|}$ où $\mathcal{T}_{\|\cdot\|}$ est la topologie induite par $\|\cdot\|$ sur E
3) Système fondamental de $\mathcal{U}(x_0)$ $\quad (x_0 \in E, f_j \in E^*\,, \varepsilon > 0\,, n \in \mathbb{N})$:

$$\begin{aligned} x_0 + U_{\varepsilon, f_1, \ldots, f_n} &= \{x \; : \; |f_j(x) - f_j(x_0)| < \varepsilon \, , \, j = 1, \ldots, n\} \\ &= x_0 + \bigcap_{j=1}^{n} \{x \; : \; |f_j(x)| < \varepsilon\} \end{aligned}$$

4) $(x_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ converge faiblement vers x (not.: $x_n \xrightarrow{\sigma} x$)
$\iff f(x_n) \to f(x) \; \forall f \in E^*$.

Proposition 12.1

Soit $(E, \|\cdot\|)$ espace normé.

1) si $\dim E = \infty$*, alors chaque voisinage $\widetilde{V}$ faible de 0_E —i.e. $\widetilde{V} \in \mathcal{U}_\sigma(0)$—contient un sev. de dimension infinie.*

2) $\sigma = \mathcal{T}_{\|\cdot\|} \Leftrightarrow \dim E < \infty$

Démonstration

1) - $\dim E = \infty$. Soit $V = U_{\varepsilon, f_1, \ldots, f_n} \subseteq \widetilde{V}$, $f_j \in E^*, f_j \not\equiv 0$. Considérons $N = \bigcap_{j=1}^{n} Ker\, f_j \Longrightarrow N \subseteq V \subseteq \widetilde{V}$.
Soit $T : E \to \mathbb{K}^n$ définie par $T(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$. Alors T est linéaire et $Ker\, T = N$.

Le théorème des isomorphismes implique que E/N est isomorphe à $T(E) \subseteq \mathbb{K}^n$. Donc codim$N = \dim T(E) \leq n < \infty$. Comme $dimE = \infty$, on obtient dim$N = \infty$.

2) Soit $r \in]0, +\infty]$. Comme chaque boule $B(0,r)$ contenant un sev. coïncide avec E , on voit avec 1) que $\sigma \subsetneq \mathcal{T}_{\|\cdot\|}$ si dim $E = \infty$.
Soit dim $E = n$ et $\{x_1, \ldots, x_n\}$ base algébrique de E. Ainsi $x \in E \Rightarrow x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \, x_j \quad (\alpha_j \in \mathbb{K})$.
Soit $f_j(x) = \alpha_j \quad (j = 1, \ldots, n)$. Notons que les coefficients α_j sont déterminés de façon unique. Ainsi f_j est bien défini et $f_j \in E^*$.
Soit $U = \bigcap\limits_{j=1}^{n} \{x \in E \,:\, |f_j(x)| < 1\} \Longrightarrow U \in \sigma$ et $U = \bigcap\limits_{j=1}^{n} \{x \in E \,:\, |\alpha_j| < 1\}$. Donc U est la boule unité pour la norme $\|\cdot\|_\infty$, donnée par $\|x\|_\infty = \max\limits_j |\alpha_j|$.
Comme $\|\cdot\|$ est équivalente à $\|\cdot\|_\infty$, il existe $\delta > 0$ tq $\delta \, U \subseteq B_{\|\cdot\|}(0,1)$
$\underset{\text{i.t.}}{\Rightarrow} \mathcal{T}_{\|\cdot\|} \subseteq \sigma$. Par définition, $\sigma \subseteq \mathcal{T}_{\|\cdot\|}$. Donc $\mathcal{T}_{\|\cdot\|} = \sigma$. □

Remarque Soit $(E\,,\|\cdot\|)$ un espace normé de dimension infinie. Alors d'après 12.1(1), l'intérieur faible de la boule unité $B(0,1)$ est $\emptyset$.

Proposition 12.2
$(E\,,\|\cdot\|)$ espace-normé, $C \subseteq E$ convexe. Alors $\overline{C}^w = \overline{C}$, où $\overline{C}^w$ est l'adhérence faible de C.

Démonstration
Soit $\sigma = \sigma(E, E^*)$ la topologie faible sur E. $\overline{C}^w$ σ-fermé $\Rightarrow E \setminus \overline{C}^w$ σ-ouvert

$\Rightarrow \; E \setminus \overline{C}^w \quad \mathcal{T}_{\|\cdot\|}$-ouvert $\Rightarrow \overline{C}^w$-fermé pour $\mathcal{T}_{\|\cdot\|}$. Ainsi $\overline{C} \subseteq \overline{C}^w$
(notons que $\overline{C}$ est le plus petit fermé qui contient C)

Soit $x_0 \in E \setminus \overline{C}$. *Mq* $x_0 \notin \overline{C}^w$. Utilisons le 2ème théorème de séparation pour l'evtlc $(E\,,\|\cdot\|)$, $A = \{x_0\}, B = \overline{C}$. Notons que C convexe $\overset{10.3}{\Longrightarrow} \overline{C}$ convexe.

$\overset{10.9}{\Rightarrow} \; \exists\, f \in E^* = \; (E, \sigma)^*\;,\; \exists\, \gamma \in \mathbb{R} \,:\, \forall\, x \in \overline{C}$

$$Re\, f(x_0) < \gamma < Re\, f(x)$$

Soit $U = \{x \in E \,:\, Re\, f(x) < \gamma\} \Rightarrow U \quad \sigma$-ouvert car $f \in (E, \sigma)^*$.
Comme $x_0 \in U$ et que $U \cap C = \emptyset$, on a $x_0 \notin \overline{C}^w$. Ainsi $\overline{C}^w \subseteq \overline{C}$.
Conclusion: $\overline{C} = \overline{C}^w$. □

Corollaire 12.3
E espace normé $((E\,,\|\cdot\|))$, $C \subseteq E$ convexe. Sont équivalentes :

1) $C \quad \|\cdot\|$-fermé
2) $C \qquad \sigma$-fermé.

Démonstration clair

Remarque En particulier, la boule $\overline{B}(0,1) = \{x \in E\,,\ \|x\| \leq 1\}$ est faiblement fermée.

Théorème 12.4 (Mazur)
Soit $(E\,,\ \|\cdot\|)$ espace normé et $x_n \xrightarrow{w} x$ (convergence faible). Alors il existe des combinaisons convexes y_k de x_n i.e.
$y_k = \sum_{j=1}^{n_k} \alpha_j^{(k)} x_j\,,\ \sum_{j=1}^{n_k} \alpha_j^{(k)} = 1\ ,\ \alpha_j^{(k)} \geq 0 \quad tq \quad y_k \xrightarrow{\|\cdot\|} x.$
Démonstration
Soit H l'enveloppe convexe de $\{x_1, x_2, \cdots\}$. Hyp.: $x \in \overline{H}^w \overset{12.2}{=} \overline{H} \Rightarrow \exists\,(y_k) \in H^{\mathbb{N}}$ *t.q.* $y_k \xrightarrow{\|\cdot\|} x$.

Lemme 12.5
Soit E espace vectoriel, $\mathcal{F} \subseteq l\,(E, \mathbb{K})$, $\mathcal{F}$ sev séparant, et $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ la topologie initiale sur E induite par $\mathcal{F}$.
Alors $(E, \mathcal{T}_{\mathcal{F}})$ est métrisable $\Leftrightarrow \dim \mathcal{F}$ est au plus dénombrable

Démonstration
“ $\Leftarrow$ ” $\{u_n\ :\ n \in \mathbb{N}\}$ base algébrique de $\mathcal{F}$; $u \in \mathcal{F} \Rightarrow \exists\,\alpha_j \in \mathbb{K}$ *t.q.* $u = \sum\limits_{j=0}^{n} \alpha_j\, u_j$. Les α_j sont déterminés de façon unique. Soit $p_n(x) := |u_n\,(x)|\,,\ n \in \mathbb{N},\ x \in E \Rightarrow p_n$ semi-norme sur E. $\mathcal{F}$ séparante $\Longrightarrow \mathcal{S} = \{p_n\ :\ n \in \mathbb{N}\}$ faiblement séparante. $\mathcal{S}$ engendre la topologie $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ car:

- $x_0 + \bigcap\limits_{j=1}^{n} \{|p_j| < \varepsilon\}$ élément d'un système fondamental de $\mathcal{U}(x_0)$ pour la topologie $\mathcal{O}_{\mathcal{S}}$.
- $\mathcal{O}_{\mathcal{S}} \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ car chaque p_j est $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$-continue, donc $\{|p_j| < \varepsilon\}$ $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$-ouvert.
- $\mathcal{T}_{\mathcal{F}} \subseteq \mathcal{O}_{\mathcal{S}}$, car : $u \in \mathcal{F} \underset{(x \in E)}{\Longrightarrow} u\,(x) = \sum\limits_{j=0}^{n} \alpha_j\, u_j\,(x)$

$$\Rightarrow\ |u\,(x)| \leq \overbrace{\sum_{j=0}^{n} |\alpha_j|}^{:=c} \max_{1 \leq j \leq n} |u_j(x)| = c \max_{1 \leq j \leq n} p_j(x)$$
$\Rightarrow \bigcap_{j=1}^{n} \{|p_j| < \varepsilon/c\} \subseteq \{|u| < \varepsilon\} \Longrightarrow \{|u| < \varepsilon\} \in \mathcal{U}_{\mathcal{O}_{\mathcal{S}}}(0) \Longrightarrow \mathcal{U}_{\mathcal{T}_{\mathcal{F}}}(0) \subseteq \mathcal{U}_{\mathcal{O}_{\mathcal{S}}}(0)$.

Comme $\mathcal{O}_{\mathcal{S}}$ et $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ sont invariantes par translation, et que les systèmes de voisinages déterminent de façon unique une topologie, on a $\mathcal{O}_{\mathcal{S}} = \mathcal{T}_{\mathcal{F}}$.

Donc $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ est engendrée par une famille dénombrable de semi-normes $\overset{11.5}{\Longrightarrow} \mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ métrisable.

“ $\Rightarrow$ ” Soit $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ métrisable. Notons que d'après 10.14, $(E, \mathcal{T}_{\mathcal{F}})$ est un evtlc et que $\mathcal{T}_{\mathcal{F}} = \mathcal{O}_{\{|u| : u \in \mathcal{F}\}}$.
11.5 $\Longrightarrow\ \exists$ famille $\mathcal{D}$ dénombrable et faiblement séparante de semi-normes continues *t.q.* $\mathcal{T}_{\mathcal{F}} = \mathcal{O}_{\mathcal{D}}$ et $\mathcal{D} \subseteq \{|u|\ :\ u \in \mathcal{F}\}$. Donc $\mathcal{D} = \{|u_n|\ :\ n \in \mathbb{N}\}$ $(u_n \in \mathcal{F})$.

Montrons que Vect $\{u_n : n \in \mathbb{N}\} = \mathcal{F}$. Pour cela, soit $u \in \mathcal{F}$.
Comme $\{|u| < \varepsilon\}$ est $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$-ouvert $\underset{\text{déf. } \mathcal{O}_{\mathcal{D}}}{\overset{\mathcal{T}_{\mathcal{F}}=\mathcal{O}_{\mathcal{D}}}{\Longrightarrow}}$ $\exists\, u_j\ (j = 1, \cdots, n)$, $|u_j| \in \mathcal{D}$ *t.q.* $\bigcap\limits_{j=1}^{n} \{|u_j| < \varepsilon_j\} \subseteq \{|u| < \varepsilon\}$. Notons que $n = n(\varepsilon)$, $\varepsilon_j = \varepsilon_j(\varepsilon)$).
Soit $u_j(x) = 0\ \forall j \in \{1, \cdots, n\}$ $\Rightarrow |u_j|(x) < \varepsilon_j \Longrightarrow |u(x)| < \varepsilon$. De plus, en remplaçant x par αx, on a $\forall \alpha$:
$|\alpha|\ |u(x)| < \varepsilon \qquad \Rightarrow u(x) = 0 \quad \Rightarrow\ Ker\, u \supseteq \bigcap\limits_{1}^{n} Ker\, u_j$
$\overset{10.13}{\Rightarrow} u \in \text{Vect}\,\{u_1, \ldots, u_n\}$
Il existe un sous-système libre maximal de $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$. Celui-ci est une base algébrique de $\mathcal{F}$. □

Proposition 12.6
$(E, \|\cdot\|)$ espace normé, $\sigma = \sigma(E, E^*)$ topologie faible. Alors (E, σ) métrisable $\Longleftrightarrow$ $\dim E < +\infty$

Démonstration
“ $\Leftarrow$ ” $\quad \dim E < \infty \overset{12.1}{\Longrightarrow} \sigma = \mathcal{T}_{\|\cdot\|} \Longrightarrow (E, \sigma)$ métrisable.

“ $\Rightarrow$ ” $\quad \sigma$ métrisable $\overset{12.5}{\Longleftrightarrow}$ dim E^* au plus dénombrable (notons que $\mathcal{F} := E^* \subseteq l(E, \mathbb{K})$ est séparante : cf. théorème de Hahn-Banach, corollaire 9.9).
E^* est un espace de Banach; donc espace métrique complet. Supposons que $\{x_1^*, x_2^* \cdots,\}$ soit une base algébrique dénombrable (fini ou non) de E^*. Soit $F_n = \text{Vect}\,\{x_1^*, \cdots, x_n^*\} \Longrightarrow E^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$. En plus, dim $F_n = n < +\infty$; donc F_n complet $\Longrightarrow F_n$ fermé dans E^* $\overset{\text{Baire}}{\Longrightarrow}\ \exists\, n_0 : (F_{n_0})^0 \neq \emptyset$.

Ainsi on a trouvé un sev. V de E^* de dimension finie t.q. $V^0 \neq \emptyset \Rightarrow V = E^*$ et $\dim E^* < \infty \Longrightarrow \dim E < +\infty$. □

B - Topologie faible-$*$

E espace normé, E^* espace de Banach, $E^{**} := (E^*)^*$ l'espace normé des formes linéaires continues sur E^*. Immergeant E dans E^{**}:
Soit $x \in E$, considérons

$$\Phi_x : \begin{cases} E^* \to \mathbb{K} \\ x^* \mapsto \Phi_x(x^*) := x^*(x). \end{cases}$$

$\Rightarrow\ \Phi_x$ linéaire et continue car:
$|\Phi_x(x^*)| = |x^*(x)| \leq \|x^*\|\ \|x\| \quad \forall\, x^* \in E^* \Rightarrow\ \|\Phi_x\| \leq \|x\|$.
On a même $\|\Phi_x\| = \|x\|$. En effet, $\|\Phi_x\| = \sup\limits_{\|x^*\|=1} |\Phi_x(x^*)| =$
$= \sup\limits_{\|x^*\|=1} |x^*(x)| \underset{9.9}{\overset{(\leq)}{=}} \|x\|$

(Hahn-Banach$\Longrightarrow \exists\, x^* \in E^*$ $t.q.$ $x^*(x) = \|x\|\,,\ \|x^*\| = 1$ si $x \neq 0$.)

Soit $J_E \ : \begin{cases} E \to E^{**} \\ x \mapsto \Phi_x \end{cases} \Longrightarrow J_E$ injective et linéaire car:

$\Phi_x = 0 \Rightarrow \Phi_x(x') = 0 \quad \forall\, x' \in E^*$

$\Rightarrow\ x'(x) = 0 \quad \forall\, x' \in E^* \overset{9.9}{\Rightarrow} x = 0$($E^*$ séparante)

$\Rightarrow\ Ker\ J_E = \{0\}$.

$\|J_E(x)\| = \|\Phi_x\| = \|x\| \Rightarrow J_E$ isométrie.

conclusion : J_E est un homomorphisme isométrique; donc E peut être considéré comme un sous-espace normé de E^{**}, (procédé d' immergement de E dans son bidual topologique).

Remarque

1) en général, $J_E(E)$ n'est pas fermé dans E^{**}; mais si E est un espace de Banach, alors $J_E(E)$ est complet(car J_E isométrie), donc fermé dans E^{**}.
2) J_E n'est pas surjective en général.

Définition
On dit qu'un espace normé est *réflexif* si J_E est surjective.

Notons que ceci implique que E est complet.

Définition E espace normé, E^* son dual topologique. La topologie la plus grossière sur E^* $t.q.$ toutes les formes linéaires $\Phi_x\,(x \in E)$ soient continues est appelée la *topologie faible-$*$* (sur E^*). Notation : $\sigma^* := \sigma(E^*\,,\, E)$.

Remarque

1) σ^* est donc la topologie initiale sur E^* induite par la famille $\{\Phi_x \ : \ x \in E\} := \mathcal{F}$. Notons que $\mathcal{F} = J_E(E) \subseteq E^{**}$ est un sev. de E^{**}.
2) 10.14 $\Rightarrow (E^*\,,\,\sigma^*)$ evtlc:
(car $\mathcal{F}$ séparante : $x' \neq y' \in E^*$, supposons que $\forall\, x \in E \ :\ \Phi_x(x') = \Phi_x(y') \Rightarrow x'(x) = y'(x) \quad \forall\, x \in E$
$\Rightarrow\ x' = y'$
3) De plus, $(E^*\,,\,\sigma^*)^* = \mathcal{F} = J_E(E)$.
4) éléments d'une base topologique de σ^*:

$$U_{\varepsilon, x_1, \ldots, x_n}(x_0^*) = x_0^* + \bigcap_{j=1}^{n} \{x^* \in E^* \ :\ |\Phi_{x_j}(x^*)| < \varepsilon\} =$$

$$= \bigcap_{j=1}^{n} \{x^* \in E^* \ :\ |(x^* - x_0^*)(x_j)| < \varepsilon\}.$$

6) on a ces trois topologies loc. convexes sur E^* :

$$\underbrace{\sigma\left(E^*\,,\,E\right)}_{\substack{\text{topo. faible}-*\\ \text{sur } E^*}} \subseteq \underbrace{\sigma\left(E^*\,,\,E^{**}\right)}_{\substack{\text{topo. faible}\\ \text{sur} E^*}} \subseteq \mathcal{T}_{\|\cdot\|_{E^*}}.$$

- *Rappel* **Lemme/théorème de Riesz**
Soit E un espace normé. Alors la boule unité $\{\|x\| \leq 1\}$ est compacte $\Longleftrightarrow$ $\dim E < +\infty$
Voir cours DEUG 2 ou licence).

Lemme 12.7
$B^* = \{x' \in E^* \,:\, \|x'\|_{E^*} \leq 1\}$ *est σ^*-fermée dans E^*.*

Démonstration
Montrons que $E^* \setminus B^*$ est σ^*-ouvert. Soit $\|x'\| > 1$, disons $\|x'\| = 1 + \delta\,,\, \delta > 0$

$$\Rightarrow\ \exists\, x_0 \in E\,,\, \|x_0\| = 1 \quad t.q. \quad |x'(x_0)| > 1 + \tfrac{\delta}{2}$$

$$U\ := U_{\frac{\delta}{4},x_0} = \left\{x^* \in E^*\ :\ |x^*\left(x_0\right)| < \frac{\delta}{4}\right\} \Rightarrow U \in \sigma^*$$

On a $x' + U \subseteq E^* \setminus B^*$!! En effet, soit $z' \in x' + U \Rightarrow \exists\, y' \in U \;\; t.q. \;\; z' = x' + y'$

$$\Rightarrow\ \|z'\| = \sup_{\substack{x\in E\\ \|x\|=1}} \ |z'(x)| \geq |z'(x_0)| \geq |x'(x_0)| - |y'(x_0)| \geq$$

$$\geq 1 + \delta/2 - \delta/4 = 1 + \delta/4 > 1.$$

$\square$

Théorème 12.8 : **théorème d'Alaoglu-Bourbaki**
E espace normé; alors la boule unité $B^* = \{x' \in E^* \,:\, \|x'\| \leq 1\}$ est σ^*-compacte.

Démonstration
Construisons un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ compact, T_2, tel que
(1) $\quad B^* \subseteq X\,,\quad B^* \quad \mathcal{T}$-fermé (donc $\mathcal{T}$-compact) et
(2) $\quad \mathcal{T}|_{B^*} = \sigma^*|_{B^*}$
(dans ce cas B^* sera σ^*-compact).

Soit $x' \in B^* \Rightarrow |x'(x)| \leq \underbrace{\|x'\|}_{=1}\ \|x\| \leq \|x\| \quad \forall\, x \in E$

Soit $\mathcal{D}_x = \{\alpha \in \mathbb{K}\ :\ |\alpha| \leq \|x\|\} \Rightarrow \mathcal{D}_x$ compact dans $\mathbb{K}$.
Soit $X\ := \prod\limits_{x\in E} \mathcal{D}_x = \{g\ :\ E \to \mathbb{K}\ \ t.q.\ \ \forall\, x \in E\ :\ |g\left(x\right)| \leq \|x\|\}$

$$\Longrightarrow\ B^* \subseteq X$$

$$\underset{7.1}{\overset{\text{Tychonov}}{\Longrightarrow}}\ (X, \mathcal{T}) \text{ compact, où } \mathcal{T} \text{ est la topologie du produit.}$$

• $(X,\mathcal{T})$ esp. T2, car $\mathcal{D}_x$ esp. $T2$ pour tout x.

• *Démonstration de (2)*

• $f \in B^*$, $\varepsilon > 0$, $x_1, \ldots, x_n \in E$,
$U_{\varepsilon,x_1,\ldots,x_n}(f) = \bigcap\limits_{j=1}^{n} \{x' \in E^* \,:\, |x'(x_j) - f(x_j)| < \varepsilon\}$
élément de base pour σ^*.
$V_{\varepsilon,x_1,\ldots,x_n}(f) = \bigcap\limits_{j=1}^{n} \{g \in X \,:\, |g(x_j) - f(x_j)| < \varepsilon\}$
élément de base pour $\mathcal{T}$.
On obtient:
$V_{\varepsilon,x_1,\ldots,x_n}(f) \cap B^* \overset{!}{=} U_{\varepsilon,x_1,\ldots,x_n}(f) \cap B^*$.
• Montrons que B^* est $\mathcal{T}$-fermée.
Soit $f \in \overline{B^*}^{\mathcal{T}} \subseteq X$. Montrons que $f \in B^*$.

(i) f est linéaire : $x_1, x_2 \in E$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $x_3 := \alpha\, x_1 + \beta\, x_2$. Montrons que $f(x_3) - \alpha\, f(x_1) - \beta\, f(x_2) = 0 \qquad (*)$
En effet soit $\varepsilon > 0$, $V_{\varepsilon,x_1,x_2,x_3}(f) \in \mathcal{T}$, $\quad f \in \overline{B^*}^{\mathcal{T}}$
$\Rightarrow\ \exists\, f_\varepsilon \in V_{\varepsilon,x_1,x_2,x_3}(f) \cap B^* \neq \emptyset$
$\Rightarrow\ |f(x_3) - \alpha\, f(x_1) - \beta\, f(x_2)| \underset{f_\varepsilon\ lin}{=}$
$= \Big| f(x_3) - f_\varepsilon(x_3) - \alpha\,(f(x_1) - f_\varepsilon(x_1)) - \beta(f(x_2) - f_\varepsilon(x_2)) \Big|$
$\leq |f(x_3) - f_\varepsilon(x_3)| + |\alpha|\ |f(x_1) - f_\varepsilon(x_1)| + |\beta|\ |f(x_2) - f_\varepsilon(x_2)|$
$\leq \varepsilon + |\alpha|\,\varepsilon + |\beta|\,\varepsilon = \varepsilon\,(1 + |\alpha| + |\beta|)$
$\varepsilon \to 0 \Rightarrow (*)$.

(ii) $\|f\| \leq 1$. En effet, soit $x \in E$, $\|x\| \leq 1$. Montrons que $|f(x)| \leq 1$. Pour cela, soit $\varepsilon > 0 \Rightarrow V_{\varepsilon,f} \in \mathcal{T}$, $f \in \overline{B^*}^{\mathcal{T}} \Rightarrow V_{\varepsilon,f} \cap B^* \neq \emptyset$
$\Rightarrow \exists\, f_\varepsilon \in V_{\varepsilon,f} \cap B^* \quad \Longrightarrow \quad |f_\varepsilon(x) - f(x)| \leq \varepsilon$.
Comme $\|f_\varepsilon\| \leq 1$ on a :

$$|f(x)| \leq |\underbrace{f(x) - f_\varepsilon(x)}_{\leq\varepsilon}| + |\underbrace{f_\varepsilon(x)}_{\leq\|f_\varepsilon\|\leq 1}| \leq \varepsilon + 1$$

$\varepsilon \to 0 \quad \Rightarrow |f(x)| \leq 1$. □

Lemme 12.9 *Soient $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ deux topologies sur $X \neq \emptyset$. Supposons que $(X,\mathcal{T}_1)$ soit T2 et $(X,\mathcal{T}_2)$ compact. Alors $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$.*

Dém. Soit F fermé dans $(X,\mathcal{T}_2) \underset{(X,\mathcal{T}_2)\text{comp.}}{\Longrightarrow} F$ est $\mathcal{T}_2$-compact $\underset{\mathcal{T}_1\subseteq\mathcal{T}_2}{\Longrightarrow} F$ est $\mathcal{T}_1$-compact . $(X,\mathcal{T}_1)$ esp. T2 $\Longrightarrow F$ $\mathcal{T}_1$-fermé. Donc $\mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{T}_1$ et ainsi $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$. □

Soit $x \in E, x^* \in E^*$. Alors $(x, x^*) := x^*(x)$.

Théorème 12.10 *Soit E un espace normé séparable et soit $K \subseteq E^*$ σ^*-compact. Alors (K, σ^*) est métrisable.*

Dém. Soit $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ un ensemble dénombrable dense dans E. Pour $x^* \in E^*$ posons $f_n(x^*) := (x_n, x^*)$. Alors $f_n : (E^*, \sigma^*) \to \mathbb{K}$ est linéaire et σ^*-continue. La famille $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ sépare les points de E^*. En effet, Soit$f_n(x^*) = f_n(y^*)$ $\forall n$. Alors $(x_n, x^*) = (x_n, y^*)$ $\forall n$. Comme $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans E, et que x^*, y^* sont $\Big((E, \|\cdot\|), \mathbb{K}\Big)$-continues, $(x, x^*) = (x, y^*)$ $\forall x \in E$. Ainsi $x^* = y^*$.
Considérons sur $K \times K$ la fonction

$$d(x^*, y^*) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|f_k(x^*) - f_k(y^*)|}{1 + |f_k(x^*) - f_k(y^*)|}.$$

$\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ séparante $\Longrightarrow$ d définie positive. Ainsi d est une distance sur K. Dû à la convergence uniforme, f_n σ^*-continue implique que d est continue sur $K \times K$ muni avec la topologie $\sigma^* \times \sigma^*$. Ainsi $\forall x_0^*$ et $\varepsilon > 0$, $\{x^* \in K : d(x^*, x_0^*) < \varepsilon\}$ est σ^*-ouvert $\Longrightarrow \mathcal{T}_d \subseteq \sigma^*|_K$. $\mathcal{T}_d$ topologie T2, $(K, \sigma^*|_K)$ compact, T2 $\underset{12.9}{\Longrightarrow}$ $\mathcal{T}_d = \sigma^*|_K$. $\square$

Théorème 12.11 Alaoglu-Boubarki pour esp. séparables
Soit E un espace normé séparable. Alors $B^* = \{x^* \in E^* : \|x^*\| \leq 1\}$ est séquentiellement σ^*-compact, i.e. $\forall (x_n^*) \in E^*$, $\|x_n^*\| \leq 1$, $\exists (x_{n_k}^*)$ et $x^* \in B^*$ tq $x_{n_k}^* \xrightarrow{\sigma^*} x^*$, donc $(x, x_{n_k}^*) \to (x, x^*)$ $\forall x \in E$.

Dém. Claire d'après 12.10 et 12.8.

XIII - ESPACES RÉFLEXIFS

Soit E un espace de Banach et $J : E \to E^{**}$ l'immergement canonique. Notation: Soit $x \in E, x^* \in E^*$. Alors $(x, x^*) := x^*(x)$. De même pour la dualité entre E^* et E^{**}. Donc J est définie par $(x^*, Jx) = (x, x^*)$. On rappelle que E est réflexif si J est une surjection.

Proposition 13.1 *Soit E un espace normé. Supposons que E^* soit séparable. Alors E est séparable.*

Dém Comme chaque partie d'un espace séparable est séparable (exo), on voit que $S^* = \{x^* \in E^* : \|x^*\| = 1\}$ est séparable. Soit $M^* = \{x_n^* : n \in \mathbb{N}\}$ un ensemble dense dans S^*.
Choisir $x_n \in E$ tq $\|x_n\| = 1$ et $|(x_n, x_n^*)| \geq 1/2$ (1).
Soit $F = \text{Vect}\ \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Montrons que F est dense dans E. En effet, supposons qu'il existe $x^* \in E^*$ tq $x^*|_F \equiv 0$ et $\|x^*\| = 1$. Choisir $x_{n_0}^* \in M^*$ tq $\|x_{n_0}^* - x^*\| < 1/2$. Alors d'après (1):
$1/2 > \|x_{n_0}^* - x^*\| \geq |(x_{n_0}, x_{n_0}^* - x^*)| \underset{x*|_F \equiv 0}{=} |(x_{n_0}, x_{n_0}^*)| \geq 1/2$. Contradiction.

F dense dans $E \Longrightarrow E$ séparable. $\square$

Proposition 13.2 *Soit E réflexif et $M \subseteq E$ un sev fermé de E. Alors M est réflexif.*

Dém. Soit $x^* \in E^*$. Posons $x^*_M := x^*|_M$. Soit $m_0^{**} \in M^{**}$. Définir x_0^{**} par $(x^*, x_0^{**}) := (x^*_M, m_0^{**})$, où $x^* \in E^*$.
Alors x_0^{**} est linéaire et
$|(x^*, x_0^{**})| \leq \|m_0^{**}\| \, \|x^*_M\| \leq \|m_0^{**}\| \, \|x^*\|$.
Donc $x_0^{**} \in E^{**}$. E réflexif $\Longrightarrow$ $\exists m_0 \in E$ tq $(x^*, x_0^{**}) = (m_0, x^*)$ $\forall x^* \in E^*$. Montrons que $m_0 \in M$. Pour cela, soit $x^* \in E^*$ tq $x^*|M \equiv 0$. Alors $x^*_M = 0$ et ainsi $(m_0, x^*) = (x^*, x_0^{**}) = (\underbrace{x^*_M}_{=0}, m_0^{**}) = 0$. D'après Hahn-Banach $m_0 \in \overline{M} = M$.

Montrons que $J_M m_0 = m_0^{**}$. Soit $m^* \in M^*$ et x^* un prolongement linéaire continue de m^* sur E (Hahn-Banach). Alors $(m^*, m_0^{**}) = (x^*|_M, m_0^{**}) = (x^*, x_0^{**}) = (m_0, x^*) \underset{m_0 \in M}{=} (m_0, m^*) = (m^*, J_M m_0)$. Donc $J_M m_0 = m_0^{**}$. Ainsi $J_M : M \to M^{**}$ est surjective, i.e M est réflexif. $\square$

Proposition 13.3 *Soit E un espace de Banach. Alors E réflexif $\Longleftrightarrow$ E^* réflexif.*

Dém. "$\Longrightarrow$": Soit $J_0 : E \to E^{**}$ l'immergement canonique, donc $(x^*, J_0 y) = (y, x^*)$ $\forall y \in E, x^* \in E^*$.
De même: $J_1 : E^* \to E^{***}$, $(x^{**}, J_1 y^*) = (y^*, x^{**}); \forall y^* \in E^*, x^{**} \in E^{**}$. A montrer: J_0 surjectif $\Longrightarrow$ J_1 surjectif.

Soit $x^{***} \in E^{***}$. Définir $x^* : E \to \mathbb{K}$ par $(x, x^*) := (J_0 x, x^{***})$, $x \in E$. Alors x^* est bien définie, linéaire (claire) et continue car:
$|(x, x^*)| = |(J_0 x, x^{***})| \leq \|x^{***}\| \, \|J_0 x\| \underset{J_0 isom.}{=} \|x^{***}\| \, \|x\|$.
On a $J_1 x^* = x^{***}$ car: J_0 surjectif $\Longrightarrow$ $\forall y^{**} \in E^{**}$ $\exists y \in E$ tq $y^{**} = J_0 y \Longrightarrow$
$(y^{**}, x^{***}) = (J_0 y, x^{***}) \underset{\text{déf} x^*}{=} (y, x^*) \underset{\text{déf} J_0}{=} (x^*, J_0 y) \underset{\text{déf} y}{=} (x^*, y^{**}) \underset{\text{déf} J_1}{=} (y^{**}, J_1 x^*)$.

"$\Longleftarrow$ " Supposons que E ne soit pas réflexif $\Longrightarrow$ $J_0(E) \subsetneq E^{**}$.
E complet, J_0 isométrie $\Longrightarrow$ $J_0(E)$ complet et ainsi fermé dans E^{**}. Hahn-Banach $\Longrightarrow$ $\exists\, L \in E^{***}$ tq $L|_{J_0(E)} \equiv 0$ et $L \neq 0$. (*)
Montrons que $L \notin J_1(E^*)$. Sinon, $\exists y^* \in E^*$ tq $L = J_1 y^*$
$\Longrightarrow$ $\forall x \in E :$ $y^*(x) = (x, y^*) \underset{\text{déf} J_0}{=} (y^*, J_0 x) \underset{\text{déf} J_1}{=} (\underbrace{J_0 x}_{\in E^{**}}, \underbrace{J_1 y^*}_{\in E^{***}}) = (J_0 x, L) \underset{(*)}{=} 0 \Longrightarrow y^* = 0 \Longrightarrow L = 0$. Contradiction.

Donc $J_1(E^*) \subsetneq E^{***}$. Ainsi J_1 n'est pas surjectif, donc E^* pas réflexif. $\square$

Proposition 13.4. *Soit F un espace réflexif et soit T un isomorphisme homéomorphique entre un espace normé E et F. Alors E est réflexif.*
Dém. Exo.

On va maintenant caractériser les espaces normés pour lesquels la boule unité est faiblement compact.

Lemme 13.5 *Soit E espace normé et $J : E \to E^{**}$ l'immergement canonique. Alors J est un homéomorphisme linéaire entre $(E, \sigma(E, E^*))$ et un sev dense de $(E^{**}, \sigma(E^{**}, E^*))$. Si E est réflexif, i.e. si J est surjectif, alors J est un homéomorphisme linéaire entre $(E, \sigma(E, E^*))$ et $(E^{**}, \sigma(E^{**}, E^*))$.*

Dém.
Soit $\sigma_1 := \sigma(E, E^*)$ la topologie faible sur E et $\sigma_2 := \sigma(E^{**}, E^*)$ la topologie faible-étoile sur E^{**}.

(1) système fondamental de voisinages de 0_E par rapport à σ_1:
$U_{\sigma_1} = \bigcap_{j=1}^N \{x \in E : |(x, x_j^*)| < \varepsilon\},\ x_j^* \in E^*$.
système fondamental de voisinages de $0_{E^{**}}$ par rapport à σ_2:
$U_{\sigma_2} = \bigcap_{j=1}^N \{x^{**} \in E^{**} : |(x_j^*, x^{**})| < \varepsilon\},\ x_j^* \in E^*$.
D'après la définition de J: $(x^*, Jx) = (x, x^*)$. Donc $J(U_{\sigma_1}) = U_{\sigma_2} \cap J(E)$. Donc J est une application ouverte de (E, σ_1) sur $(J(E), \sigma_2|_{J(E)})$. Comme J est injective, $J^{-1} : J(E) \to E$ est $\Big((J(E), \sigma_2|_{J(E)}), (E, \sigma_1)\Big)$-continue. Evidemment J est continue.
(2) Montrons que $J(E)$ est σ_2-dense dans E^{**}.
10.14 $\Longrightarrow$ (E^{**}, σ_2) evtlc. Soit $f : E^{**} \to \mathbb{K}$ linéaire, σ_2-continue et $f|_{J(E)} \equiv 0$. 10.14 $\Longrightarrow \exists\ x_f^*$ *tq* $f(x^{**}) = (x_f^*, x^{**})$. Donc $(x_f^*, x^{**}) = 0\ \forall x^{**} \in J(E)$. Ainsi $0 = (x_f^*, Jx) = (x, x_f^*)\ \forall x \in E$. Donc $x_f^* = 0$ et ainsi $f \equiv 0 \underset{10.11}{\Longrightarrow} J(E)$ dense dans (E^{**}, σ_2).
Le reste est claire. □

13.6 Lemme de Goldstine

Soit E un espace normé. Alors $J(B)$ est $\sigma(E^{**}, E^*)$-dense dans B^{**}.

Dém. 12.7 $\Longrightarrow B^{**}$ est $\sigma(E^{**}, E^*)$-fermé dans E^{**} (1).
J isométrie $\Longrightarrow J(B) \subseteq B^{**}$ (2).
(1)(2) $\Longrightarrow \overline{J(B)}^{\sigma(E^{**}, E^*)} \subseteq B^{**}$. Notons que cet ensemble est convexe. Supposons que cette inclusion soit stricte. Soit $x_0^{**} \in B^{**} \setminus \overline{J(B)}^{\sigma(E^{**}, E^*)} \underset{\text{th. sép.}}{\overset{2^{me}}{\Longrightarrow}} \exists$ forme linéaire $f : (E^{**}, \sigma(E^{**}, E^*)) \to \mathbb{K}$ continue, tq $\mathrm{Re} f(x_0^{**}) < \gamma < \mathrm{Re}\ f(x^{**})\ \forall x^{**} \in \overline{J(B)}^{\sigma(E^{**}, E^*)}$. 10.14 $\Longrightarrow \exists\ x_0^* \in E^*$ *tq* $f(x^{**}) = (x_0^*, x^{**})$. S.p.g. $\|x_0^*\| = 1$ (sinon remplacer γ par $\gamma/\|x_0^*\|$.) Alors $\forall\ x^{**} \in B^{**}$:
$|\mathrm{Re}\ (x_0^*, x^{**})| \leq |(x_0^*, x^{**})| \leq \|x_0^*\|\ \|x^{**}\| \leq 1 \cdot 1 = 1$.
Donc $-1 < \gamma < 1$. Ainsi $-1 < \gamma < \mathrm{Re}\ (x_0^*, Jx) = \mathrm{Re}\ (x, x_0^*)\ \forall x \in B$. Contradiction au fait que $]-1, 1[\subseteq x_0^*(B)$ resp. $\mathbb{D} \subseteq x_0^*(B)$ dans le cas complexe. □

Théorème 13.7 théorème de Banach-Kakutani

E espace normé, $B = \{x \in E \, : \, \|x\| \leq 1\}$. Alors B est $\sigma(E, E^*)$-compacte $\Longleftrightarrow$ E réflexif.

Dém. "$\Longleftarrow$" Soit E réflexif $\underset{13.6}{\Longrightarrow}$ $J : (E, \sigma(E, E^*)) \to (E^{**}, \sigma(E^{**}, E^*))$ est un homéomorphisme linéaire.

$J(E) = E^{**} \Longrightarrow J(B) = B^{**}$, car, soit $x^{**} \in B^{**}$, alors $\exists x \in E$ *tq* $J(x) = x^{**}$. J isométrie $\Longrightarrow \|x\| = \|x^{**}\| \Longrightarrow x \in B \Longrightarrow B^{**} \subseteq J(B) \underset{J \text{ isom.}}{\subseteq} B^{**}$.

Alaoglu-Bourbaki (12.8) $\Longrightarrow$ B^{**} est $\sigma(E^{**}, E^*)$-compact $\underset{J \text{ homéo}}{\Longrightarrow}$ $J^{-1}(B^{**}) = B$ est $\sigma(E, E^*)$-compact.

"$\Longrightarrow$" Supposons que B soit $\sigma(E, E^*)$-compact. Comme $J : (E, \sigma(E, E^*)) \to (E^{**}, \sigma(E^{**}, E^*))$ est continue, on déduit que $J(B)$ est $\sigma(E^{**}, E^*))$-compact dans E^{**}. $\sigma(E^{**}, E^*)$ étant T2 $\Longrightarrow J(B)$ fermé dans $\sigma(E^{**}, E^*)$. (1)

13.6 $\Longrightarrow J(B)$ est $\sigma(E^{**}, E^*)$-dense dans B^{**} (2)

12.7 $\Longrightarrow B^{**}$ est $\sigma(E^{**}, E^*)$-fermé. (3)

(1)-(3) $\Longrightarrow J(B) = B^{**}$. Soit $0_{E^{**}} \neq x^{**} \in E^{**}$. Alors $\frac{x^{**}}{\|x^{**}\|} \in B^{**} \Longrightarrow \exists x \in B$ *tq* $Jx = \frac{x^{**}}{\|x^{**}\|} \Longrightarrow x^{**} = J(\|x^{**}\| \, x) \Longrightarrow x^{**} \in J(E)$. Donc $J(E) = E^{**}$, i.e. E réflexif. $\square$

Théorème 13.8

Soit E réflexif. Alors $B = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$ est faiblement séquentiellement compact.

Dém. Soit $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ une suite dans B. Considérons l'adhérence F de Vect$\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Alors F est d'après 13.2 réflexif, i.e. $J_F(F) = F^{**}$. F séparable $\Longrightarrow J_F(F) = F^{**}$ séparable $\underset{13.1}{\Longrightarrow}$ F^* séparable $\underset{12.11}{\Longrightarrow}$ $B^{**}_{F^{**}}$ est séquentiellement $\sigma(F^{**}, F^*)$-compact. En particulier, si $x_n^{**} = J_F x_n$, alors $\exists \; n_k$ et $x_0^{**} \in F^{**}$, $\|x_0^{**}\| \leq 1$ tq $x_{n_k}^{**} \underset{\sigma(F^{**}, F^*)}{\longrightarrow} x_0^{**}$, i.e. $\forall y^* \in F^*$ on a: $(x_{n_k}, y^*) = (y^*, J_F(x_{n_k})) = (y^*, x_{n_k}^{**}) \to (y^*, x_0^{**})$. F réflexif $\Longrightarrow \exists \; x_0 \in F$ tq $J_F(x_0) = x_0^{**}$. Alors $(x_{n_k}, y^*) \to (y^*, J_F(x_0)) = (x_0, y^*) \; \forall y^* \in F^*$.

Si $y' \in E^*$, alors $y^* := y'|_F \in F^*$. Donc

$(x_{n_k}, y') = (x_{n_k}, y^*) \to (x_0, y^*) = (x_0, y')$ car $x_{n_k}, x_0 \in F$. On conclut que $x_{n_k} \underset{\sigma(E, E^*)}{\longrightarrow} x_0$ dans E. Notons que $\|x_0\| \leq 1$. Donc B est faiblement séquentiellement compact. $\square$

Remarque La réciproque est aussi vraie. Ceci est un corollaire du théorème de Banach-Kakutani et du

Théorème de Eberlein-Smulian

Soit E un espace de Banach. Alors $M \subseteq E$ faiblement compact $\Longleftrightarrow$ M faiblement séquentiellement compact.

Nous allons montrer le cas spécial où M est la boule unité.

13.9 Lemme d'interpolation de Helly

Soit E un espace normé et $\{x_1^*, \cdots, x_n^*\} \subseteq E^*$. Soient $c_j \in \mathbb{K}$, $j = 1, \cdots, n$ et $M > 0$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes:

(1) $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists x \in E \quad tq \quad x_j^*(x) = c_j,\ j = 1, \cdots, n$ *et* $\|x\| < M + \varepsilon$
(2) $\forall\, a_j \in \mathbb{K} :\ |\sum_{j=1}^n a_j c_j| \leq M\ \|\sum_{j=1}^n a_j x_j^*\|$.

Dém (1) $\Longrightarrow$ (2): clair.
(2) $\Longrightarrow$ (1): Posons $f_j := x_j^*$. Soit $\Phi : E \to \mathbb{K}^n$ définie par $x \mapsto (f_1(x), ..., f_n(x))$. Alors $\Phi(E)$ est un sous-espace fermé de $\mathbb{K}^n$. Soit $\{y_1, ..., y_k\}$ une base de $\Phi(E)$. Choisissons $z_1, \cdots, z_k \in E$ tq $\Phi(z_j) = y_j$. Soit $A = \text{Vect}\ (z_1, ..., z_k)$. Alors $\Psi := \Phi|_A : A \to \Phi(E)$ est bijective. Comme Ψ^{-1} est linéaire et continue (espaces de dimension finie) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tq $\Psi^{-1}(V_\delta(0)) \subset U_\varepsilon(0)$, où U_ε est une boule ouverte dans A et V_δ dans $\Phi(E)$.
Hahn-Banach $\Longrightarrow \exists\ x^{**} \in E^{**}$ tq $\|x^{**}\| \leq M$ et $(x_j^*, x^{**}) = c_j$. 13.6 $\Longrightarrow J(B)$ est $\sigma(E^{**}, E^*)$-dense dans $B^{**} \Longrightarrow$ il existe une suite généralisée (y_i) dans E, $\|y_i\| \leq M$, tq $\forall\ x^* \in E^* : (y_i, x^*) = (x^*, Jy_i) \to (x^*, x^{**})$. En particulier, $f_j(y_i) = (y_i, x_j^*) \to c_j$, i.e. $\lim_i |f_j(y_i) - c_j| = 0$. Notons que $(f_1(y_i), ..., f_n(y_i)) \in \Phi(E)$ et que $\Phi(E)$ est fermé. Donc $(c_1, \cdots, c_n) \in \Phi(E)$ et
$(f_1(y_i) - c_1, \cdots, f_n(y_i) - c_n) \in \Phi(E)$.
Choisissons i tq $|f_j(y_i) - c_j| < \delta\ \forall j \in \{1, \cdots, n\}$. Alors $\exists w \in U_\epsilon$ tq $\Phi(w) = (-f_1(y_i) + c_1, \cdots, -f_n(y_i) + c_n)$. Donc $\Phi(y_i + w) = (c_1, \cdots, c_n)$ et $\|y_i + w\| \leq M + \epsilon$. $\square$

13.10 Lemme de Riesz *Soit E un espace normé et $F \subseteq E$ un sev fermé propre. Alors $\forall\ 0 < \eta < 1\ \exists\ x_\eta \in E, \|x_\eta\| = 1$ tq dist$(F, x_\eta) > \eta$.*

Dém. Soit $y \in E \setminus F$. Posons $d :=$ dist $(y, F) \Longrightarrow \exists (x_n) \in F^{\mathbb{N}}$ tq $\|x_n - y\| \to d$. Notons que $d > 0 \underset{0<\eta<1}{\Longrightarrow} \exists z \in F$ tq $0 < \|z - y\| < d/\eta$. Posons $\gamma = \frac{1}{\|z-y\|}$ et $x_\eta = \gamma(y - z)$. Alors $\gamma > \eta/d$ et $\|x_\eta\| = 1$. En plus, $\forall x \in F$:

$$\|x - x_\eta\| = \|x - \gamma(y - z)\| = \|x + \gamma z - \gamma y\| = \gamma\|\underbrace{(\frac{1}{\gamma}x + z)}_{\in F} - y\| \geq \gamma \text{dist}\ (y, F) = \gamma d > \eta. \ \square$$

Remarque: Il est clair qu'on peut remplacer $\|x_\eta\| = 1$ par $\|x_\eta\| < 1$.

13.11 Théorème (R.C. James)
Soit E un espace de Banach, $B = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$ et $B^* = \{x^* \in E^* : \|x^*\| \leq 1\}$. Alors sont équivalentes:

(1) E réflexif
(2) B faiblement compact
(3) B faiblement séquentiellement compact
(4) Soit $0 < \theta < 1$. Alors il n'existe pas de suite $(x_n, x_n^*) \in B \times B^*$ telle que $x_i^*(x_j) = \theta$ pour $1 \leq i \leq j$ et $x_i^*(x_j) = 0$ pour $i > j$. $\quad (*)$

Dém (1) $\Longleftrightarrow$ (2): 13.7

(1) $\Longrightarrow$ (3): 13.8

(3) $\Longrightarrow$ (4): Montrons la contraposée. Soit (x_n, x_n^*) une suite dans $B \times B^*$ satisfaisant $(*)$. Montrons que (x_n) ne possède pas de sous-suite qui converge faiblement. En effet, supposons que $x_{n_k} \underset{\sigma(E,E^*)}{\longrightarrow} \xi \in E$. Alors $x_n^*(\xi) = \lim_k x_n^*(x_{n_k}) = \theta$ pour tout n. Mazur (12.4) $\Longrightarrow \xi$ est un point adhérent de l'enveloppe convexe des x_n. En particulier, $\exists x_j$, $\exists\ \lambda_j \geq 0$, $\sum_{j=1}^p \lambda_j = 1$ tq $\|\xi - \sum_{j=1}^p \lambda_j x_j\| < \theta$. Mais alors $\forall n > p$ on a: $|x_n^*(\xi)| < \theta$ car $x_n^*(x_j) = 0\ \forall j < n$. Contradiction.

(4) $\Longrightarrow$ (1). Montrons la contraposée. Soit E non réflexif et soit $0 < \theta < 1$. Posons $\hat{E} = J(E)$, où J est l'immergement canonique de E dans E^{**}. Comme $\hat{E}$ est un fermé strictement inclus dans E^{**}, $\exists_{13.10}\ x^{**} \in E^{**}$ tq dist $(x^{**}, \hat{E}) > \theta$ et $\theta < \|x^{**}\| < 1$.

Nous construisons par récurrence une suite (x_n, x_n^*) tq

(a) $\|x_n\| < 1$ et $\|x_n^*\| < 1$,

(b) $x^{**}(x_n^*) = \theta$ pour tout n,

(c) $x_i^*(x_j) = \theta$ si $i \leq j$,

(d) $x_i^*(x_j) = 0$ si $i > j$.

En effet, comme $\|x^{**}\| > \theta$, $\exists\ x_1^*$ tq $\|x_1^*\| < 1$ et $x^{**}(x_1^*) = \theta$. $\|x^{**}\| < 1 \Longrightarrow \|x_1^*\| > \theta$. Ainsi $\exists\ x_1$ tq $\|x_1\| < 1$ et $x_1^*(x_1) = \theta$.

Supposons que pour chaque $n < p$ les éléments x_n et x_n^* aient été choisis et que (a)-(d) soient satisfaites pour ces éléments. Cherchons x_p^* tq

$(*)$ $\|x_p^*\| < 1, x^{**}(x_p^*) = \theta$ et $x_p^*(x_j) = 0$ pour $j < p$.

Soit $\widehat{x}_j = J_E(x_j)$. Posons $M = \theta/(\text{dist } (x^{**}, \hat{X})$. Alors $M < 1$ et

$\theta \leq M\|x^{**} + \sum_{j=1}^{p-1} a_j \widehat{x}_j\|$ $\qquad (H)$.

Le lemme de Helly (13.9) (appliqué à $c_1 = \theta$ et $c_j = 0$ $(j > 1)$ implique qu'une solution x_p^* de $(*)$ existe.

Il reste a montrer qu'on peut choisir x_p tq $\|x_p\| < 1$ et $x_i^*(x_p) = \theta$ si $i \leq p$.

La condition de Helly sera dans ce cas: $|\sum_{j=1}^p a_j \theta| \leq \widetilde{M}\ \|\sum_{j=1}^p a_j x_j^*\|$.

Mais celle-ci est satisfaite, car

$|\sum_{j=1}^p a_j \theta| = \left|\sum_{j=1}^p a_j x^{**}(x_j^*)\right| =$

$= \left|x^{**}(\sum_{j=1}^p a_j x_j^*)\right| \leq \|x^{**}\|\ \|\sum_{j=1}^p a_j x_j^*\|.$ $\square$

Annexe 3 **Théorèmes de représentation**

Proposition A3.1. *Chaque espace métrique E est isométrique à une partie de l'espace de Banach $(\mathcal{B}(E), \|\cdot\|_\infty)$ des fonctions continues et bornées sur E.*

Dém. Fixons $a \in E$. Pour $x \in E$ soit $L_x : E \to \mathbb{K}$ définie par $L_x(b) = d(x,b) - d(a,b)$, $b \in$

E. Alors L_x est continue et $|L_x(b)| \leq d(x,a)$ $\forall b \in E$. Donc $L_x \in \mathcal{B}(E)$. En plus, $\|L_x - L_y\|_\infty = \sup_{b\in E} |d(x,b) - d(y,b)| \leq d(x,y)$ et $\|L_x - L_y\|_\infty \geq |d(x,x) - d(y,x)| = d(x,y)$. Donc $\|L_x - L_y\|_\infty = d(x,y)$.
L'application $x \mapsto L_x$ est l'isométrie cherchée. $\square$

Proposition A3.2. *Soit E un espace normé. Alors il existe un esp. top. K, T2 , compact, tq E soit isomorphe-isométrique à un sous-espace de l'espace de Banach $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$.*

Dém. Soit $B^* = \{x^* \in E^* : \|x^*\| \leq 1\}$ et $K = (B^*, \sigma^*)$. Alaoglu-Bourbaki $\Longrightarrow$ K compact. Comme la topologie faible-étoile σ^* est T2 et que cette propriété est héréditaire, K est T2.
Soit $f_x : B^* \to \mathbb{K}$ définie par $f_x(x^*) = (x, x^*)$, $x \in E$ et soit $T : E \to C(K)$ donnée par $T(x) = f_x$. Alors T est bien définie, car les fonctionnelles $x^* \mapsto (x, x^*)$ sont σ^* continues sur E^*. T est linéaire et $\|Tx\|_\infty = \|f_x\|_\infty = \max_{x^*\in K} |f_x(x^*)| = \max_{x^*\in E^*, \|x^*\|\leq 1} |(x, x^*)| \underset{HB}{\overset{9.9}{=}} \|x\|$. Donc T est un isomorphisme isométrique. $\square$